Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Бенхумея, Х. Нуньес, А. Ф. Тенорио, Максимальная абелева размерность линейных алгебр, образованных строго верхнетреугольными матрицами, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 419–429

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6099>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:10:38

© 2007 г. Х. К. Бенхумея*, Х. Нуньес*, А. Ф. Тенорио†

МАКСИМАЛЬНАЯ АБЕЛЕВА РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР, ОБРАЗОВАННЫХ СТРОГО ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Вычислена максимальная размерность абелевых подалгебр Ли, содержащихся в алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$, образованной строго верхнетреугольными матрицами размера $n \times n$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Для этого доказана ранее выдвинутая авторами гипотеза относительно этой размерности. Приведен алгоритм, с помощью которого сначала исследуются два простейших примера, а затем и общий случай.

Ключевые слова: нильпотентная алгебра Ли, максимальная абелева размерность, строго верхнетреугольные матрицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы завершаем начатое в работе [1] исследование, связанное с некоторым классом нильпотентных алгебр Ли. В предыдущей статье мы искали максимальную размерность абелевых подалгебр Ли, содержащихся в алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$, образованной строго верхнетреугольными матрицами размера $n \times n$ (мы называем эту величину максимальной абелевой размерностью алгебры $\mathfrak{g}_n$). В работе [1] было выдвинуто предположение о том, чему равна максимальная абелева размерность в зависимости от размера матриц.

Основной целью данной работы является доказательство этой гипотезы, т.е. вычисление максимальной размерности абелевых подалгебр Ли, содержащихся в алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$.

В работе [1] мы представили препятствие к тому, чтобы абелева алгебра Ли с размерностью на единицу меньше размерности алгебры $\mathfrak{g}_n$ представляла собой подалгебру Ли алгебры $\mathfrak{g}_n$. Для этого использовалось понятие главной (векторной) компоненты в базисе подалгебры. Это понятие будет использовано в настоящей работе для вычисления максимальной абелевой размерности алгебры $\mathfrak{g}_n$.

*Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla. E-mail: jcbenjumea@us.es, jnvaldes@us.es

†Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e H^a Económica, Escuela Politécnica Superior, Universidad Pablo de Olavide. E-mail: aftenvil@upo.es

Наш интерес к алгебрам Ли $\mathfrak{g}_n$ и к их максимальным абелевым размерностям связан с тем, что каждая нильпотентная подалгебра Ли изоморфна некоторой подалгебре Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$ (см. монографию [2], предложение 3.6.6). Таким образом, вычисление максимальной абелевой размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ представляет собой первый шаг к исследованию максимальной абелевой размерности произвольной конечномерной нильпотентной алгебры Ли.

Другой мотив, побуждающий к исследованию этого класса алгебр Ли, связан с возможностью их использования при исследовании различных физических систем. В современной физике алгебры и группы Ли находят широкое применение. Классический пример использования теории Ли состоит в исследовании симметрий [3], [4]. В современной науке симметрии не сводятся только к геометрическим симметриям пространства-времени; существуют иные симметрии, связанные с “внутренними” степенями свободы частиц и полей.

В литературе встречаются разнообразные статьи, посвященные проблеме нильпотентных алгебр и групп Ли в связи с различными вопросами математической физики. На этом пути в работах [5], [6] конструкция пространства-времени черных дыр исследовалась путем анализа горизонтов, смоделированных на произвольных произведениях обобщенных групп Гейзенберга, на нильгеометриях и решаемых геометриях (геометрия в этом случае представляет собой группу Ли с левоинвариантной метрикой). В работе [7] обобщения формул Вейля и Колен де Вердые были получены на основе исследования конечномерных нильпотентных на втором уровне алгебр Ли. Отталкиваясь от таких алгебр Ли, авторы получили однородные представления. Заметим, что эти представления весьма полезны в квантовой механике, поскольку с их помощью можно представить, например, такие внутренние степени свободы элементарных частиц, как спин.

Структура данной работы следующая. После повторения некоторых результатов теории Ли в разделе 2 мы определяем понятие максимальной абелевой размерности для произвольной алгебры Ли и вновь формулируем гипотезу, выдвинутую в работе [1], относительно максимальной абелевой размерности для $\mathfrak{g}_n$. В разделе 3 вводится понятие главной (векторной) компоненты в базисе данной подалгебры алгебры $\mathfrak{g}_n$. Это понятие используется в разделе 4 для вычисления максимальной абелевой размерности $\mathfrak{g}_n$ и для доказательства сформулированной гипотезы.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе собраны некоторые предварительные сведения об алгебрах Ли; исчерпывающий обзор содержится в монографии [2]. Мы рассматриваем только конечномерные алгебры Ли над полем комплексных чисел.

Наинизшие центральные ряды для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) &= \mathfrak{g}, & \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], & \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) &= [\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], & \dots, \\ \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) &= [\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], & \dots \end{aligned}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если существует натуральное число m такое, что $C^m(\mathfrak{g}) \equiv 0$.

Частное семейство нильпотентных алгебр Ли образовано абелевыми алгебрами Ли; алгебра Ли $\mathfrak{h}$ называется *абелевой*, если $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$ для всех $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{h}$.

Матрица, или *линейная алгебра*, представляет собой векторное пространство $\mathcal{V}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) векторы в $\mathcal{V}$ представляют собой матрицы одного и того же порядка;
- 2) скобка Ли есть так называемый *коммутатор Ли*, определяемый для любых $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ как

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1,$$

где точка означает стандартное матричное произведение.

Заметим, что линейные алгебры можно снабдить структурой алгебры Ли. Это позволяет исследовать все конечномерные алгебры Ли, так как согласно теореме Адо (см. [2], теорема 3.17.8) произвольная конечномерная алгебра Ли изоморфна некоторой линейной алгебре Ли.

Обозначим через $\mathfrak{g}_n$ нильпотентную линейную алгебру, образованную всеми строго верхнетреугольными матрицами размера $n \times n$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Векторы в $\mathfrak{g}_n$ имеют вид

$$g_n(x_{r,s}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Размерность $\mathfrak{g}_n$ равна $d_n = n(n-1)/2$; начиная с этого момента, мы будем использовать базис алгебры $\mathfrak{g}_n$, составленный из векторов

$$X_{i,j} = g_n(x_{r,s}), \quad x_{r,s} = \begin{cases} 1, & \text{если } (r,s) = (i,j), \\ 0, & \text{если } (r,s) \neq (i,j), \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, n-1$ и $j = i+1, \dots, n$. Коммутационные соотношения в этом базисе имеют вид

$$[X_{i,j}, X_{j,k}] = X_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = i+1, \dots, n, \quad k = j+1, \dots, n. \quad (1)$$

Поскольку в данной алгебре Ли всегда существуют абелевы подалгебры, можно вычислить максимальную размерность этих подалгебр для произвольной конечномерной алгебры Ли. При этом приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{g}$ представляет собой конечномерную алгебру Ли. *Максимальная абелева размерность* $\mathfrak{g}$, обозначаемая как $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$, есть максимальная размерность абелевых подалгебр Ли этой алгебры.

Поставим вопрос, какова максимальная абелева размерность алгебры $\mathfrak{g}_n$. В работе [1] была предложена алгоритмическая процедура получения абелевых подалгебр

Ли в $\mathfrak{g}_n$. Эта процедура начинается с рассмотрения всех векторов $X_{i,n}$, $i = 1, \dots, n$, отвечающих n -му столбцу в $\mathfrak{g}_n$, а шаг итерационной процедуры состоит в следующем: добавим к этим векторам векторы, отвечающие h -му столбцу, и удалим те из них, которые отвечают h -й строке. Процедура завершается, когда число векторов $X_{i,j}$ оказывается на единицу меньше, чем на предыдущем шаге. Таким способом можно получить абелеву подалгебру Ли, имеющую следующий базис: в случае, когда n четно, $n = 2k$, базис образуют векторы

$$\begin{array}{ccccccccc} X_{1,k+1}, & X_{1,k+2}, & \dots, & X_{1,2k-1}, & X_{1,2k}, & & & & \\ X_{2,k+1}, & X_{2,k+2}, & \dots, & X_{2,2k-1}, & X_{2,2k}, & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k-1,k+1}, & X_{k-1,k+2}, & \dots, & X_{k-1,2k-1}, & X_{k-1,2k}, & & & & \\ X_{k,k+1}, & X_{k,k+2}, & \dots, & X_{k,2k-1}, & X_{k,2k}, & & & & \end{array},$$

а в случае, когда n нечетно, $n = 2k + 1$, – векторы

$$\begin{array}{ccccccccc} X_{1,k+1}, & X_{1,k+2}, & \dots, & X_{1,2k}, & X_{1,2k+1}, & & & & \\ X_{2,k+1}, & X_{2,k+2}, & \dots, & X_{2,2k}, & X_{2,2k+1}, & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k-1,k+1}, & X_{k-1,k+2}, & \dots, & X_{k-1,2k}, & X_{k-1,2k+1}, & & & & \\ X_{k,k+1}, & X_{k,k+2}, & \dots, & X_{k,2k}, & X_{k,2k+1}, & & & & \end{array}.$$

Заметим, что в процессе этих итераций невозможно увеличить число базисных векторов в подалгебре, размерность которой равна

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} k^2, & \text{если } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \frac{(2k+1)^2 - 1}{4}, & \text{если } n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2)$$

Поэтому имеет смысл задать вопрос, совпадает ли $\mathcal{A}_n$ с максимальной абелевой размерностью алгебры $\mathfrak{g}_n$ при $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$? В этой связи мы выдвинули в работе [1] следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ максимальная абелева размерность $\mathcal{M}(\mathfrak{g}_n)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ равна $\mathcal{A}_n$.

Эта гипотеза была доказана в работе [1] для случаев $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ и $\mathfrak{g}_4$ с помощью следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Тогда абелева алгебра Ли размерности $d_n - 1$ не является подалгеброй Ли для алгебры $\mathfrak{g}_n$.

Теперь мы намерены обобщить рассуждения, использованные при доказательстве этого предложения, и тем самым доказать нашу гипотезу для произвольных $n \geq 2$.

Классическое ограничение на размерность абелевой подалгебры в матричной алгебре Ли $M_n(\mathbb{K})$ квадратных матриц размера $n \times n$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ было предложено Якобсоном [8]. Ранее Шур получил то же ограничение для поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ [9]. Результат Якобсона можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathfrak{a}$ – абелева подалгебра матричной алгебры $M_n(\mathbb{K})$ над произвольным полем $\mathbb{K}$. Тогда $\dim(\mathfrak{a}) \leq [n^2/4] + 1$, где через $[x]$ обозначена целая часть x . Более того, существует абелева подалгебра, размерность которой в точности равна $[n^2/4] + 1$.

Так как алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ представляют собой подалгебры $M_n(\mathbb{C})$, получим следующее ограничение, применяя теорему 2.1:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}_n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} k^2 + 1, & \text{если } n = 2k, \\ k^2 + k + 1, & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Мы намерены показать, что указанная оценка размерности не достигается на алгебрах Ли $\mathfrak{g}_n$. Причина этого состоит в том, что в силу нашей гипотезы допустимая размерность абелевой подалгебры в $\mathfrak{g}_n$ не превосходит $\mathcal{A}_n$, а потому не существует абелевых подалгебр размерности $[n^2/4] + 1$ в силу неравенства $[n^2/4] + 1 > \mathcal{A}_n$. Таким образом, оценку Якобсона для алгебр Ли $\mathfrak{g}_n$ удастся поправить на единицу.

3. ГЛАВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Пусть для фиксированной алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ каждая ее r -мерная (абелева) подалгебра ($r \leq d_n$) порождается базисом $\mathcal{B} = \{v_h\}_{h=1}^r$. Каждый вектор $v_h \in \mathcal{B}$ можно представить как линейную комбинацию векторов базиса $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ алгебры $\mathfrak{g}_n$, т.е. он имеет вид $v_h = \sum_{i,j} a_{i,j}^h X_{i,j}$ при $h = 1, \dots, r$. Таким образом, можно получить следующую матрицу, если разместить в h -й строке координаты вектора v_h относительно базиса $\{X_{i,j}\}_{i,j}$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,2}^1 & a_{1,3}^1 & \cdots & a_{1,n}^1 & a_{2,3}^1 & \cdots & a_{n-1,n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,2}^r & a_{1,3}^r & \cdots & a_{1,n}^r & a_{2,3}^r & \cdots & a_{n-1,n}^r \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом каждый столбец отвечает фиксированному вектору $X_{i,j}$. Так как ранг этой матрицы равен r , ее можно привести к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования столбцов и строк:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,d_n} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2,d_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{r,r} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,d_n} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что столбцы этой новой матрицы, вообще говоря, соответствуют вектору $X_{i,j}$, отличному от соответствующего вектора в матрице (3).

Таким образом, для подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_n$ можно без потери общности предположить, что каждому базису $\mathcal{B}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ соответствует матрица вида (4). Каждый базисный вектор в $\mathcal{B}$ отвечает строке этой матрицы и является линейной комбинацией векторов $X_{i,j}$ двух разных типов: векторов, отвечающих разрешающим элементам $b_{1,1}, \dots, b_{r,r}$ в матричном выражении (4) и остальных векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ и $\mathcal{B}$ – базис $\mathfrak{h}$. Будем называть *главной (векторной) компонентой* $\mathcal{B}$ относительно базиса $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ алгебры $\mathfrak{g}_n$ каждый из векторов $X_{i,j}$, отвечающих “ступенчатым” элементам в матричном выражении (4). Остальные векторы будем называть *неглавными (векторными) компонентами* $\mathcal{B}$.

Заметим, что каждый базис в r -мерной подалгебре Ли алгебры $\mathfrak{g}_n$ имеет r главных компонент и $d_n - r$ неглавных относительно базиса $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ компонент.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ АБЕЛЕВА РАЗМЕРНОСТЬ $\mathfrak{g}_n$

Вычислим теперь максимальную абелеву размерность $\mathfrak{g}_n$, а точнее, докажем гипотезу. Для этого необходимо показать, что не существует абелевой подалгебры Ли размерности выше, чем указанное в формулировке гипотезы значение $\mathcal{A}_n$ (2). Для этого мы запишем базисы в произвольной абелевой подалгебре с помощью их главных компонент, а затем найдем ненулевую скобку в коммутационном законе для такой подалгебры.

Мы используем итеративную процедуру, суть которой заключается в исследовании вопроса о невозможности построения $(d_n - r)$ -мерной абелевой подалгебры Ли в $\mathfrak{g}_n$ при $0 < r \leq d_n - \mathcal{A}_n - 1$. Заметим, что поскольку гипотеза уже была доказана при $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ и $\mathfrak{g}_4$ в [1], нам остается доказать ее лишь при $n \geq 5$.

Для абелевой подалгебры алгебры $\mathfrak{g}_n$ наше доказательство основано на подсчете числа главных компонент, отвечающих n -му столбцу в произвольном базисе $\mathcal{B}$ такой подалгебры. Таким образом, $\mathcal{B}$ выражается с использованием наибольшего числа главных компонент, отвечающих n -му столбцу. Далее доказано, что для тех базисных векторов из $\mathcal{B}$, главные компоненты которых лежат в $\mathfrak{g}_{n-1}$, их неглавные компоненты, лежащие в n -м столбце, имеют нулевые коэффициенты (в противном случае должно существовать другое выражение для $\mathcal{B}$ с большим числом главных компонент, отвечающих n -му столбцу).

4.1. $(d_n - 2)$ -Мерная абелева подалгебра Ли. В этом случае в $\mathcal{B}$ существуют лишь две неглавные компоненты. Следует рассмотреть три различных случая.

СЛУЧАЙ 1: две неглавные компоненты отвечают n -му столбцу. В этом случае каждый вектор $X_{i,j}$ в $\mathfrak{g}_{n-1}$ представляет собой главную компоненту, следовательно, алгебра $\mathfrak{g}_{n-1}$ должна быть абелевой. Это, очевидно, невозможно в силу (1).

СЛУЧАЙ 2: одна неглавная компонента отвечает n -му столбцу. Тогда существует единственная неглавная компонента, принадлежащая $\mathfrak{g}_{n-1}$, следовательно, в $\mathfrak{g}_{n-1}$ должна существовать $(d_{n-1} - 1)$ -мерная абелева подалгебра Ли. Но это также невозможно в силу предложения 2.1.

СЛУЧАЙ 3: ни одной неглавной компоненты не отвечает n -му столбцу. Теперь две неглавные компоненты лежат в $\mathfrak{g}_{n-1}$. Тем самым каждый вектор $X_{i,n}$, $i = 1, \dots, n - 1$, в частности $X_{n-1,n}$, представляет собой главную компоненту в $\mathcal{B}$. Поскольку имеется более двух векторов $X_{i,n-1}$, $i = 1, \dots, n - 2$, можно получить главную компоненту $X_{i_0,n-1}$ с максимально большим индексом i_0 из всех возможных.

Рассмотрим два базисных вектора в $\mathcal{B}$: один с главной компонентой $X_{i_0, n-1}$ и другой с главной компонентой $X_{n-1, n}$. Скобка между этими двумя базисными векторами должна быть ненулевой.

Рассматривая эти три случая, непосредственно получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Тогда абелева алгебра Ли размерности $d_n - 2$ не является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}_n$.

4.2. $(d_n - 3)$ -Мерная абелева подалгебра Ли. В этом случае в базисе $\mathcal{B}$ существуют три неглавные компоненты, и необходимо рассмотреть следующие четыре случая.

СЛУЧАЙ 1: три неглавные компоненты отвечают n -му столбцу. Из этого должно следовать существование d_{n-1} -мерной абелевой подалгебры Ли в алгебре $\mathfrak{g}_{n-1}$. Но это невозможно вследствие (1).

СЛУЧАЙ 2: две неглавные компоненты отвечают n -му столбцу. Тогда имеется единственная неглавная компонента, лежащая в $\mathfrak{g}_{n-1}$, и в $\mathfrak{g}_{n-1}$ необходимо найти $(d_{n-1} - 1)$ -мерную абелеву подалгебру Ли. Это однако также невозможно в соответствии с предложением 2.1.

СЛУЧАЙ 3: единственная неглавная компонента отвечает n -му столбцу. Теперь имеются только две неглавные компоненты, принадлежащие $\mathfrak{g}_{n-1}$, и нам необходимо найти $(d_{n-1} - 2)$ -мерную абелеву подалгебру Ли в $\mathfrak{g}_{n-1}$. Отметим, что все, кроме одного, векторы, отвечающие n -му столбцу $\mathfrak{g}_n$, представляют собой главные компоненты.

Рассмотрим следующую альтернативу.

- Если $X_{n-1, n}$ — главная компонента, то достаточно найти еще одну главную компоненту так, чтобы скобка между базисными векторами $\mathcal{B}$, отвечающими этим двум главным компонентам, была бы ненулевой. Ниже мы покажем, что можно найти эту главную компоненту, рассмотрев следующие два случая.

1. Если $X_{n-2, n-1}$ — главная компонента, то второй базисный вектор в $\mathcal{B}$ выбирается очевидным способом.

2. Если $X_{n-2, n-1}$ — неглавная компонента, то можно предположить, что она не входит в качестве слагаемого в те базисные векторы из $\mathcal{B}$, главные компоненты которых лежат в $\mathfrak{g}_{n-1}$ (в противном случае мы могли бы выбрать $X_{n-2, n-1}$ в качестве главной компоненты). Тогда в $\mathfrak{g}_{n-1}$ имеется всего лишь на одну больше неглавных компонент. Поскольку имеется всего лишь $n-2$ векторов вида $X_{i, n-1}$ и только два из них могут быть неглавными, существует главная компонента $X_{i_0, n-1}$ с максимально большим i_0 .

- Если $X_{n-1, n}$ — неглавная компонента, то имеется единственная неглавная компонента, отвечающая n -му столбцу. Вектор $X_{i, n}$ тем самым представляет собой главную компоненту при всех $i = 1, \dots, n-2$. Более того, можно предположить, что $X_{n-1, n}$ не входит ни в один из базисных векторов из $\mathcal{B}$ (в противном случае

можно было бы взять $X_{n-1,n}$ в качестве главной компоненты). Поэтому можно рассмотреть базисный вектор $\mathbf{v}$ из $\mathcal{B}$ с главной компонентой $X_{n-2,n}$.

При $n > 5$ существуют по крайней мере три вектора $X_{i,n-2}$, $i = 1, \dots, n-3$. Поэтому некоторые из этих векторов обязаны быть главными компонентами. Чтобы получить ненулевую скобку для элементов подалгебры, выберем базисный вектор $\mathbf{v}$ и базисный вектор с главной компонентой $X_{j_0,n-2}$ и с максимально большим j_0 .

При $n = 5$ в $(n-2)$ -м столбце имеются всего лишь два вектора, и оба этих вектора могут быть неглавными компонентами. В этом случае для того чтобы получить ненулевую скобку, возьмем главные компоненты $X_{2,5}$ и $X_{1,2}$.

СЛУЧАЙ 4: ни одной неглавной компоненты не отвечает n -му столбцу. В этом случае все неглавные компоненты принадлежат $\mathfrak{g}_{n-1}$, а векторы $X_{i,n}$ являются главными компонентами при $i = 1, \dots, n-1$.

Если $n > 5$, то число векторов $X_{i,n-1}$, $i = 1, \dots, n-2$, больше, чем 3. Тем самым существует такой индекс i_0 , что $X_{i_0,n-1}$ представляет собой главную компоненту. Выберем максимально большой i_0 из всех возможных и получим, что скобка между базисными векторами, отвечающими главным компонентам $X_{i_0,n-1}$ и $X_{n-1,n}$, отлична от нуля.

Если $n = 5$, то $(n-1)$ -му столбцу отвечают только три вектора, и все они могут быть неглавными компонентами. В этом случае можно выбрать главные компоненты $X_{3,5}$ и $X_{1,3}$, чтобы получить ненулевую скобку.

Из приведенных выше соображений следует предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Абелева алгебра Ли размерности $d_n - 3$ не может быть подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{g}_n$.

В качестве прямого следствия предложений 4.1 и 4.2 получим, что наша гипотеза выполнена при $n = 5$, поскольку $d_5 - 4 = 6$. Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При $n = 5$ максимальная абелева размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}_5$ равна $M(\mathfrak{g}_5) = 6$.

4.3. $(d_n - r)$ -Мерная абелева подалгебра Ли, $4 \leq r \leq d_n - \mathcal{A}_n - 1$. Для данной алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ последовательность размерностей $d_n - r$ возможных абелевых подалгебр Ли в $\mathfrak{g}_n$ оканчивается на величине, зависящей от n . В этой связи необходимо доказать две следующие технические леммы.

ЛЕММА 4.1. При $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ имеет место равенство $d_n - d_{n-1} = n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Базис $\{X_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n-1 \wedge i+1 \leq j \leq n\}$ алгебры $\mathfrak{g}_n$ содержит на $n-1$ векторов больше, чем базис $\{X_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n-2 \wedge i+1 \leq j \leq n-1\}$ алгебры $\mathfrak{g}_{n-1}$.

ЛЕММА 4.2. Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ имеем $\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1} = \lfloor n/2 \rfloor$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (2)

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} k^2, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ k^2 + k, & n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, и для четных, и для нечетных n имеет место равенство $\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1} = k$.

На этом этапе мы уже можем доказать, что не существует $(d_n - r)$ -мерной абелевой подалгебры Ли алгебры $\mathfrak{g}_n$ с $4 \leq r \leq d_n - \mathcal{A}_n - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $n \geq 2$. Размерность абелевой подалгебры Ли в алгебре $\mathfrak{g}_n$ равна $d_n - r$, где $d_n - \mathcal{A}_n \leq r \leq d_n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать утверждение только при $n \geq 6$. Доказательство основано на итеративной процедуре. Из предложений 2.1, 4.1 и 4.2 следует, что невозможно построить абелевы подалгебры Ли для алгебры $\mathfrak{g}_n$ с размерностями $d_n - 1$, $d_n - 2$ и $d_n - 3$, соответственно. Предположим теперь, что при $1 \leq s \leq r - 1$ ни одна абелева алгебра Ли размерности $d_n - s$ (напомним, что $s \leq d_n - \mathcal{A}_n$) не может быть получена в качестве подалгебры Ли алгебры $\mathfrak{g}_n$.

Отталкиваясь от этого предположения, докажем, что в $\mathfrak{g}_{n-1}$ не содержится ни одной $(d_n - r)$ -мерной абелевой подалгебры Ли. Рассмотрим следующие случаи.

СЛУЧАЙ 1: r неглавных компонент отвечают n -му столбцу. Тогда в $\mathfrak{g}_{n-1}$ следует взять d_{n-1} -мерную абелеву подалгебру Ли. Но это невозможно в силу (1).

СЛУЧАЙ 2: $r - 1$ неглавных компонент отвечают n -му столбцу. Тогда имеется одна неглавная компонента в $\mathfrak{g}_{n-1}$, и следует искать абелеву подалгебру Ли в $\mathfrak{g}_{n-1}$, размерность которой равна $d_{n-1} - 1$. Это снова невозможно в силу предложения 2.1.

СЛУЧАЙ 3: $r - k$ неглавных компонент отвечают n -му столбцу, $2 \leq k \leq \min\{r - 1, d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} - 1\}$. Теперь имеются k неглавных компонент в $\mathfrak{g}_{n-1}$, и в $\mathfrak{g}_{n-1}$ следует искать $(d_{n-1} - k)$ -мерную абелеву подалгебру Ли. Это однако противоречит предположению индукции.

СЛУЧАЙ 4: $r - k$ неглавных компонент отвечают n -му столбцу, $d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \leq k \leq r - 1$. Этот случай возможен, только если $d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} < r$. Тогда в $\mathfrak{g}_{n-1}$ имеются k неглавных компонент. Таким образом, $n - 1 - r + k$ главных компонент отвечают n -му столбцу в $\mathfrak{g}_n$. Необходимо доказать, что $n - 1 - r + k$ есть натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2 \leq n - 1 - r + k \leq n - 1$. Поскольку $d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \leq k \leq r - 1$ по предположению, имеет место неравенство

$$n - r + d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \leq n - r + k \leq n - r + r - 1 = n - 1.$$

Поскольку $4 \leq r \leq d_n - \mathcal{A}_n - 1$, имеем

$$n - d_n + \mathcal{A}_n + 1 + d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \leq n - r + d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1},$$

и, применяя леммы 4.1 и 4.2 к последнему неравенству, приходим к неравенству

$$n - r + d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \geq 2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

следовательно,

$$n - 1 - r + d_{n-1} - \mathcal{A}_{n-1} \geq 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 2.$$

Таким образом, число неглавных компонент, отвечающих n -му столбцу, сравнимо с числом векторов, отвечающих этому столбцу. Поэтому имеются по крайней мере $1 + \lfloor n/2 \rfloor$ главных компонент вида $X_{i,n}$ и не больше, чем $n - \lfloor n/2 \rfloor - 2$ неглавных компонент того же вида. Тем самым более половины векторов, отвечающих n -му столбцу, являются главными компонентами в $\mathcal{B}$.

Напомним в этом месте, как получить векторы вида $X_{i,n}$ как слагаемые в скобке двух базисных векторов из $\mathcal{B}$. С одной стороны, базисный вектор $\mathbf{v}$ из $\mathcal{B}$ с главной компонентой $X_{i,n}$ представляется как сумма этой главной компоненты и линейной комбинации неглавных компонент. С другой стороны, базисный вектор $\mathbf{w}$ из $\mathcal{B}$, главная компонента которого лежит в $\mathfrak{g}_{n-1}$, имеет нулевые коэффициенты при своих неглавных компонентах, отвечающих n -му столбцу (в противном случае один из этих векторов $X_{i,n}$ можно выбрать в качестве главного вектора для указанного базисного вектора). Таким образом, из скобки $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ получается слагаемое вида $X_{i,n}$, если умножить компоненту вида $X_{i,n}$ из $\mathbf{v}$ на другую компоненту из другого столбца матрицы $\mathbf{w}$.

Будем теперь искать скобку со слагаемым $X_{i,n}$, которая была бы отличной от нуля. Поскольку в $\mathfrak{g}_{n-1}$ имеются главные компоненты, можно выбрать базисный вектор $\mathbf{w} \in \mathcal{B}$ такой, что его главная компонента X_{j_0, h_0} , $1 \leq j_0 < h_0 < n$, принадлежит алгебре $\mathfrak{g}_{n-1}$. Кроме того, $\mathbf{w}$ таков, что коэффициент при каждой неглавной компоненте вида $X_{i,n}$ обращается в нуль. Вектор X_{j_0, h_0} можно при этом выбрать так, чтобы вектор $X_{h_0, n}$ тоже являлся бы главной компонентой базисного вектора $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$. Таким образом, вектор $X_{j_0, n}$ представляет собой слагаемое из скобки $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, которая отлична от нуля.

Следует тем не менее избегать следующей критической ситуации: существования другого отличного от нуля коэффициента для $X_{j_0, n}$ при умножении неглавной компоненты из $\mathbf{v}$, приходящей из n -го столбца, на неглавную компоненту из $\mathbf{w}$. Это может происходить только в менее чем половине столбцов в $\mathfrak{g}_n$, поскольку имеются $1 + \lfloor n/2 \rfloor$ главных компонент, отвечающих n -му столбцу. Выбирая j_0 максимально возможным, получим главную компоненту X_{j_0, h_0} , которая свободна от этой трудности.

СЛУЧАЙ 5: ни одна неглавная компонента не отвечает n -му столбцу. Каждая неглавная компонента принадлежит $\mathfrak{g}_{n-1}$, а вектор $X_{i,n}$ представляет собой главную компоненту при $1 \leq i \leq n-1$. Следовательно, существует главная компонента X_{i_0, j_0} , лежащая в $\mathfrak{g}_{n-1}$. Выбирая i_0 максимально возможным, получим ненулевую скобку между базисными векторами в $\mathcal{B}$ и главными компонентами X_{i_0, j_0} и $X_{j_0, n}$.

С помощью предложения 4.3 можно вычислить максимальную размерность абелевых подалгебр Ли в $\mathfrak{g}_n$. Таким образом, мы доказываем нашу гипотезу как прямое следствие этого предложения: имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Максимальная абелева размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ имеет вид

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}_n) = \mathcal{A}_n = \begin{cases} k^2, & \text{если } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ k^2 + k, & \text{если } n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Список литературы

- [1] J. C. Benjumea, F. J. Echarte, J. Núñez, A. F. Tenorio, *Extracta Math.*, **19:2** (2004), 269–277.
- [2] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Grad. Texts in Math., **102**, Springer, New York, 1984.
- [3] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications*, Lecture Notes in Phys., **708**, Springer, Berlin, 2006.
- [4] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [5] C. Cadeau, E. Woolgar, *Class. Quantum Grav.*, **18** (2001), 527–542.
- [6] S. Hervik, *J. Geom. Phys.*, **52** (2004), 298–312.
- [7] M. Boyarchenko, S. Levendorskii, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **102** (2005), 5663–5668.
- [8] N. Jacobson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 431–436.
- [9] I. Schur, *J. Reine Angew. Math.*, **130** (1905), 66–76.

Поступила в редакцию 4.01.2007