Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Шустова, Квантовое моделирование нелинейной динамики цен на акции: бомовский подход, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 405–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:37:23

© 2007 г.

О. А. Шустова*

КВАНТОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ЦЕН НА АКЦИИ: БОМОВСКИЙ ПОДХОД

Методы квантовой механики применяются для математического моделирования динамики цен на финансовом рынке. Предлагается описание поведенческих финансовых факторов с использованием квантово-механической модели ведущей волны (бомовской модели). Реальные ценовые траектории определяются (с помощью финансового аналога второго закона Ньютона) через два финансовых потенциала: потенциал типа классического $V(q)$ (“жесткие” условия рынка) и потенциал типа квантового $U(q)$ (поведенческие условия рынка).

Ключевые слова: квантовая механика, финансовый рынок, бомовская механика, информационная ведущая волна, нелинейная ценовая динамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционное описание финансового рынка основано на классической теории стохастических процессов (детали см., например, в книгах [1], [2]). Обычно это описание основывается на предположении о том, что инвесторы действуют *рационально и беспристрастно*. При этих условиях вся существующая информация воздействует на цены, которые изменяются только тогда, когда поступает новая информация. По определению, *новая информация возникает случайно и случайным образом воздействует на ценовые активы*. Допущение рационального поведения агентов финансового рынка много раз подвергалось сомнению в финансовой и экономической литературе, например, в так называемой поведенческой экономике, основанной Тверски и Канеманом (см. также книгу [2], посвященную отклонениям цен от закона случайного блуждания, обусловленным сезонными и временными факторами).

В настоящей работе мы развиваем новый подход, не включающий предположения о том, что инвесторы действуют рационально и беспристрастно и что новая информация возникает случайно и случайным образом действует на ценовые активы. Наш подход можно рассматривать как специальную экономико-физическую [2] модель в области поведенческих финансовых моделей. В нашем подходе информация относительно финансового рынка (включая ожидания агентов от финансового

---

*International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences, MSI, University of Växjö, S-35195, Sweden. E-mail: Olga.Choustova@msi.vxu.se

рынка) описывается *информационным полем* $\psi(q)$ – *финансовой волной*. Это поле развивается детерминированным образом¹⁾, возмущая динамику цен активов и опционов. Поскольку психология агентов финансового рынка дает важный вклад в финансовую волну $\psi(q)$, нашу модель можно рассматривать как специальную *психо-финансовую модель*.

Наши исследования квантового финансового моделирования базировались на книге Сороса [3], в которой он критикует традиционную модель, основанную на классических случайностях, и предлагает рассматривать квантовые финансовые модели.

Были проведены многочисленные исследования по применению к анализу финансового рынка квантовых методов (см., например, работы [4]–[6]), не связанных непосредственно с поведенческим моделированием, но основанных на общей концепции, состоящей в том, что квантовая механика может лучше описывать случайности финансового рынка (см., например, работу [7]: “естественное объяснение крайней беспорядочности эволюции цен на финансовых рынках заключается в квантовых эффектах”).

2. ФИНАНСОВОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Кратко напомним, в чем заключается бомовская модель финансового рынка, предложенная в работе [8]. Рассмотрим математическую модель, в которой огромное число агентов финансового рынка взаимодействует друг с другом, и учтем внешние экономические (а также политические, социальные и даже метеорологические) условия для того, чтобы найти цены купли–продажи финансовых активов. Рассмотрим торговлю акциями некоторых корпораций (например, VOLVO, SAAB, IKEA и т.д.)²⁾.

Рассмотрим *ценовую систему координат*. Пронумеруем корпорации, которые эмитировали акции на рассматриваемом финансовом рынке: $j = 1, 2, \dots, n$ (например, VOLVO: $j = 1$, SAAB: $j = 2$, IKEA: $j = 3$, ...). Можно ввести n -мерное конфигурационное пространство цен $Q = R^n$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, где q_j – цена акции j -й корпорации. Здесь R – вещественная прямая. Динамика цен описывается траекторией

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

в конфигурационном ценовом пространстве Q .

Другая переменная, которую мы рассмотрим, представляет собой *изменение цены*:

$$v_j(t) = \dot{q}_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_j(t + \Delta t) - q_j(t)}{\Delta t}$$

(см., например, книгу [2] относительно роли описания изменения цены). В реальных моделях мы рассматриваем дискретный временной масштаб $\Delta t, 2\Delta t, \dots$. Здесь необходимо использовать дискретную переменную изменения цены

$$\delta q_j(t) = q_j(t + \Delta t) - q_j(t).$$

¹⁾ Динамика определяется уравнением Шредингера на пространстве цен на акции.

²⁾ Аналогичные модели можно развить для торговли опционами (см. работу [9] по поводу бомовской финансово-волновой модели для портфеля ценных бумаг).

Теперь введем m – аналог массы, равный числу единиц (в нашем случае – акций), которые трейдер эмитирует на рынок. Назовем m *финансовой массой*. Таким образом, каждый трейдер j (например, VOLVO) имеет свою собственную финансовую массу m_j (размер эмиссии своих акций). Полная цена эмиссии, представленной j -м трейдером, равна $T_j = m_j q_j$ – *капитализации рынка*.

Введем также *финансовую энергию* рынка как функцию $H: Q \times V \rightarrow R$. Если использовать аналогию с классической механикой, то следует рассмотреть (по крайней мере при математическом моделировании) финансовую энергию вида

$$H(q, v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_j^2 + V(q_1, \dots, q_n). \quad (1)$$

Здесь $K = (1/2) \sum_{j=1}^n m_j v_j^2$ – *кинетическая финансовая энергия*, а $V(q_1, \dots, q_n)$ – *потенциальная финансовая энергия*, m_j – финансовая масса j -го трейдера.

Кинетическая финансовая энергия соответствует усилиям агентов финансового рынка, которые они предпринимают для изменения цены: более значительное повышение цены обуславливает более высокую кинетическую финансовую энергию. Если корпорация j_1 имеет большую финансовую массу, чем корпорация j_2 , так что $m_{j_1} > m_{j_2}$, то одинаковое изменение цены, т.е. одинаковая финансовая скорость $v_{j_1} = v_{j_2}$, характеризуется более высокой кинетической финансовой энергией: $K_{j_1} > K_{j_2}$. Заметим также, что высокая кинетическая финансовая энергия характеризует быстрые изменения финансовой ситуации на рынке. Однако кинетическая финансовая энергия не позволяет определить направление этих изменений. Это может быть как быстрым экономическим ростом, так и спадом.

Потенциальная финансовая энергия V описывает взаимодействия между трейдерами $j = 1, \dots, n$ (например, конкуренцию NOKIA и ERICSSON), а также внешние экономические условия (например, цены на нефть и газ) и даже метеорологические условия (например, погодные условия в Луизиане и Флориде). Например, можно рассмотреть простейший потенциал взаимодействия

$$V(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n (q_i - q_j)^2.$$

Разница $|q_1 - q_j|$ между ценами является наиболее важным условием для *арбитражных действий*.

По аналогии с классической механикой материальных объектов введем новую переменную $p = mv$ – *ценовой импульс*. Вместо вектора изменения цены $v = (v_1, \dots, v_n)$ рассмотрим вектор ценового импульса

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_j = m_j v_j.$$

Пространство ценовых импульсов обозначается символом P . Пространство $\Omega = Q \times P$ будет называться ценовым фазовым пространством. *Гамильтоновы уравнения* движения в ценовом фазовом пространстве имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если финансовая энергия имеет вид (1), то гамильтоновы уравнения имеют вид $\dot{q}_j = p_j/m_j = v_j$, $\dot{p}_j = -\partial V/\partial q_j$. Второе из этих уравнений можно записать в виде $m_j \dot{v}_j = -\partial V/\partial q_j$. Величину $\dot{v}_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_j(t+\Delta t) - v_j(t))/\Delta t$ естественно называть *ценовым ускорением* (изменением изменения цены). Величина $f_j(q) = -\partial V/\partial q_j$ называется (потенциальной) финансовой силой. Получаем финансовый вариант второго закона Ньютона:

$$m\dot{v} = f; \quad (2)$$

произведение финансовой массы на ценовое ускорение равно финансовой силе.

3. ВВЕДЕНИЕ В БОМОВСКУЮ МЕХАНИКУ

Подчеркнем, что традиционный квантовый формализм не может ничего сказать относительно индивидуальной квантовой частицы. С помощью такого формализма мы получаем только статистические предсказания для огромных ансамблей частиц. Однако бомовская механика [10]–[14] лучше описывает квантовую реальность, поскольку там имеется возможность описания траекторий индивидуальных частиц. Это великое преимущество бомовской механики не так часто использовалось в физике. До настоящего времени не было проведено экспериментов, которые позволили бы различать предсказания бомовской механики и традиционные предсказания квантовой механики.

Упомянутые преимущества бомовской механики можно использовать в применении к финансовому рынку. В этом случае действительно возможно наблюдать динамику траекторий цены или изменения цены. Такая траектория описывается уравнениями математического формализма бомовской механики.

Динамика волновой функции $\psi(t, q)$ описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}(t, q) + V(q)\psi(t, q). \quad (3)$$

Запишем волновую функцию $\psi(t, q)$ в виде

$$\psi(t, q) = R(t, q)e^{iS(t, q)/\hbar},$$

где

$$R(t, q) = |\psi(t, q)|.$$

Получим дифференциальные уравнения для R^2 и S :

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial q} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial q} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \left(V - \frac{\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что при вероятностной интерпретации Борна для волновой функции формула $R^2 = |\psi|^2$ дает вероятность. Таким образом, уравнение (4) представляет собой уравнение, описывающее динамику распределения вероятностей (в физике оно называется уравнением непрерывности). Предположим, что

$$\frac{\hbar^2}{2m} \ll 1$$

и вкладом члена

$$\frac{\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2}$$

можно пренебречь. Тогда получаем уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V = 0. \quad (6)$$

Из классической механики известно, что это классическое уравнение Гамильтона–Якоби, соответствующее динамике частиц:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \text{или} \quad m\dot{q} = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (7)$$

где частицы движутся нормально к поверхности $S = \text{const}$. Бом предложил аналогичным образом интерпретировать уравнение (5). Однако мы видим, что в этом уравнении классический потенциал V возмущен дополнительным “квантовым потенциалом”

$$U = \frac{\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2}.$$

Таким образом, в бомовской механике движение частицы описывается обычным уравнением Ньютона, но с силой, соответствующей комбинации классического потенциала V и квантового потенциала U :

$$m \frac{dv}{dt} = - \left(\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \right). \quad (8)$$

Важным моментом является то, что потенциал U сам по себе управляется полевым уравнением – уравнением Шредингера (3). Таким образом, уравнение (8) нельзя рассматривать просто как ньютоновскую классическую динамику (поскольку потенциал U зависит от ψ как от полевого параметра).

Как мы уже отмечали, имеется несколько возражений против бомовского квантового формализма:

1) бомовская теория дает возможность получить математическое описание траектории $q(t)$ элементарной частицы, но согласно традиционному квантовому формализму такой траектории не существует;

2) бомовская теория нелокальна: через поле ведущей волны одна частица “чувствует” другую на больших расстояниях.

Мы утверждаем, что если применить бомовскую теорию к моделированию финансового рынка, то эти недостатки становятся преимуществами.

4. МОДЕЛЬ ВЕДУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Наше фундаментальное допущение состоит в том, что агенты на современном финансовом рынке не являются просто “агентами, аналогичными классическим”. Их действия управляются не только финансовыми потенциалами, аналогичными классическим, $V(t, q_1, \dots, q_n)$, но также (подобно тому, как это происходит в теории

ведущей волны для квантовых систем) дополнительным информационным (или психологическим) потенциалом, обусловленным финансовой ведущей волной (ср. с работами [15]–[18]). Подчеркнем две важные характерные черты финансовой модели ведущей волны.

1. Все акции взаимодействуют на информационном уровне. Общий формализм теории ведущей волны [10]–[12] гласит, что если функция $\psi(q_1, \dots, q_n)$ не разбивается на множители, т.е. $\psi(q_1, \dots, q_n) \neq \psi_1(q_1) \dots \psi_n(q_n)$, то любое изменение цены q_i будет автоматически изменять поведение всех агентов финансового рынка (даже тех, кто прямо не взаимодействует с i -ми акциями).

2. Реакции рынка не зависят от амплитуды финансовой ведущей волны: волны $\psi, 2\psi, 100000\psi$ дадут одинаковую реакцию.

Теперь просто применим стандартный формализм ведущей волны к финансовому рынку. Фундаментальный постулат теории ведущей волны заключается в том, что ведущая волна (поле) $\psi(q_1, \dots, q_n)$ обуславливает новый (квантовый) потенциал $U(q_1, \dots, q_n)$, который возмущает классические уравнения движения. Модифицированное уравнение Ньютона имеет вид

$$\dot{p} = f + g,$$

где $f = -\partial V/\partial q$ и $g = -\partial U/\partial q$. Назовем дополнительную финансовую силу g *ментальной финансовой силой*. Эта сила $g(q_1, \dots, q_n)$ определяет нечто вроде коллективного сознания финансового рынка.

Мы должны сделать только одно замечание – о роли постоянной $\hbar$ в уравнении Шредингера (ср. с работами [5], [6], [9]). В квантовой механике (которая имеет дело с микроскопическими объектами) $\hbar$ – постоянная Планка. Предполагается, что эта постоянная играет фундаментальную роль во всех квантовых рассмотрениях. Однако исходно $\hbar$ возникает именно как числовой параметр масштаба в процессах энергетического обмена. Поэтому в нашей финансовой модели можно рассматривать $\hbar$ как параметр масштаба цен, а именно единицу, в которой мы хотели бы измерять изменение цены.

5. СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ЦЕНЫ

Нас будет интересовать стандартное отклонение цены q_t . Пусть ψ – ментальное состояние финансового рынка. Общий квантовый формализм дает следующую формулу для ценовой дисперсии:

$$\sigma_\psi^2(q_t) = E_\psi q_t^2 - (E_\psi q_t)^2,$$

где для наблюдаемой a квантовое среднее (в состоянии ψ) дается выражением

$$E_\psi a = (a\psi, \psi).$$

Поскольку для любой наблюдаемой a_t верно $E_\psi a_t = E_{\psi(t)} a_0$, имеем

$$\sigma_\psi^2(q_t) = E_{\psi(t)} q^2 - (E_{\psi(t)} q)^2.$$

Отсюда

$$\sigma_\psi^2(q_t) = (q^2 \psi(t), \psi(t)) - (q \psi(t), \psi(t))^2.$$

Предположим, что в начальный момент времени волновая функция имеет вид гауссова пакета:

$$\psi_0(q) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-k^2(\Delta q)^2 + ikq\} dk,$$

где Δq – ширина пакета в ценовом пространстве. Здесь среднее значение цены равно нулю. Хорошо известно (см., например, книгу [11], с. 46), что

$$\psi(t, q) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-k^2(\Delta q)^2 + ikq - \frac{ihk^2t}{2m}\right\} dk.$$

Здесь среднее значение цены равно нулю для любого момента времени. Вычисляя этот интеграл (см. там же), мы видим, что

$$\sigma_\psi(q_t) = \sqrt{(q^2\psi(t), \psi(t)) - (q\psi(t), \psi(t))^2} = \sqrt{(q^2\psi(t), \psi(t))} \approx \frac{ht}{m\Delta q}$$

при больших t .

Таким образом, для гауссова пакета цен стандартное отклонение цены изменяется как линейная функция t . Большая финансовая масса (т.е. более высокий уровень эмиссии акций) обуславливает меньшее стандартное отклонение, так что цена не сильно флуктуирует относительно своего среднего значения. Если уровень эмиссии был очень малым, то можно ожидать больших отклонений от среднего значения.

6. ВОЗРАЖЕНИЕ ПО ПОВОДУ ГЛАДКОСТИ ТРАЕКТОРИЙ

Р. Петтерсон обратил внимание автора на то, что ценовая динамика определяется обыкновенным дифференциальным уравнением. Поэтому траектории являются гладкими функциями. С другой стороны, реальные ценовые траектории вовсе не являются гладкими. Чтобы ответить на это возражение, нам придется довольно глубоко вникнуть в интерпретационные детали бомовской механики. Заметим, что имеется два различных взгляда на бомовский математический формализм. Согласно одной интерпретации (см. книгу [11]) можно рассмотреть квантовый потенциал, а затем перейти от основного уравнения для импульса (7) к уравнению Ньютона (8). Подчеркнем, что первое уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка для цены акции, а второе – уравнением второго порядка. Согласно другой интерпретации (см., например, книги [13], [14]) не следует переходить к уравнению Ньютона второго порядка. Квантовый потенциал не вводится. Имеется только поле $S(t, q)$, которое обуславливает динамику первого порядка (7). Конечно, мы не хотим вступать в великий спор по поводу правильной интерпретации бомовской механики. Мы можем действовать довольно прагматично и заметить, что можно двигаться вперед и без квантового потенциала, интерпретируя поле $\nabla S(t, q)$ как новое информационное поле, обусловленное состоянием $\psi(t, q)$. Сначала мы попробуем ответить на возражение Петтерсона, используя подход квантового потенциала и, следовательно, уравнение Ньютона второго порядка (7) для описания динамики цены. Для этого потребуются некоторые хорошо известные факты из функционального анализа.

7. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ КВАНТОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Напомним стандартную теорему существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (теорему Пикара), которая гарантирует гладкость траекторий (см., например, книгу [19]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, и пусть F удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x :

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq c|x - y|, \quad c > 0. \quad (9)$$

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ существует единственное решение задачи Коши класса C^1

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (10)$$

на сегменте $\Delta = [t_0, a]$, где $a > 0$ зависит от t_0, x_0 и F .

Обобщим теорему 1 на разрывные F . Вместо обыкновенного дифференциального уравнения (10) рассмотрим соответствующее интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds. \quad (11)$$

Рассмотрим пространство $BM[t_0, a]$, состоящее из ограниченных измеримых функций $x: [t_0, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда получим:

- а) $\sup_{t_0 \leq t \leq a} |x(t)| \equiv \|x\|_\infty < \infty$;
- б) для любого борелева подмножества $A \subset \mathbb{R}$ его прообраз $x^{-1}(A) = \{s \in [t_0, a] : x(s) \in A\}$ снова является борелевым подмножеством в $[t_0, a]$.

ЛЕММА. Пространство траекторий $BM[t_0, a]$ является банаховым пространством.

Используя теорему о неподвижной точке для сжатий в полном метрическом пространстве $BM[t_0, a]$ (см., например, книгу [19]), докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая ограниченная функция и пусть F удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x (см. (9)). Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ существует единственное решение интегрального уравнения (11) класса $BM[t_0, a]$, где $a > 0$ зависит от x_0, t_0 и F .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (непрерывность решения интегрального уравнения). Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решения являются непрерывными функциями $x: [t_0, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Таким образом, теорема 2 дает достаточное условие существования единственной непрерывной траектории-решения $x(t)$ интегрального уравнения (11). Однако решение $x(t)$ в общем случае, конечно, не является непрерывно дифференцируемым.

Используя теорему о неподвижной точке для сжатий в полном метрическом пространстве $L_2[t_0, a]$ (см., например, книгу [19]), докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть f удовлетворяют условию Липшица (9). Тогда для любой точки $(t_0, x_0 \in [0, T) \times \mathbb{R})$ существует единственное решение интегрального уравнения (11) класса $L_2[t_0, a]$, где $a > 0$ зависит от x_0, t_0 и F .

Заметим, что аналогично случаю пространства $BM[t_0, a]$ можно показать, что решения, существующие в силу теоремы 3, являются непрерывными функциями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (непрерывность). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда решения $x: [t_0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными функциями.

Таким образом, мы снова получаем непрерывные, но в общем случае не гладкие решения ($x \notin C^1$) основного интегрального уравнения.

Теоремы 2 и 3 справедливы в многомерном случае: $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ и $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Теперь, чтобы применить нашу теорию к уравнению Ньютона, которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, воспользуемся стандартным приемом. Перепишем это уравнение в виде системы уравнений первого порядка относительно $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{2n})$, где $x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n$ и $x_{n+1} = p_1, \dots, x_{2n} = p_n$. Получим систему уравнений первого порядка $dx/dt = F(t, x(t))$, где

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ f_1(t, x_1, \dots, x_n) + g_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) + g_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь $f_j(t, x_1, x_n) = \partial V(t, x_1, \dots, x_n)/\partial x_j$ и $g_j(t, x_1, \dots, x_n) = \partial U(t, x_1, \dots, x_n)/\partial x_j$. Поэтому если $\nabla V = (\partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_n)$ или $\nabla U = (\partial U/\partial x_1, \dots, \partial U/\partial x_n)$ не являются непрерывными, то стандартные теоремы существования и единственности (см. теорему 1) неприменимы. Однако вместо обыкновенного дифференциального уравнения можно рассмотреть интегральное уравнение (11) и применить к нему теоремы 2 и 3. Заметим, что из-за структуры $F(t, x)$ на самом деле получается, что

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_{01} + \int_{t_0}^t F_1(s, q(s)) ds, \dots, p_n(t) = \\ &= p_{0n} + \int_{t_0}^t F_n(s, q(s)) ds, \dots, q_n(t) = q_{0n} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t p_n(s) ds. \end{aligned}$$

В силу предложений 1 и 2 функции $p_j(t)$ – непрерывные. Поэтому интегралы $\int_{t_0}^t p_j(s) ds$ являются непрерывными дифференцируемыми функциями. Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 или теоремы 3 мы получаем следующую ценовую динамику:

ценовые траектории лежат в классе C^1 (поскольку $dq(t)/dt$ существует и непрерывна), но ценовая скорость

$$v(t) = \frac{p(t)}{m}$$

в общем случае не является дифференцируемой.

8. ОТВЕТ НА ВОЗРАЖЕНИЕ ПО ПОВОДУ ГЛАДКОСТИ ТРАЕКТОРИЙ

Представляется, что, используя подход квантового потенциала, можно получить негладкие ценовые скорости, но при этом вовсе не гладкие ценовые траектории. Основное допущение классической ньютоновской динамики для ценового ускорения обуславливает гладкость ценовых траекторий.

Теперь вернемся к интерпретации поля ∇S . Здесь основным ценовым уравнением является уравнение первого порядка

$$m\dot{q} = \frac{\partial S}{\partial q}. \quad (12)$$

Переходя к соответствующему интегральному уравнению

$$mq(t) = q(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \frac{\partial S(s, q(s))}{\partial q} ds, \quad (13)$$

получаем непрерывное решение, которое не является дифференцируемым, если поле $\nabla S(t, q)$ разрывно.

9. ОБЩАЯ СХЕМА ПОЛУЧЕНИЯ РАЗРЫВНОГО $\nabla S(T, Q)$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Пусть $\hat{H}$ – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{H} \geq 0$ (гамильтониан – оператор, представляющий финансовую энергию). Рассмотрим соответствующее уравнение Шредингера $\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$, $\psi(0) = \psi_0$, в $L_2(\mathbb{R})$. Его решение будет иметь вид $u_t(\psi_0) = e^{-it\hat{H}/\hbar}\psi_0$.

Напомним, что для любого $t \geq 0$ отображение $u_t: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ является унитарным оператором: оно взаимно однозначно, отображает $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и сохраняет скалярное произведение: $(u_t\psi, u_t\phi) = (\psi, \phi)$, $\psi, \phi \in L_2$.

Обратим внимание на второе свойство отображения u_t , согласно которому для любого $\phi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ можно найти $\psi_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\phi = u_t(\psi_0)$. Достаточно выбрать $\psi_0 = u_t^{-1}(\phi)$ (любой унитарный оператор обратим). Таким образом, $\psi(t) = u_t(\psi_0) = \phi$. В общем случае функция $\phi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ не является гладкой или даже непрерывной, поэтому в рассматриваемом случае (поскольку мы построили волновую функцию ψ такую, что $\psi(t) = \phi$, где ϕ – произвольно выбранная квадратично-интегрируемая функция) поле $\nabla S(t, q)$, вообще говоря, является обобщенной функцией (распределением).

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вообще говоря, поле $\nabla S(t, q)$ является обобщенной функцией (распределением). Поэтому ценовая траектория является обобщенной функцией (распределением) переменной времени t . Более того, поскольку динамическое уравнение нелинейно, нельзя гарантировать даже существование решения.

Таким образом, мы получаем широкий класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором правые части имеют вид обобщенной функции. Исследование уравнений, соответствующих различным квантовым состояниям,

представляет собой интересную задачу, которая будет рассмотрена в последующих публикациях.

Благодарности. Автор благодарит С. Альбеверио, А. Гильберт, Р. Петтерсона, Б. Хайли, Р. Кэррола и О. Пашаева за плодотворные обсуждения и советы.

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Т. 1. Факты. Модели, Т. 2. Теория, ФАЗИС, М., 1998.
- [2] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] J. Soros, *The Alchemy of Finance. Reading of Mind of the Market*, Wiley, N. Y., 1987.
- [4] O. Choustova, *Pilot wave quantum model for the stock market*, [quant-ph/0109122](#).
- [5] E. Haven, *Phys. A*, **304** (2002), 507–524.
- [6] E. Haven, *Phys. A*, **324** (2003), 201–206.
- [7] E. Haven, *Phys. A*, **344** (2004), 152–155.
- [8] W. Segal, I. E. Segal, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **95** (1998), 4072–4075.
- [9] E. Haven, “Bohmian mechanics in a macroscopic quantum system”, *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations – 3* (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conf. Proc., **810**, Amer. Inst. Phys., Melville–New York, 2006, 330–335.
- [10] Д. Бом, *Квантовая теория*, 2-е изд., Наука, М., 1965.
- [11] D. Bohm, B. Hiley, *The Undivided Universe: an Ontological Interpretation of Quantum Theory*, Routledge, London, 1993.
- [12] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [13] J. Bricmont, D. Dürr, M. C. Galavotti, G. C. Ghirardi, F. Petruccione, N. Zanghi (eds.), *Chance in Physics: Foundations and Perspective* (Ischia, Italy, 1999), Lect. Notes Phys., **574**, Springer, Berlin–Heidelberg, 2001.
- [14] D. Dürr, *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2001.
- [15] A. Yu. Khrennikov, *Information Dynamics in Cognitive, Psychological, Social and Anomalous Phenomena*, Fund. Theor. Phys., **138**, Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [16] A. Yu. Khrennikov, *Found. Phys.*, **29** (1999), 1065–1098.
- [17] A. Yu. Khrennikov, *Biosystems*, **56** (2000), 95–120.
- [18] A. Yu. Khrennikov, *Classical and Quantum Mental Models and Freud’s Theory of Unconscious Mind*, Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **1**, Växjö Univ. Press, Växjö, 2002.
- [19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989.