Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Об N -солитонных струнах в четырех-
мерном пространстве-времени, *ТМФ*, 2007, том 152, но-
мер 3, 430–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:05:18

© 2007 г.

С. В. Талалов*

ОБ N -СОЛИТОННЫХ СТРУНАХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Выполнено теоретико-множественное исследование бесконечных релятивистских струн в пространстве Минковского $E_{1,3}$. Показано, что множество таких струн однозначно параметризуется элементами группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, группы $\mathcal{D}$ масштабных преобразований пространства Минковского, некоторой подгруппы W_0 группы вейлевских преобразований 2-метрики, а также элементами множества данных рассеяния пары спектральных задач первого порядка, характерных для теории нелинейного уравнения Шредингера. Коэффициенты спектральных задач связаны со вторыми квадратичными формами мирового листа. В данном контексте дается определение N -солитонных струн. Обсуждается возникающая при таком рассмотрении иерархия поверхностей, соответствующая известной иерархии нелинейного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: релятивистские струны, локально-минимальные поверхности, иерархия нелинейного уравнения Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются мировые листы бесконечных четырехмерных релятивистских струн – времениподобные (почти всюду) поверхности в псевдоевклидовом пространстве $E_{1,3}$, имеющие нулевую среднюю кривизну. Такие объекты возникают, например, в теории космических струн [1]. В развиваемой здесь теории мировые листы могут быть рассмотрены также как естественное обобщение плоского двумерного пространства-времени $E_{1,1}$, что, по-видимому, представляет интерес в связи с развитием идей о “мире на бране” [2]. Ранее автором было установлено [3], [4], что в произвольной конформно плоской параметризации на мировом листе указанного типа можно ввести $SL(2, \mathbb{C})$ -значное поле $K(\xi^0, \xi^1)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\partial_+(K^{-1}\partial_-K) = 0, \quad (1)$$

где $\partial_{\pm}$ – производные по конусным координатам $\xi_{\pm} = \xi^1 \pm \xi^0$. Способ введения поля $K(\xi^0, \xi^1)$ инвариантен относительно действия группы $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ и в общих чертах заключается в следующем. Исходя из того или иного струнного действия мы стандартным

*Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия.
E-mail: svtalalov@tlttsu.ru

образом приходим к масштабнo-инвариантной теории, содержащей мировые листы $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ с конформно плоской параметризацией (см., например, [5]). Рассмотрим пару светоподобных векторов

$$\mathbf{e}_\pm(\xi^0, \xi^1) = \pm \frac{1}{p} \partial_\pm \mathbf{X}(\xi_\pm) = \pm \frac{1}{p} \partial_\pm X_\mu(\xi^0, \xi^1) \mathbf{b}^\mu,$$

где p – произвольная константа, а векторы $\mathbf{b}^\mu$ суть орты постоянного базиса ($\mathbf{b}^\mu \mathbf{b}^\nu = g^{\mu\nu}$). Очевидно, каждый из векторов $\mathbf{e}_\pm$ может быть построен до ортонормированного базиса $\mathbf{e}_{\mu+}$ (или, соответственно, $\mathbf{e}_{\mu-}$) пространства $E_{1,3}$ так, что, во-первых, будут справедливы равенства

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{0\pm} \mp \mathbf{e}_{3\pm}) \quad (2)$$

и, во-вторых, вектор-матрицы

$$\hat{\mathbf{E}}_\pm = \mathbf{e}_{0\pm} \mathbf{1}_2 - \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_{i\pm} \sigma_i$$

будут удовлетворять уравнениям $\partial_\mp \hat{\mathbf{E}}_\pm = 0$. Будем считать такое построение выполненным. Поскольку при построении каждого базиса $\mathbf{e}_{\mu\pm}$ в точке пространства $E_{1,3}$ имеется трехпараметрический произвол, то каждая из вектор-матриц $\hat{\mathbf{E}}_\pm$ определена с точностью до трех произвольных функций. Упомянутое выше поле $K(\xi^0, \xi^1)$ определяется формулой

$$\hat{\mathbf{E}}_+ = K \hat{\mathbf{E}}_- K^+. \quad (3)$$

Заметим, что уравнение (1) представляет собой частный случай общего уравнения модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена [6], [7]. Далее, записывая для матрицы $K(\xi^0, \xi^1)$ разложение Гаусса

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

однозначно определяем комплекснозначные функции $\varphi = \varphi(\xi^0, \xi^1)$ и $\alpha_\pm = \alpha_\pm(\xi^0, \xi^1)$. Данные функции являются, вообще говоря, сингулярными: разложение Гаусса не определено там, где главный минор $e^{-\varphi/2}$ матрицы K обращается в нуль. Уравнение (1) совместно с разложением (4) приводит к системе уравнений второго порядка для полей φ и $\alpha_\pm$. Определим функции $\rho_\pm = (\partial_\pm \alpha_\mp) e^{-\varphi}$. Они позволяют заменить в задаче Коши для указанной системы второго порядка набор начальных (роль “времени” играет параметр ξ^0) данных $(\varphi, \dot{\varphi}, \alpha_\pm, \dot{\alpha}_\pm)$ на набор начальных данных $(\varphi, \dot{\varphi}, \alpha_\pm, \rho_\pm)$ и рассматривать далее функции $\rho_\pm$ как динамические переменные. В итоге получаем следующую систему дифференциальных уравнений¹⁾:

$$\partial_+ \partial_- \varphi = 2\rho_+ \rho_- e^\varphi, \quad (5a)$$

$$\partial_\pm \rho_\mp = 0, \quad (5б)$$

$$\partial_\pm \alpha_\mp = \rho_\pm e^\varphi. \quad (5в)$$

¹⁾Данные уравнения (в вещественном случае) были использованы впервые для построения системы взаимодействующих скалярного и спинорного полей в двумерном пространстве-времени [8], [9].

Введение в данной работе комплексных функций φ , $\rho_{\pm}$ представляется естественным с дифференциально-геометрической точки зрения. Это следует из явных выражений для первой $\mathbf{I}$ и пары вторых $\mathbf{II}_i$, $i = 1, 2$, квадратичных форм мирового листа:

$$\mathbf{I} = -\frac{p^2}{2} e^{-\operatorname{Re} \varphi} d\xi_+ d\xi_-, \quad (6)$$

$$\mathbf{II}_1 + i\mathbf{II}_2 = p(|\rho_+| e^{i[\beta+\chi]} d\xi_+^2 - |\rho_-| e^{i[\beta-\chi]} d\xi_-^2), \quad (7)$$

где $\chi \equiv (\operatorname{Im} \varphi + \arg \rho_+ + \arg \rho_-)/2$, производные данной величины определяют вектор кручения. Наличие произвольного множителя $e^{i\beta}$ связано с тем, что необходимый для построения форм $\mathbf{II}_i$ базис векторов определен с точностью до вращений. Отметим, что уравнения (5а) и (5б) выводились в [5] из системы уравнений Гаусса и Петерсона–Кодацци.

Если обе функции $|\rho_{\pm}|$ не обращаются в нуль, то равенство (5а) может быть легко сведено к известному уравнению Лиувилля

$$\partial_i \partial^i \varphi(\xi^0, \xi^1) + 2e^{\varphi(\xi^0, \xi^1)} = 0 \quad (8)$$

конформной заменой конусных переменных

$$\xi_{\pm} \longrightarrow \tilde{\xi}_{\pm} = A_{\pm}(\xi_{\pm}), \quad A' \neq 0, \quad (9)$$

и сдвигом $\varphi \rightarrow \varphi - i(\arg \rho_+ + \arg \rho_-)$. В данной работе мы не налагаем ограничений $|\rho_{\pm}(\xi)| \neq 0$ на функции $\rho_{\pm}(\xi)$, считая их динамическими переменными. При этом необходимо заметить, что равенства $\rho_{\pm}(\xi) = 0$ могут иметь место не только в точках, но и на множествах ненулевой меры. С точки зрения соотнесения развиваемой теории и известного геометрического подхода в теории струн [5] (см. также [10]) это означает рассмотрение класса мировых листов, более широкого, чем обычно. Действительно, множество локально-минимальных поверхностей, для которых вторые квадратичные формы (7) удовлетворяют условию $\rho_{\pm}(\xi) \neq 0$, не является максимально общим. Так, это множество не содержит простейших локально-минимальных поверхностей – времениподобных плоскостей; более сложный пример – это поверхности такие, что $\rho_{\pm} \equiv 0$ при $\xi_+ \in [a_+, b_+]$, $\xi_- \in [a_-, b_-]$, причем в других точках $\rho_{\pm} \neq 0$ ²⁾. В этом случае никаким преобразованием (9) коэффициенты $|\rho_{\pm}(\xi)|$ нельзя сделать постоянными всюду, поскольку данные преобразования могут менять лишь границы отрезков $[a_+, b_+]$ и $[a_-, b_-]$, но не сам факт обращения величин $|\rho_{\pm}(\xi)|$ в нуль. Таким образом, уравнения (5) в указанном классе функций $\rho_{\pm}(\xi)$ позволяют рассматривать с единой точки зрения стандартные ($\rho_{\pm}(\xi) \neq 0$), плоские ($E_{1,1}$), а также локально плоские мировые листы.

Система (5) имеет широкую группу инвариантности $\mathcal{G}$. Действительно, пусть функции $\varphi(\xi_+, \xi_-)$, $\rho_{\pm}(\xi_{\pm})$ и $\alpha_{\pm}(\xi_+, \xi_-)$ удовлетворяют системе (5), дифференцируемые комплексные функции $f_{\pm}(\xi)$ и $g_{\pm}(\xi)$ произвольны, а вещественные функции

²⁾Заметим, что этот пример имеет смысл только для поверхностей с псевдоевклидовой метрикой, которые мы здесь и рассматриваем. На поверхностях в евклидовом пространстве можно обычным образом ввести комплексные координаты и рассматривать комплексно-аналитические (антианалитические) функции $\rho_{\pm}$, допускающие лишь изолированные нули.

$A_{\pm}(\xi)$ удовлетворяют условию $A'_{-}A'_{+} \neq 0$. Тогда преобразование

$$(\varphi, \rho_{\pm}, \alpha_{\pm}) \longrightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}_{\pm}, \tilde{\alpha}_{\pm}), \quad (10)$$

такое что

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi_{+}, \xi_{-}) &= \varphi(A_{+}(\xi_{+}), A_{-}(\xi_{-})) + f_{+}(\xi_{+}) + f_{-}(\xi_{-}), \\ \tilde{\rho}_{\pm}(\xi_{\pm}) &= \rho(A_{\pm}(\xi_{\pm}))A'_{\pm}(\xi_{\pm})e^{-f_{\pm}(\xi_{\pm})}, \\ \tilde{\alpha}_{\pm}(\xi_{+}, \xi_{-}) &= \alpha_{\pm}(A_{+}(\xi_{+}), A_{-}(\xi_{-}))e^{f_{\pm}(\xi_{\pm})} + g_{\pm}(\xi_{\pm}), \end{aligned}$$

вновь дает решение рассматриваемой системы. С дифференциально-геометрической точки зрения множество функций $\{\varphi, \alpha_{\pm}, \rho_{\pm}\}$, используемое для описания мировых листов, имеет некоторую “избыточность”. Данная “избыточность”, возникшая изначально как следствие произвола в построении вектор-матриц $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$, далее будет устранена факторизацией множества функций $\{\varphi, \alpha_{\pm}, \rho_{\pm}\}$ по некоторой подгруппе группы (10).

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим пару линейных задач первого порядка

$$T'_{\pm}(\xi) + Q_{\pm}(\xi)T_{\pm}(\xi) = 0, \quad (11)$$

в которых матрицы коэффициентов суть

$$Q_{-}(\xi^0, \xi^1) = K^{-1}\partial_{-}K, \quad Q_{+}(\xi^0, \xi^1) = -(\partial_{+}K)K^{-1}, \quad (12)$$

а $T_{\pm}(\xi)$ – матрицы решений. Как следствие уравнения (1) для “токов” $Q_{\pm}(\xi^0, \xi^1)$ имеем уравнения $\partial_{\pm}Q_{\mp} = 0$, так что у систем (11) существуют решения вида $T_{\pm}(\xi^0, \xi^1) \equiv T_{\pm}(\xi_{\pm})$. Поле $K(\xi^0, \xi^1)$ представимо через матрицы $T_{\pm}(\xi)$ следующим образом:

$$K(\xi^0, \xi^1) \equiv T_{+}(\xi_{+})T_{-}^{-1}(\xi_{-}). \quad (13)$$

Важными для дальнейшего являются равенства

$$Q_{12+} = -\rho_{+}, \quad Q_{21-} = -\rho_{-}, \quad (14)$$

устанавливающие явную связь элементов $Q_{ij\pm}$ с коэффициентами второй квадратичной формы (7).

Исходный мировой лист $\mathbf{X}(\xi^0, \xi^1)$ восстанавливается по коэффициентам $Q_{ij\pm}$ с точностью до группы движений $\mathcal{P}$ и масштабных преобразований пространства $E_{1,3}$. Действительно, в силу сделанных построений справедливо представление

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = T_{\pm}(\xi_{\pm})\hat{\mathbf{E}}_0T_{\pm}^{+}(\xi_{\pm}),$$

где $\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{b}_0\mathbf{1}_2 - \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i\boldsymbol{\sigma}_i$ – постоянная матрица. Отсюда, используя (2), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm} &= \frac{1}{2}(|t_{i1\pm}|^2 + |t_{i2\pm}|^2)\mathbf{b}_0 - \text{Re}(t_{i1\pm}\bar{t}_{i2\pm})\mathbf{b}_1 - \\ &\quad - \text{Im}(t_{i1\pm}\bar{t}_{i2\pm})\mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}(|t_{i1\pm}|^2 - |t_{i2\pm}|^2)\mathbf{b}_3, \quad i = \frac{3 \mp 1}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $t_{ij\pm}$ суть матричные элементы введенных матриц $T_{\pm}$. В итоге получаем

$$\mathbf{X}(\xi^0, \xi^1) = p \int_0^{\xi^1} [\mathbf{e}_+(\xi^0, \xi) - \mathbf{e}_-(\xi^0, \xi)] d\xi. \quad (16)$$

Пусть далее $\mathcal{G}_0$ означает подгруппу группы (10), выделенную условиями $A_{\pm}(\xi_{\pm}) \equiv \xi_{\pm}$. Исследуем ее более подробно. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для каждой конфигурации поля $K(\xi^0, \xi^1)$ существуют и единственны функции $g_{\pm}(\xi)$, вещественные функции $f_{\pm}(\xi)$ такие, что после выполнения преобразований (10) справедливо $K(\xi^0, \xi^1) \in SU(2)$ при всех ξ^0, ξ^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу определения функций φ и $\alpha_{\pm}$ матрица $K(\xi^0, \xi^1)$ изменяется при преобразованиях (10) следующим образом:

$$K \rightarrow \tilde{K} = G_+^{-1} K G_-,$$

$$G_+ = \begin{pmatrix} e^{f_+/2} & 0 \\ g_+ e^{-f_+/2} & e^{-f_+/2} \end{pmatrix}, \quad G_- = \begin{pmatrix} e^{-f_-/2} & g_- e^{-f_-/2} \\ 0 & e^{f_-/2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку справедливо представление (13), то при преобразованиях (10) имеем

$$T_{\pm} \longrightarrow \tilde{T}_{\pm} = G_{\pm}^{-1} T_{\pm}.$$

Пусть $T_{\pm} = \mathcal{E}_{\pm} \mathcal{N}_{\pm} \mathcal{U}_{\pm}$ – разложения Ивасава для матриц $T_{\pm}$. Здесь матрицы $\mathcal{U}_{\pm} \in SU(2)$, $\mathcal{E}_{\pm}$ – диагональные матрицы с положительными элементами, а $\mathcal{N}_+$ ($\mathcal{N}_-$) – нижнетреугольные (верхнетреугольные) матрицы с единицами на главной диагонали. Заметим, если мы фиксировали вид матриц $\mathcal{N}_{\pm}$, такие разложения единственны. Выберем

$$f_{\pm} = \mp 2 \ln(\mathcal{E}_{\pm})_{11}, \quad g_+ = -(\mathcal{N}_+)_{21}, \quad g_- = (\mathcal{N}_-)_{12}.$$

При этом, очевидно, получаем $K(\xi^0, \xi^1) \in SU(2)$ при всех ξ^0, ξ^1 , так что предложение доказано.

Таким образом, преобразованиями, рассмотренными в формулировке предложения 1, матрицы $Q_{\pm}$ могут быть приведены к виду

$$Q_{\pm}(\xi) = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 j_{k\pm}(\xi) \sigma_k, \quad (17)$$

где $j_{k\pm}(\xi)$ – вещественные функции. Оставшиеся возможные (т.е. не упомянутые в предложении 1) элементы группы $\mathcal{G}_0$ – это преобразования (10) с $g_{\pm}(\xi) \equiv 0$ и чисто мнимыми функциями $f_{\pm}$. Легко убедиться, что с помощью таких преобразований всегда можно сделать так, чтобы для матриц $Q_{\pm}$ выполнялось $j_{3\pm}(\xi) \equiv 0$.

Далее мы объявим эквивалентными конфигурации полей $\{\varphi, \alpha_{\pm}, \rho_{\pm}\}$, которые связаны преобразованиями группы $\mathcal{G}_0$. С дифференциально-геометрической точки зрения это представляется вполне естественным. Так, группа $\mathcal{G}_0$ содержит элементы

$$(a) \quad \alpha_{\pm} \rightarrow \alpha_{\pm} + g_{\pm}, \quad (б) \quad \varphi \rightarrow \varphi + i(w_+ + w_-), \quad (в) \quad \varphi \rightarrow \varphi + f_+ + f_-,$$

где $g_{\pm}$ – произвольные комплексные, а $w_{\pm}$ и $f_{\pm}$ – произвольные вещественные функции (в формулах (б) и (в) мы опускаем для краткости соответствующие преобразования функций $\alpha_{\pm}$). Используя, как и при доказательстве предложения 1, разложения Ивасава для матриц $T_{\pm}$, а также явное представление (15) для проективных касательных векторов $\mathbf{e}_{\pm}$, несложно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Преобразования (а) и (б) оставляют инвариантными касательные векторы $\mathbf{e}_{\pm}$; преобразования (в) индуцируют вейлевское преобразование 2-метрики мирового листа – первой квадратичной формы (6):*

$$\mathbf{I} \longrightarrow \tilde{\mathbf{I}} = e^f \mathbf{I}, \quad \partial_i \partial^i f = 0. \quad (18)$$

Таким образом, преобразования (а) и (б) вообще не затрагивают мировых листов (напомним, что такая “избыточность” системы функций φ , $\alpha_{\pm}$, $\rho_{\pm}$ является следствием произвола в определении вектор-матриц $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$). Поэтому на рассматриваемых поверхностях в пространстве $E_{1,3}$ группа $\mathcal{G}_0$ действует как группа $\mathcal{W}_0$ преобразований (18).

Далее мы рассматриваем множество мировых листов $\mathcal{X}$, факторизованное по группе $\mathfrak{G} = \mathcal{P} \times \mathcal{D} \times \mathcal{W}_0$. Отметим, что в каждой орбите данной группы всегда имеются мировые листы с параметризацией $X^0(\xi^0, \xi^1) \equiv p\xi^0 + c$. В этом легко убедиться, полагая в формуле (15) $T_{\pm} \in SU(2)$. Множество таких листов внутри каждой орбиты изоморфно группе движений пространства E_3 .

Введенные функции $Q_{\pm}$ – коэффициенты вспомогательных линейных систем (11) – мы будем описывать в терминах данных рассеяния, так что уравнения (11) мы рассматриваем как частный случай пары спектральных задач

$$T'_{\pm}(\xi; \lambda) + Q_{\pm}(\xi)T_{\pm}(\xi; \lambda) = i\lambda\sigma_3 T_{\pm}(\xi; \lambda) \quad (19)$$

при $\lambda = 0$. Как следует из сказанного выше (см. (14) и (17)), для описания классов смежности $\mathcal{X} \backslash \mathfrak{G}$ достаточно полагать, что $Q_{\pm} = -\rho_{\pm}\sigma_{\pm} + \bar{\rho}_{\pm}\sigma_{\mp}$. Спектральные задачи вида (19) с такими коэффициентами подробно исследованы в [11] в связи с теорией нелинейного уравнения Шредингера. В частности, построено взаимно однозначное отображение множества “потенциалов” (коэффициентов соответствующей спектральной задачи) и множества данных рассеяния. Для того чтобы в нашем случае вводить необходимые при использовании метода обратной задачи величины, потребуем от функций $|\rho_{\pm}(\xi)|$ убывания при $|\xi| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени ξ^{-1} . Такое требование частично ограничивает конформный произвол (9), который, напомним, пока никак не фиксировался. Заметим, что убывание функций $|\rho_{\pm}(\xi)|$ на бесконечностях представляется вполне естественным с геометрической точки зрения. Дополненное условиями $\varphi \rightarrow \text{const}$ при $\xi^1 \rightarrow \pm\infty$, оно означает рассмотрение только асимптотически плоских мировых листов.

Пусть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_+ \cup \mathfrak{S}_-$ – множество данных рассеяния задач (19). Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место взаимно однозначное соответствие $\mathcal{X} \backslash \mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{S}$.*

3. N -СОЛИТОННЫЕ СТРУНЫ. ПРИМЕРЫ И ОБОБЩЕНИЯ

Итак, чтобы восстановить мировой лист струны, выбранный представителем в построенных смежных классах, нам необходимо рассмотреть пару линейных систем (19) при $\lambda = 0$ с матрицами решений $T_{\pm}(\xi^0, \xi^1; 0) \in SU(2)$.

Далее там, где это не приведет к недоразумениям, мы не будем выписывать маркирующие спектральные задачи (19) нижние индексы $\pm$; зависимость от “времени” ξ^0 также по возможности будет опускаться. Пусть $T^{[\pm]}(\xi^0, \xi^1; \lambda)$ – матрицы решений систем (19), фиксированные асимптотическим условием

$$T^{[\pm]}(\xi^0, \xi^1; \lambda) \xrightarrow{\xi^1 \rightarrow \pm\infty} E(i\lambda\xi^1), \quad E(\xi) \equiv \begin{pmatrix} e^{\xi} & 0 \\ 0 & e^{-\xi} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Такие решения существуют в силу сделанного выше предположения о поведении функций $\rho(\xi^1, \xi^0)$ на бесконечностях. Определим матрицы монодромии $\mathfrak{M}(\lambda)$ следующим образом:

$$T^{[+]}(\xi; \lambda) = T^{[-]}(\xi; \lambda)\mathfrak{M}(\lambda). \quad (21)$$

В силу свойств матрицы $Q(\xi) - i\lambda\sigma_3$ имеем $\det T = \det \mathfrak{M} = 1$. Каждая матрица монодромии имеет следующую структуру [11]:

$$\mathfrak{M}_{\pm}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{\pm}(\lambda) & \mathfrak{b}_{\pm}(\lambda) \\ -\bar{\mathfrak{b}}_{\pm}(\lambda) & \bar{\mathfrak{a}}_{\pm}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Для построения мирового листа нам необходимы матрицы решений $T_{\pm}$ с динамикой $T_{\pm}(\xi^0, \xi^1) = T_{\pm}(\xi_{\pm})$. Заметим, что

$$T^{[\pm]}(\xi^0, \xi^1; \lambda) = T^{[\pm]}(0, \xi_{\pm}; \lambda)E(\mp i\lambda\xi^0),$$

так что в формулах (15) и (16), требующих решений $T_{\pm}$ при $\lambda = 0$, можно считать, например,

$$T_{\pm}(\xi_{\pm}) = T_{\pm}(\xi^0, \xi^1) \equiv T_{\pm}^{[-]}(\xi^0, \xi^1; 0).$$

При этом формулы (15) и (16) удобно объединить в матричном виде, полагая

$$\hat{X} = X_0 \mathbf{1}_2 - \sum_{i=1}^3 X_i \sigma_i.$$

В итоге имеем

$$\hat{X} = \frac{p}{2} \int_0^{\xi^1} [(T_+(\xi^0, \xi))^+ \sigma_3 T_+(\xi^0, \xi) + (T_-(\xi^0, \xi))^+ \sigma_3 T_-(\xi^0, \xi)] d\xi. \quad (22)$$

Напомним, данные рассеяния для каждой из задач (19) – это нули a_n функций $\mathfrak{a}(\lambda)$, константы c_n , определяемые соотношением $T_{11}^{[+]}(\xi; a_n) = c_n T_{12}^{[-]}(\xi; a_n)$ (дискретный спектр), а также функции $\mathfrak{b}_{\pm}(\lambda)$ (непрерывный спектр).

Рассмотрим струны, для которых $\mathfrak{b}_{\pm}(\lambda) \equiv 0$. Хорошо известно [11], что в этом случае как функции $\rho_{\pm}$ – коэффициенты спектральных задач (19), так и соответствующие матрицы решений $t_{ij\pm}(\xi)$ могут быть восстановлены явно по дискретному

Рис. 1. Двухсолитонная струна.

спектру $a_n, c_n, n = 1, 2, \dots, N$. Используя терминологию метода обратной задачи, такие струны (и, соответственно, поверхности) естественно назвать N -солитонными. Пусть, например, в обеих спектральных задачах $N = 0$ (дискретный спектр отсутствует). В этом случае матрицы решений $T^{[\pm]}$ единичные. Касательные векторы $\mathbf{e}_{\pm} = (\mathbf{b}_0 \mp \mathbf{b}_3)/2$, соответственно, постоянны, так что отвечающие данному случаю мировые листы – это времениподобные плоскости.

Пусть теперь $N = 1, a_1 = \omega + i\kappa$. Процедура восстановления приводит к формулам

$$t_{11}^{[-]}(\xi) = \frac{e^{4i(\omega+i\kappa)\xi} - |c|^2}{e^{4i(\omega+i\kappa)\xi} + |c|^2}, \quad t_{12}^{[-]}(\xi) = -\frac{2ce^{2i(\omega+i\kappa)\xi}}{e^{4i(\omega+i\kappa)\xi} + |c|^2}.$$

Подробности восстановления, выполненного в соответствии с правилами метода обратной задачи [12], аналогичны приведенным в работе [13]. Воспользовавшись далее формулой (22), мы можем явно восстановить мировой лист струны, для которой $N_+ = N_- = 1$. Графически наглядно это можно сделать только для случая динамики плоской кривой (трехмерная струна), что отвечает чисто мнимым нулям a_1 . Результат представлен на рис. 1 для кривой ($\xi^0 = \text{const}$) и на рис. 2 для мирового листа. Как видно, мировой лист в этом случае – это достаточно сложная поверхность, имеющая самопересечения и линии особенностей типа каспа. Существование таких особенностей отмечалось и ранее (см., например, [14]) в другом подходе. В нашем случае линии определяются равенством $e^{-\varphi(\xi^0, \xi^1)/2} = 0$, естественно возникающим при определении поля $\varphi(\xi^0, \xi^1)$ разложением Гаусса.

Динамика коэффициентов спектральных задач (19) определяется уравнениями $\partial_{\pm} Q_{\mp} = 0$. Используя стандартные методы (см. [11]), находим

$$\mathfrak{M}_{\pm}(\xi^0; \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\pm}(\lambda) & \mathbf{b}_{\pm}(\lambda)e^{\pm 2i\lambda^n \xi^0} \\ -\bar{\mathbf{b}}_{\pm}(\lambda)e^{\mp 2i\lambda^n \xi^0} & \bar{\mathbf{a}}_{\pm}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

причем в нашем случае $n = 1$. Для констант $c_{k\pm}$ получаем

$$c_{k\pm}(\xi^0) = c_{k\pm} e^{\mp 2i(a_{k\pm})^n \xi^0}.$$

Рис. 2. Фрагмент мирового листа в случае $N_{\pm} = 1$.

При произвольном $n = 0, 1, 2, \dots$ такая динамика отвечает ξ^0 -зависимости функций ρ , описываемой соответствующим уравнением из иерархии нелинейного уравнения Шредингера [11], [15]; собственно нелинейному уравнению Шредингера отвечает случай $n = 2$. Напомним, что исходной точкой наших исследований, приведших к зависимости (23) при $n = 1$, являлись бесконечные локально-минимальные поверхности. Представляет интерес исследование такого вопроса: какие поверхности соответствуют (23) при $n \neq 1$, каковы их физические и дифференциально-геометрические приложения? Функции $\rho_{\pm}$ и $\bar{\rho}_{\pm}$ в случае произвольного n удовлетворяют уравнениям

$$\mp \frac{\partial \rho_{\pm}}{\partial \xi^0} = -i \frac{\delta I_{n+1}^{\pm}}{\delta \bar{\rho}_{\pm}}, \quad \mp \frac{\partial \bar{\rho}_{\pm}}{\partial \xi^0} = i \frac{\delta I_{n+1}^{\pm}}{\delta \rho_{\pm}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где I_m , $m = 1, 2, \dots$, – серия полиномиальных интегралов движения для нелинейного уравнения Шредингера [11]. Верхний индекс $\pm$ указывает на то, для какой динамической переменной, ρ_+ или ρ_- , записан тот или иной интеграл. Так, в простейшем случае $n = 0$ имеем

$$I_1^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{\pm}|^2 d\xi$$

и динамика в соответствии с (24) является просто фазовым сдвигом:

$$\rho_{\pm}(\xi^0, \xi^1) = e^{\pm i \xi^0} \rho_{\pm}(\xi^1).$$

Это приводит к следующей зависимости решений $T_{\pm}^{[-]}(\xi^0, \xi^1)$ от переменной ξ^0 :

$$T_{\pm}^{[-]}(\xi^0, \xi^1; 0) = E\left(\frac{i \xi^0}{2}\right) T_{\pm}^{[-]}(0, \xi^1; 0) E\left(-\frac{i \xi^0}{2}\right).$$

Формула (22) может быть обобщена на случай $n \neq 1$ различным образом. Так, например, можно полагать, что

$$T_{\pm}(\xi^0, \xi^1) \equiv T_{\pm}^{[-]}(\xi^0, \xi^1; \lambda) E \left(\frac{i\lambda^n \xi^0}{2} \right) \Big|_{\lambda=0}.$$

Для такого обобщения мы находим, что при $n = 0$ искомые поверхности – это мировые листы бесконечных стационарных кривых. При $n \geq 2$ соответствующие поверхности также могут быть построены по формуле (22), в которой зависимость матриц решений $T(\xi^0, \xi^1)$ от переменной ξ^0 соответствует динамике (24) при данном n . Автор предполагает исследовать такие поверхности в дальнейшем.

Список литературы

- [1] M. R. Anderson, *The Mathematical Theory of Cosmic Strings. Cosmic Strings in the Wire Approximation*, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP Publ., Bristol, 2003.
- [2] В. А. Рубаков, *УФН*, **171**:9 (2001), 913.
- [3] С. В. Талалов, *ТМФ*, **123**:1 (2000), 38.
- [4] S. V. Talalov, *J. Phys. A*, **22** (1989), 2275.
- [5] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *Модель релятивистской струны в физике адронов*, Энергоатомиздат, М., 1987.
- [6] С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **260**:1 (1981), 31.
- [7] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **92** (1984), 455.
- [8] А. К. Погребков, С. В. Талалов, *ТМФ*, **70**:3 (1987), 342.
- [9] А. К. Погребков, *ТМФ*, **12**:2 (1972), 209.
- [10] Г. П. Пронько, А. В. Разумов, Л. Д. Соловьев, *ЭЧАЯ*, **14**:3 (1983), 558.
- [11] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [12] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [13] С. В. Талалов, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 357.
- [14] С. В. Клименко, И. Н. Никитин, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 380.
- [15] П. П. Кулиш, А. Г. Рейман, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **77** (1978), 134.

Поступила в редакцию 30.11.2006