Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, О переменных Дарбу–Нийенхейса
для открытых обобщенных цепочек Тоды, *ТМФ*, 2007,
том 152, номер 3, 440–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:27:14

© 2007 г.

А. В. Цыганов*

О ПЕРЕМЕННЫХ ДАРБУ–НИЙЕНХЕЙСА ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Возможность применения метода Склянина для построения переменных Дарбу–Нийенхейса специального вида рассмотрена на примере обобщенных открытых цепочек Тоды, связанных с классическими корневыми системами.

Ключевые слова: интегрируемые системы, бигамильтоновы многообразия, разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть гладкое бигамильтоново многообразие M снабжено парой бивекторов P, P' таких, что

$$[P, P] = [P, P'] = [P', P'] = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]$ – скобка Схоутена. Тензоры Пуассона P, P' определяют совместные скобки Пуассона на бигамильтоновом многообразии M с локальными координатами $z = (z_1, \dots, z_m)$:

$$\{f(z), g(z)\} = \langle df, P dg \rangle = \sum_{i,j}^{\dim M} P^{ij}(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \frac{\partial g(z)}{\partial z_j} \quad (1.1)$$

и аналогичные скобки $\{\cdot, \cdot\}'$ для P' .

Динамические системы на многообразии M , обладающие достаточным для интегрируемости по Лиувиллю количеством функционально независимых интегралов движения $H_1, \dots, H_n$ в биинволюции относительно скобок Пуассона

$$\{H_i, H_k\} = \{H_i, H_k\}' = 0, \quad (1.2)$$

будем называть биинтегрируемыми системами.

Для того чтобы интегралы движения находились в биинволюции (1.2), достаточно, чтобы соответствующие им векторные поля X_{H_i} были бигамильтоновыми [1], [2].

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

В этом случае интегралы движения H_i образуют цепочку Ленарда–Магри и удовлетворяют соотношениям

$$P dH_1 = 0, \quad X_{H_i} = P dH_i = P' dH_{i-1}, \quad P' dH_n = 0. \quad (1.3)$$

Если один из тензоров Пуассона, например, P , невырожден, то многообразие M называется ωN -многообразием, на котором определена симплектическая форма $\omega = P^{-1}$ и оператор

$$N = P' P^{-1} \quad \text{или} \quad N^* = P^{-1} P', \quad (1.4)$$

называемый оператором рекурсии [3], [4], тензором Нийенхейса [1], [2] или наследующим оператором [5], [6].

На ωN -многообразиях тензоры $P = P^{(0)}$ и $P' = P^{(1)}$ принадлежат целому семейству тензоров Пуассона

$$P^{(k)} = N^k P, \quad (1.5)$$

которые определяют семейство совместных скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}^{(k)}$ на M , а динамические системы с интегралами движения

$$H_k = \frac{1}{2k} \text{trace } N^k, \quad (1.6)$$

построенными с помощью N , удовлетворяют рекуррентным соотношениям Ленарда–Магри (1.3) [2].

Координатами Дарбу–Нийенхейса называются переменные, которые являются координатами Дарбу относительно симплектической формы ω и диагонализуют оператор рекурсии N . Согласно [3], [4] координаты Дарбу–Нийенхейса являются переменными разделения для ряда бигамильтоновых (1.3) и биинтегрируемых (1.2) систем.

Целью данной работы является сравнение известных методов построения переменных разделения и переменных Дарбу–Нийенхейса специального вида для открытых цепочек Тоды.

2. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В методе разделения переменных полный интеграл $S(q, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0, \quad (2.1)$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$, ищется в виде суммы:

$$S(q, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = -Ht + \sum_{i=1}^n S_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.2)$$

Здесь i -е слагаемое S_i зависит только от i -й координаты q_i и от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые являются значениями интегралов движения.

Для любого полного интеграла уравнения (2.1) решения $q_i = q_i(t, \alpha, \beta)$ и $p_i = p_i(t, \alpha, \beta)$ исходных уравнений движения находятся из уравнений Якоби

$$\beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

В методе разделения переменных координаты $q_1, \dots, q_n$ называются переменными разделения, а сопряженные им импульсы находятся из вторых уравнений Якоби

$$p_i = \frac{\partial S_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i}, \quad (2.4)$$

в которые входит только i -е слагаемое S_i . Эти уравнения и их более симметричную форму

$$\Phi_i(q_i, p_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad \det \left\| \frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha_k} \right\| \neq 0, \quad (2.5)$$

называют разделенными уравнениями.

Переменные разделения определены с точностью до канонических преобразований переменных $p_i \rightarrow f_i(p_i, q_i)$ и $q_i \rightarrow g_i(p_i, q_i)$, а интегралы движения $H_j = \alpha_j$ всегда можно изменить, положив $\tilde{H}_j = \phi_j(H_1, \dots, H_n)$. Подобные преобразования изменяют форму $\Phi_i = 0$ разделенных уравнений.

Например, можно использовать стандартное каноническое преобразование к переменным действие–угол

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_j} dq_j, \quad w_j = \frac{\partial S}{\partial I_j}.$$

Переменные действие–угол I, w являются переменными разделения, которые выделены дополнительным условием линеаризации уравнений движения

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{w}_j = F_j(I_1, \dots, I_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Подчеркнем, что переменные действие–угол не всегда удобны, в частности, они неудобны при рассмотрении квантовых интегрируемых систем.

2.1. Переменные Дарбу–Нийенхейса. Как уже отмечалось выше, переменные x, y на ωN -многообразии M называются координатами Дарбу–Нийенхейса, если они являются координатами Дарбу относительно симплектической формы

$$\omega = P^{-1} = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

и диагонализуют оператор рекурсии

$$N = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i + \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes dy_i \right), \quad (2.6)$$

что эквивалентно соотношениям

$$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, y_j\}' = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Все остальные скобки между переменными x, y равны нулю.

Вследствие совместности тензоров Пуассона P и P' кручение Нийенхейса оператора рекурсии N для любых векторных полей X, Y на M равно нулю,

$$T_N(X, Y) = [NX, NY] - N([NX, Y] + [X, NY] - N[X, Y]) = 0, \quad (2.8)$$

следовательно, согласно теории Фрелиха–Нийенхейса [7] распределения, отвечающие собственным пространствам оператора N , являются интегрируемыми. Это означает, что уравнения

$$N^* dx_i = \lambda_i dx_i, \quad N^* dy_i = \lambda_i dy_i, \quad (2.9)$$

которые следуют из определения (2.6) оператора рекурсии, интегрируемы в квадратурах [8], [9]. Таким образом, теория Фрелиха–Нийенхейса дает принципиальную возможность построить переменные Дарбу–Нийенхейса путем решения уравнений (2.9) или эквивалентных им уравнений (2.7).

Однако для любой функции $f(x_i, y_i)$ также справедливо уравнение

$$N^* df(x_i, y_i) = \lambda_i df(x_i, y_i).$$

Это означает, что каждая пара переменных Дарбу–Нийенхейса определена с точностью до канонических преобразований. Тем самым, в общем случае уравнения (2.9) имеют бесконечно много решений. Поэтому невозможно создать общий эффективный алгоритм решения этих уравнений.

Данная проблема может быть решена частично, так как для оператора N кручение Нийенхейса T_N равно нулю и поэтому

$$N^* d\lambda_i = \lambda_i d\lambda_i.$$

Таким образом, собственные значения λ_i оператора рекурсии можно рассматривать как координаты Дарбу–Нийенхейса специального вида, которые являются корнями минимального характеристического полинома оператора N

$$\Delta_N(\lambda) = (\det(N - \lambda I))^{1/2} = \lambda^n - (c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j). \quad (2.10)$$

Здесь $c_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – элементарные симметрические полиномы степени k , которые связаны с интегралами движения H_k (1.6) формулами Ньютона, описывающими преобразования симметричных функций двух разных типов.

Сопряженные координатам λ_i переменные μ_j по-прежнему приходится искать с помощью интегрирования переопределенной системы дифференциальных уравнений (2.9)

$$N^* d\mu_i = \lambda_i d\mu_i, \quad \{\lambda_i, \mu_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\mu_i, \mu_j\} = 0. \quad (2.11)$$

Решения μ_i этой системы заведомо определены с точностью до преобразований вида $\mu_i \rightarrow \mu_i + f_i(\lambda_i)$, где f_i – произвольные функции.

До сих пор создание эффективного алгоритма построения переменных Дарбу–Нийенхейса остается открытой проблемой несмотря на то, что эти переменные играют важную роль в методе разделения переменных в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА [3], [4]. Если M – ωN -многообразие размерности $2n$ такое, что в окрестности любой точки $z \in M$ оператор рекурсии N имеет n функционально независимых собственных значений, и если $\{H_1, \dots, H_n\}$ – семейство независимых функций на M , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функции $\{H_1, \dots, H_n\}$ находятся в бинволюции (1.2);
- 2) лагранжево расслоение $\mathcal{F}$, отвечающее функциям $\{H_1, \dots, H_n\}$, допускает разделение переменных в координатах Дарбу–Нийенхейса;
- 3) распределение $\mathcal{D}$, образованное векторными полями X_{H_k} , является лагранжевым относительно $\omega = P^{-1}$ и инвариантным относительно действия оператора рекурсии N .

Для интегрируемых по Лиувиллю бигамильтоновых систем с интегралами движения H_k (1.6) оператор рекурсии N имеет ровно n функционально независимых собственных значений, так как $H_k = k^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ и

$$dH_1 \wedge \dots \wedge dH_n = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_n.$$

Для биинтегрируемых систем общего вида инвариантность распределения $\mathcal{D}$ относительно действия оператора N означает, что существует контрольная матрица F , собственные значения которой равны собственным значениям оператора рекурсии λ_i , такая, что

$$N^* dH_j = \sum_{k=1}^n F_{jk} dH_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

В переменных Дарбу–Нийенхейса уравнения (2.12) совпадают с известным критерием Леви-Чивита [10], в котором описываются гамильтоновы системы, допускающие разделение переменных в данной системе координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В приложениях наиболее часто встречаются матрицы Ленарда–Магри F_m , отвечающие бигамильтоновым системам (1.3) [9], и матрицы Фробениуса F_f , отвечающие, например, системам типа Штекеля [11],

$$F_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}, \quad F_f = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \ddots & & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь c_k – коэффициенты характеристического полинома $\Delta_N(\lambda)$ (2.10) оператора рекурсии N .

3. ОТКРЫТЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Рассмотрим открытые цепочки Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}.$$

Здесь p, q – переменные Дарбу на многообразии $M \simeq \mathbb{R}^{2n}$,

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0. \quad (3.1)$$

Бигамильтонова структура цепочек Тоды детально исследована и в терминах исходных физических переменных, и в терминах переменных Флашки [12]. Так как аналог переменных Флашки для большинства бигамильтоновых систем неизвестен, мы будем использовать только исходные физические переменные p и q , для которых второй тензор Пуассона имеет вид [13], [14]

$$P' = \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} \frac{\partial}{\partial p_{i+1}} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i < j}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}. \quad (3.2)$$

Всюду далее $N = P'P^{-1}$, где P – канонический тензор в $\mathbb{R}^{2n}$, отвечающий скобкам Пуассона (3.1), а P' – тензор (3.2).

3.1. Переменные Мозера. В данном пункте мы кратко напомним метод интегрирования уравнений движения для открытой цепочки Тоды, предложенный Мозером [15]. Современное изложение метода Мозера можно найти в работах [16], [17].

Начнем с $(n \times n)$ -матрицы Лакса L с компонентами

$$L_{jk} = p_j \delta_{j,k} + e^{(q_j - q_{j+1})/2} (\delta_{j,k+1} + \delta_{j-1,k}). \quad (3.3)$$

Следуя [15], определим функцию Вейля

$$\mathcal{X}(\lambda) = (R(\lambda)\vec{\alpha}, \vec{\alpha}), \quad \vec{\alpha} = (0, 0, \dots, e^{q_n/2}), \quad (3.4)$$

где $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ – резольвента $(n \times n)$ -матрицы Якоби L (3.3). Функцию Вейля можно представить в виде отношения простых полиномов,

$$\mathcal{X}(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}, \quad (3.5)$$

где $B(\lambda)$ – полином степени $n - 1$, $A(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ – полином степени n с различными корнями λ_j ,

$$A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_j), \quad B(\lambda) = -e^{q_n} (\lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_0). \quad (3.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\{\cdot, \cdot\}^{(k)}$ – скобки Пуассона, отвечающие тензорам Пуассона $P^{(k)}$ (1.5), то при $k = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned} \{A(\lambda), A(\mu)\}^{(k)} &= \{B(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} = 0, \\ \{A(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} &= \frac{\mu^k A(\lambda) B(\mu) - \lambda^k A(\mu) B(\lambda)}{\lambda - \mu} \end{aligned} \quad (3.7)$$

и

$$\{\mathcal{X}(\lambda), \mathcal{X}(\mu)\}^{(k)} = \frac{(\mathcal{X}(\lambda) - \mathcal{X}(\mu))(\mu^k \mathcal{X}(\lambda) - \lambda^k \mathcal{X}(\mu))}{\lambda - \mu}. \quad (3.8)$$

Если $k = 0$, то скобки (3.7) являются частью квадратичных скобок Складина [18], а скобки (3.8) порождают симплектическую структуру Атьи–Хитчина [19] в пространстве мероморфных отображений $\mathcal{X}(\lambda): \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно [16] скобки Пуассона для полиномов $A(\lambda)$ и $B(\mu)$, отвечающие старшим тензорам Пуассона $P^{(k)}$ (1.5), при $k = 0, 1, \dots, n$ имеют вид

$$\begin{aligned} \{A(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} &= \frac{A(\lambda)B^{[k]}(\mu) - A(\mu)B^{[k]}(\lambda)}{\lambda - \mu} = \\ &= \frac{\mu^k A(\lambda)B(\mu) - \lambda^k A(\mu)B(\lambda)}{\lambda - \mu} + A(\lambda)A(\mu) \frac{(\beta^{[k]}(\lambda) - \beta^{[k]}(\mu))}{\lambda - \mu}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В эти скобки входят либо остаток деления двух полиномов,

$$B^{[k]}(\lambda) = \lambda^k B(\lambda) \mod A(\lambda), \quad (3.10)$$

либо результат деления в пространстве полиномов,

$$\beta^{[k]} = \frac{\lambda^k B(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{B^{[k]}(\lambda) - \lambda^k B(\lambda)}{A(\lambda)}. \quad (3.11)$$

Например, $\beta^{[1]} = 0$ и $\beta^{[1]} = -e^{q_n}$, что приводит к (3.7).

В работе [15] Мозер определил систему переменных действие–угол, которая состоит из нулей λ_j полинома $A(\lambda)$, т.е. полюсов функции Вейля, и переменных

$$\mu_j = \ln B(\lambda_j),$$

так что

$$B(\lambda) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j} \prod_{i \neq j} \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}. \quad (3.12)$$

Легко проверить, что полином $A(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \Delta_N(\lambda)$ является минимальным характеристическим полиномом оператора рекурсии N . Кроме этого, из (3.7) следует, что единственные ненулевые скобки между переменными λ_i и μ_j суть

$$\{\lambda_i, \mu_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\lambda_i, \mu_j\}' = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Вычисления скобок при $k = 1$ можно избежать, если воспользоваться соотношением

$$N^* d\Delta_N(\lambda) = \lambda d\Delta_N(\lambda) + \Delta_N(\lambda) dc_1, \quad (3.13)$$

которое следует из рекуррентных соотношений Ленарда–Магри (1.3), переписанных в виде $N^* dH_k = dH_{k+1}$, и формул Ньютона, связывающих H_k и коэффициенты c_k [1]. Комбинируя это соотношение с результатами работы [20], согласно которым

$$B(\lambda) = -e^{q_n} \frac{\partial}{\partial c_1} \Delta_N(\lambda), \quad (3.14)$$

можно доказать, что $B(\lambda)$ является штеккелевской функцией [4], удовлетворяющей соотношению

$$N^* dB(\lambda) = \lambda dB(\lambda) + \Delta_N(\lambda) de^{q_n},$$

так что

$$N^* d\mu_i = \lambda_i d\mu_i.$$

Итак, переменные Мозера являются переменными Дарбу–Нийенхейса специального вида, для которых уравнения движения имеют вид

$$\{H_k, \lambda_j\} = \partial_{\tau_k} \lambda_j = 0, \quad \{H_k, \mu_j\} = \partial_{\tau_k} \mu_j = \lambda_j^{k-1}.$$

Эволюция переменных μ_j относительно времен τ_k , сопряженных интегралам движения H_k , линейна.

Скобка Атьи–Хитчина (3.8) инвариантна относительно действия группы дробно-линейных преобразований

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}' = \frac{a\mathcal{X} + b}{c\mathcal{X} + d}. \quad (3.15)$$

Поэтому с этой скобкой могут быть связаны две системы координат типа действие–угол [17]. Вторую систему координат мы опишем в следующем пункте, используя метод классической r -матрицы.

3.2. Метод Склянина. В данном разделе мы кратко напомним метод построения переменных разделения, предложенный Скляниным [18]. Рассмотрим (2×2) -матрицу монодромии

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}(\lambda) = L_1(\lambda) \dots L_{n-1}(\lambda) L_n(\lambda), \quad (3.16)$$

где

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda - p_i & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $T(\lambda)$ является матрицей Лакса для периодической цепочки Тоды, а матрица Лакса для открытой цепочки Тоды имеет вид

$$T_o(\lambda) = K T(\lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\lambda), \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два нетривиальных элемента A и B (2×2) -матрицы Лакса равны числителю и знаменателю функции Вейля $\mathcal{X}$, см. соотношения (3.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\{\cdot, \cdot\}^{(k)}$ – скобки Пуассона, отвечающие тензорам Пуассона $P^{(k)}$ (1.5), то при $k = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned} \{T^1(\lambda), T^2(\mu)\}^{(k)} &= r_{12}(\lambda, \mu) T^1(\lambda) T^2(\mu) - T^1(\lambda) T^2(\mu) r_{21}(\lambda, \mu) + \\ &+ T^1(\lambda) s(\lambda, \mu) T^2(\mu) - T^2(\lambda) s(\lambda, \mu) T^1(\mu), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{-1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda^k + \mu^k}{2} & \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k & 1 - \frac{\lambda^k + \mu^k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_{ij}(\lambda, \mu) = \text{Pr}_{ji}(\lambda, \mu)\Pi,$$

а матрица $s(\lambda, \mu)$ равна

$$s(\lambda, \mu) = \frac{-1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^k - \mu^k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^k - \mu^k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\overset{1}{T}(\lambda) = T(\lambda) \otimes I$, $\overset{2}{T}(\mu) = I \otimes T(\mu)$ и Π – оператор перестановки, т.е. $\Pi X \otimes Y = Y \otimes X\Pi$ для произвольных матриц X, Y .

При $k = 0$ скобки (3.17) совпадают со скобками Склянина [18], в которых $s(\lambda, \mu) = 0$ и $r(\lambda - \mu) = -(\lambda - \mu)^{-1}\Pi$ – стандартная рациональная r -матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В общем случае при $k = 0, 1, \dots, n$ скобки Пуассона, отвечающие тензорам $P^{(k)}$, порождают следующие квадратичные скобки для элементов матрицы монодромии:

$$\begin{aligned} \{A(\lambda), A(\mu)\}^{(k)} &= \{B(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} = \{C(\lambda), C(\mu)\}^{(k)} = \{D(\lambda), D(\mu)\}^{(k)} = 0, \\ \{A(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} &= \frac{\mu^k A(\lambda)B(\mu) - \lambda^k A(\mu)B(\lambda)}{\lambda - \mu} + A(\lambda)A(\mu) \frac{\beta^{[k]}(\lambda) - \beta^{[k]}(\mu)}{\lambda - \mu}, \\ \{A(\lambda), C(\mu)\}^{(k)} &= -\frac{\mu^k A(\lambda)B(\mu) - \lambda^k A(\mu)B(\lambda)}{\lambda - \mu} - A(\lambda)A(\mu) \frac{\gamma^{[k]}(\lambda) - \gamma^{[k]}(\mu)}{\lambda - \mu}, \\ \{D(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} &= -\frac{\mu^k (D(\lambda)B(\mu) - D(\mu)B(\lambda))}{\lambda - \mu} - \beta^{[k-1]} D(\lambda)A(\mu), \\ \{D(\lambda), C(\mu)\}^{(k)} &= \frac{\mu^k (D(\lambda)C(\mu) - D(\mu)C(\lambda))}{\lambda - \mu} + \gamma^{[k-1]} D(\lambda)A(\mu), \\ \{B(\lambda), C(\mu)\}^{(k)} &= -\frac{\mu^k A(\lambda)D(\mu) - \lambda^k A(\mu)D(\lambda)}{\lambda - \mu}, \\ \{A(\lambda), D(\mu)\}^{(k)} &= \frac{\lambda^k (C(\lambda)B(\mu) - C(\mu)B(\lambda))}{\lambda - \mu} - \\ &\quad - \frac{A(\lambda)}{\lambda - \mu} (B(\mu)(\beta^{[k]}(\lambda) - \beta^{[k]}(\mu)) - C(\mu)(\gamma^{[k]}(\lambda) - \gamma^{[k]}(\mu))). \end{aligned}$$

Здесь $\beta^{[k]} = \lambda^k B(\lambda)/A(\lambda)$, см. формулу (3.11), и $\gamma^{[k]} = \lambda^k C(\lambda)/A(\lambda)$ – полиномы, которые получаются в результате простого деления (т.е. деления без остатка) в пространстве полиномов.

Данные скобки также можно переписать в матричном виде (3.17), добавляя к постоянным матрицам $r(\lambda, \mu)$ и $s(\lambda, \mu)$ динамические слагаемые, зависящие от полиномов $\beta^{[k]}$ и $\gamma^{[k]}$.

Согласно [18], [21] переменные разделения являются полюсами функции Бейкера–Ахизера, которая отвечает матрице Лакса T_0 и нормирована на постоянный вектор $\vec{\alpha} = (0, 1)$. В нашем случае переменные разделения являются корнями внедиагонального элемента матрицы монодромии

$$B(\lambda) = -e^{-u_n} \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - v_j), \quad u_n = -q_n.$$

Вторая половина переменных определяется следующим образом:

$$u_j = \ln A(v_j), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad v_n = -c_1 = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (3.18)$$

Полином $A(\lambda)$ легко выражается через переменные разделения:

$$A(\lambda) = \left(\lambda + \sum_{j=1}^n v_j \right) \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - v_j) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{-u_j} \prod_{i \neq j}^{n-1} \frac{\lambda - v_i}{v_j - v_i}. \quad (3.19)$$

При $k = 0, 1$ скобки между $A(\lambda)$ и $B(\mu)$ имеют вид

$$\{A(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} = \frac{\mu^k A(\lambda) B(\mu) - \lambda^k A(\mu) B(\lambda)}{\lambda - \mu}. \quad (3.20)$$

Подставляя это выражение в уравнение

$$0 = \{A(\lambda), B(v_j)\}^{(k)} = \{A(\lambda), B(\mu)\}^{(k)}|_{\mu=v_j} + B'(v_j) \{A(\lambda), v_j\}^{(k)},$$

мы получим $(n-1)$ уравнение вида

$$\{A(\lambda), v_j\}^{(k)} = \lambda^k A(v_j) \prod_{i \neq j}^{n-1} \frac{\lambda - v_i}{v_j - v_i}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (3.21)$$

Из этих уравнений при $\lambda = v_i$ следует

$$\{v_j, u_i\}^{(k)} = v_i^k \delta_{ij}, \quad k = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

Далее, рассматривая коэффициенты при различных степенях λ и μ в (3.20), мы получим

$$\begin{aligned} \{v_n, u_n\} &= 1, & \{v_i, v_n\} &= 0, & \{u_n, u_i\} &= 0, \\ \{v_n, u_n\}' &= -\sum_{i=1}^n v_i, & \{v_n, v_i\}' &= f_i = \frac{e^{-u_i}}{\prod_{j \neq i}^{n-1} (v_i - v_j)}, & \{u_n, u_i\}' &= -1. \end{aligned}$$

Аналогично из $\{B(\lambda), B(\mu)\}^{(k)} = 0$ следует

$$\{v_i, v_j\}^{(k)} = \{u_n, v_j\}^{(k)} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

а из $\{A(\lambda), A(\mu)\}^{(k)} = 0$ получается, что

$$\begin{aligned} \{v_n, u_i\} &= 0, & \{u_i, u_j\} &= 0, \\ \{v_n, u_i\}' &= g_i = -e^{-u_n} \frac{A'(\lambda)}{B'(\lambda)} \Big|_{\lambda=v_i}, & \{u_i, u_j\}' &= 0, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Здесь A' и B' – производные по спектральному параметру λ .

Итак, мы доказали, что $2n$ переменных разделения u_i и v_i , построенных в методе Складина, являются координатами Дарбу,

$$\omega = \sum_{i=1}^n dv_i \wedge du_i,$$

но оператор рекурсии N состоит из двух диагональных слагаемых и трех внедиагональных слагаемых, отвечающих переменным v_n и u_n :

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \otimes dv_i + \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes du_i \right) - \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial v_n} \otimes du_n + \frac{\partial}{\partial u_n} \otimes dv_n \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} f_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \otimes dv_n - \frac{\partial}{\partial v_n} \otimes dv_i \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_n} \otimes du_i - \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes du_n \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} g_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \otimes dv_n + \frac{\partial}{\partial v_n} \otimes du_i \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Это может быть связано с тем, что соответствующие разделенные уравнения различны:

$$\Phi_j = e^{u_j} - \Delta(v_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad \Phi_n = v_n + \alpha_1 = 0. \quad (3.23)$$

Данные уравнения непосредственно следуют из определения (3.18) переменных разделения u_j и v_n .

Первые $(n-1)$ уравнений системы (3.23) связаны с уравнениями движения (3.21), которые линеаризуются с помощью преобразования Абеля [18], [22]:

$$\left\{ A(\lambda), \sum_{k=1}^{n-1} \int^{u_k} \sigma_j \right\} = -\lambda^{j-1}, \quad \sigma_j = \frac{\lambda^{j-1} d\lambda}{\Delta_N(\lambda)}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где $\{\sigma_j\}$ – базис абелевых дифференциалов первого рода на алгебраической кривой $z = \Delta_N(\lambda)$, отвечающей разделенным уравнениям (3.23).

Итак, используя переменные Складина, можно ввести переменные действие–угол

$$I_j = c_j, \quad w_1 = u_n, \quad w_{j+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \int^{u_k} \sigma_j$$

так, что эволюция переменных w_j относительно времен τ_j , сопряженных переменным действие $I_j = c_j$, будет линейна.

Переменные Мозера, которые являются координатами Дарбу–Нийенхейса специального вида, дуальны переменным Складина в том смысле, что λ_i – корни полинома $A(\lambda)$, а μ_i – значения полинома $B(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_i$, тогда как v_j – корни полинома $B(\lambda)$, а u_j – значения полинома $A(\lambda)$ при $\lambda = v_j$. Как следствие, переменные Мозера отвечают потокам, сохраняющим спектр матрицы Якоби L (3.3), а потоки, отвечающие переменным Складина, трансверсальны предыдущим потокам и сохраняют дивизор [17].

Более того, из разложения матрицы монодромии $T(\lambda)$ (3.16) на множители следуют соотношения

$$B_n = -e^{q_n} A_n, \quad B_{n+1}(v_j) = -e^{q_{n+1}} A_n(\lambda_j) = 0.$$

Таким образом, n переменных Мозера λ_i для n -частичной цепочки равны n переменным Складина v_i для $(n+1)$ -частичной цепочки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В отличие от координат λ_i , μ_i переменные v_i , u_i являются переменными разделения как для открытой цепочки, так и для периодической цепочки Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа, и активно используются в квантовой механике [21], [22], например, для нахождения спектра гамильтониана периодической цепочки Тоды [23].

4. ОТКРЫТЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Рассмотрим открытые обобщенные цепочки Тоды с гамильтонианами

$$H_g = \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} + V_g(q), \quad g = \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \quad (4.1)$$

$$V_{\mathcal{B}} = 2a_0 e^{q_n}, \quad V_{\mathcal{C}} = a_1^2 e^{2q_n}, \quad V_{\mathcal{D}} = 2a_2^2 e^{q_{n-1} + q_n}.$$

Эти цепочки Тоды связаны с корневыми системами $\mathcal{B}_n$ -, $\mathcal{C}_n$ - и $\mathcal{D}_n$ -типов [24].

4.1. Операторы рекурсии и матрицы Лакса. Как и для обычной цепочки Тоды, бигамильтонова структура открытых обобщенных цепочек Тоды детально исследована и в терминах исходных физических переменных, и в терминах переменных Флашки, см. обзор [25].

Для цепочек Тоды, связанных с корневой системой $\mathcal{BC}_n$ -типа, отличные от нуля вторые скобки Пуассона имеют вид [25]

$$\begin{aligned} i < j: & \quad \{q_i, q_j\}' = 2p_i, \\ i = 1, \dots, n-1: & \quad \{p_i, p_{i+1}\}' = -(p_i + p_{i+1}) e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{q_{i+1}, p_i\}' = e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{q_i, p_i\}' = p_i^2 + 2e^{q_i - q_{i+1}}, \\ i = 1, \dots, n-2: & \quad \{q_i, p_{i+1}\}' = 2e^{q_{i+1} - q_{i+2}} - e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{p_n, q_i\}' = 2e^{q_{n-1} - q_n} - 2a_0 e^{q_n} - 2a_1^2 e^{2q_n}, \\ i = 3, \dots, n-1: & \quad \{p_i, q_j\}' = 2e^{q_{i-1} - q_i} - 2e^{q_i - q_{i+1}}, \quad 1 \leq j \leq i-2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

при этом

$$\{q_n, p_n\}' = p_n^2 + 2a_0 e^{q_n} + a_1^2 e^{2q_n}, \quad \{q_{n-1}, p_n\}' = 2a_0 e^{q_n} + 2a_1^2 e^{2q_n} - e^{q_{n-1}-q_n}.$$

В определение скобок входят два числовых параметра a_0 и a_1 . Если $a_0 = 0$, то мы получаем цепочку Тоды $\mathcal{C}_n$ -типа, если $a_1 = 0$, то цепочку $\mathcal{B}_n$ -типа.

Для цепочек Тоды, связанных с корневой системой $\mathcal{D}_n$ -типа, отличные от нуля вторые скобки Пуассона имеют вид [25]

$$\begin{aligned} i < j: & \quad \{q_i, q_j\}' = 2p_i, \\ i = 1, \dots, n-2: & \quad \{p_i, p_{i+1}\}' = -(p_i + p_{i+1}) e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{q_{i+1}, p_i\}' = e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{q_i, p_i\}' = p_i^2 + 2e^{q_i - q_{i+1}}, \\ & \quad \{p_n, q_i\}' = 2e^{q_{n-1}-q_n} - 2a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}, \\ i = 1, \dots, n-3: & \quad \{p_{n-1}, q_i\}' = 2e^{q_{n-2}-q_{n-1}} - 2e^{q_{n-1}-q_n} - 2a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}, \\ i = 3, \dots, n-1: & \quad \{p_i, q_j\}' = 2e^{q_{i-1}-q_i} - 2e^{q_i - q_{i+1}}, \quad 1 \leq j \leq i-2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

при этом

$$\begin{aligned} \{q_n, p_n\}' &= p_n^2, & \{q_{n-2}, p_{n-1}\}' &= -2e^{q_{n-2}-q_{n-1}} + 2e^{q_{n-1}-q_n} + 2a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}, \\ \{q_{n-1}, p_{n-1}\}' &= p_{n-1}^2 + 2e^{q_{n-1}-q_n} + 2a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}, \\ \{q_n, p_{n-1}\}' &= \{p_n, q_{n-1}\}' = e^{q_{n-1}-q_n} - a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}, \\ \{p_{n-1}, p_n\}' &= -(p_{n-1} + p_n) e^{q_{n-1}-q_n} + (p_{n+1} - p_n) a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n}. \end{aligned}$$

Всюду далее $N = P'P^{-1}$, где P – канонический тензор в $\mathbb{R}^{2n}$, отвечающий скобкам Пуассона (3.1), а P' – тензор Пуассона, отвечающий скобкам (4.2) или (4.3). В этом случае функция Гамильтона H_g (4.1) равна первому коэффициенту c_1 минимального характеристического полинома данного оператора рекурсии.

Согласно [26], [27] для обобщенных цепочек Тоды (2×2) -матрица Лакса

$$\mathcal{T}_0 = K_+ T(v) K_-(v) T^{-1}(-v) \quad (4.4)$$

строится с помощью исходной матрицы монодромии $T(v)$ (3.16) и двух граничных матриц

$$K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_-(v) = \begin{pmatrix} 2a_2 v^2 - ia_1 v + a_0 & (4a_2 e^{q_n} + 1)v \\ 0 & 2a_2 v^2 + ia_1 v + a_0 \end{pmatrix}.$$

След матрицы $\mathcal{T}_0(v)$ пропорционален минимальному характеристическому полиному $\Delta_N(\lambda)$ оператора рекурсии после замены спектрального параметра:

$$\text{trace } \mathcal{T}_0(v) = (-1)^{n-1} v \Delta_N(v^2), \quad \lambda = v^2,$$

и дополнительного канонического преобразования координат p_n и q_n [28], [29]. Для цепочек Тоды $\mathcal{C}_n$ -типа дополнительное преобразование имеет вид

$$p_n \rightarrow p_n - ia_1 e^{q_n},$$

а для цепочек Тоды $\mathcal{D}_n$ -типа задается как

$$p_n \rightarrow -p_n \frac{\operatorname{ch} q_n + 1}{\operatorname{sh} q_n}, \quad q_n \rightarrow -\ln(-2a_2 \operatorname{ch}(q_n + \ln(-a_2)) + 1).$$

Вспомогательная матрица

$$\mathcal{T} = T(v)K_-T^{-1}(-v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(v) & \mathcal{B}(v) \\ \mathcal{C}(v) & \mathcal{A}(-v) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

удовлетворяет уравнению отражения [26]

$$\begin{aligned} \{\overset{1}{\mathcal{T}}(u), \overset{2}{\mathcal{T}}(v)\} &= [r(u-v), \overset{1}{\mathcal{T}}(u) \overset{2}{\mathcal{T}}(v)] + \\ &+ \overset{1}{\mathcal{T}}(u)r(u+v) \overset{2}{\mathcal{T}}(v) - \overset{2}{\mathcal{T}}(v)r(u+v) \overset{1}{\mathcal{T}}(u), \end{aligned} \quad (4.6)$$

в которое входит стандартная рациональная r -матрица $r(z) = -z^{-1}\Pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Согласно [28], [29], если в граничной матрице K_- параметры a_2 , a_1 , a_0 отличны от нуля, то мы получим обобщенную открытую цепочку Тоды с потенциалом

$$V_g = 2a_2^2 e^{q_{n-1}+q_n} + \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 q_n} + \frac{2a_0}{\operatorname{sh}^2(q_n/2)},$$

которая была впервые рассмотрена Иноземцевым [30].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для построения матриц Лакса, отвечающих обобщенным периодическим цепочкам Тоды, вспомогательную матрицу $\mathcal{T}$ необходимо умножить на подходящую граничную матрицу $K_+(v)$, см. формулу (4.4) [26]–[29].

4.2. Переменные Дарбу–Нийенхейса. В работе Склянина [26] переменные разделения v_i определяются как корни внедиагонального элемента $\mathcal{B}(v)$ матрицы $\mathcal{T}$ (4.5),

$$\mathcal{B}(v) = (-1)^{n-1} v \prod_{i=1}^n (v^2 - v_i^2). \quad (4.7)$$

Вторая половина переменных u_i определяется следующим образом:

$$u_i = \ln \mathcal{A}(v_i). \quad (4.8)$$

Как и ранее, координаты v_i являются полюсами соответствующей матрицы Лакса векторной функции Бейкера–Ахизера [21], [26], [28], а переменные u_i и v_j – координатами Дарбу. Для доказательства этого факта можно использовать скобки Пуассона для полиномов $\mathcal{A}(v)$ и $\mathcal{B}(u)$ степени $2n$ и $2n+1$, соответственно,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{B}(u), \mathcal{B}(v)\} &= 0, \quad \{\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(v)\} = \frac{\mathcal{B}(u)\mathcal{C}(v) - \mathcal{B}(v)\mathcal{C}(u)}{u+v}, \\ \{\mathcal{B}(u), \mathcal{A}(v)\} &= \frac{\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) - \mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v)}{u-v} - \frac{\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) + \mathcal{B}(v)\mathcal{A}(-u)}{u+v}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

которые вытекают из уравнения отражения (4.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Переменные разделения v_i и u_j , определяемые формулами (4.7), (4.8), являются координатами Дарбу–Нийенхейса специального вида для обобщенных открытых цепочек Тоды $\mathcal{BC}_n$ - и $\mathcal{D}_n$ -типов.

Так как переменные v_i и u_j являются координатами Дарбу, а координаты v_i – корнями характеристического полинома оператора рекурсии N

$$\mathcal{B}(v) = (-1)^{n-1} v \Delta_N(v^2),$$

то нам остается только доказать, что переменные u_j составляют вторую половину переменных Дарбу–Нийенхейса специального вида. Это утверждение легко доказать, так как функция $\mathcal{A}(v)$ является штеккелевской функцией,

$$N^* d\mathcal{A}(v) = v d\mathcal{A}(v) - \mathcal{B}(v) d\beta,$$

где β – результат деления полинома $\mathcal{A}(v)$ на v^{2n-1} в множестве полиномов,

$$\beta = (-1)^n (u - p_1) e^{-q_1},$$

и поэтому

$$N^* dv_i = v_i du_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что переменные Складина для открытых цепочек Тоды $\mathcal{BC}_n$ - и $\mathcal{D}_n$ -типов являются переменными Дарбу–Нийенхейса специального вида.

Оба используемых нами полинома могут быть формально получены из минимального характеристического полинома оператора рекурсии:

$$\mathcal{B}(v) \simeq \Delta_N, \quad \mathcal{A}(-v) = e^{-q_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathcal{B}(v),$$

где $\gamma = v - p_1$. Как и для цепочек Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа, эти соотношения являются следствием разложения матрицы монодромии $T(u)$ на сомножители, см. формулу (3.16).

Согласно [26], [28], [29] для открытых цепочек Тоды переменные Дарбу–Нийенхейса v_i и u_j , заданные в (4.7), (4.8), являются переменными разделения для соответствующих периодических цепочек Тоды. Вопрос о построении переменных Дарбу–Нийенхейса для обобщенных периодических цепочек Тоды остается открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для рациональных функций вида $\mathcal{X}(v) = \mathcal{A}(v)/\mathcal{B}(v)$ скобки Пуассона

$$\{\mathcal{X}(u), \mathcal{X}(v)\} = \frac{(\mathcal{X}(u) - \mathcal{X}(v))^2}{u - v} + \frac{1}{u + v} \left(\frac{\det T(u)}{\mathcal{B}(u)^2} - \frac{\det T(v)}{\mathcal{B}(v)^2} \right)$$

зависят от рациональных функций $\mathcal{X}$, спектральных параметров и полинома $\mathcal{B}$, который не входит в соответствующие скобки Пуассона (3.8) для цепочек Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Так как $\mathcal{A}(\pm v_i) = e^{\pm u_i}$ и $\mathcal{A}(0) = -a_0$, то полином $\mathcal{A}(v)$ степени $2n$ можно легко восстановить по этим $2n + 1$ равенствам:

$$\mathcal{A}(v) = (-1)^n a_0 \prod_{i=1}^n \frac{v^2 - v_i^2}{v_i^2} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{v(v + v_j)e^{u_j}}{2v_j^2} + \frac{v(v - v_j)e^{-u_j}}{2v_j^2} \right) \prod_{i \neq j}^n \frac{v^2 - v_i^2}{v_j^2 - v_i^2}.$$

Напомним, что параметр $a_0 = 0$ для цепочек Тоды $\mathcal{C}_n$ - и $\mathcal{D}_n$ -типов.

Используя это выражение для полинома $\mathcal{A}$ и аналогичное выражение для полинома $\mathcal{B}$ (4.7), можно доказать, что вторые скобки Пуассона (2.7) между этими полиномами имеют вид

$$\{\mathcal{B}(u), \mathcal{A}(v)\}' = \frac{\mathcal{B}(u)\mathcal{A}^{[1]}(v) - \mathcal{A}^{[1]}(u)\mathcal{B}(v)}{u - v} - \frac{\mathcal{B}(u)\mathcal{A}^{[1]}(v) + \mathcal{B}(v)\mathcal{A}^{[1]}(-u)}{u + v},$$

где

$$\mathcal{A}^{[1]}(v) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(v + v_j)e^{u_j}}{2} + \frac{(v - v_j)e^{-u_j}}{2} \right) \prod_{i \neq j}^n \frac{v^2 - v_i^2}{v_j^2 - v_i^2}$$

– полином степени $2n - 1$, который восстанавливается по $2n$ соотношениям

$$\mathcal{A}^{[1]}(\pm v_i) = v_i \exp(\pm u_i).$$

Выразить этот полином $\mathcal{A}^{[1]}$ непосредственно через исходные полиномы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ нам не удалось, в отличие от выражений для функций $B^{[k]}$ (3.10) [16].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание эффективного алгоритма построения переменных Дарбу–Нийенхейса остается открытой проблемой. Основным результатом данной работы является доказательство того, что метод Склинина позволяет построить переменные Дарбу–Нийенхейса специального вида для всех открытых обобщенных цепочек Тоды, причем эти переменные также являются переменными разделения для соответствующих периодических цепочек. Для открытых цепочек Тоды $\mathcal{A}_n$ -типа переменными Дарбу–Нийенхейса являются переменные Мозера, которые дуальны переменным Склинина.

Основным недостатком данного подхода является тот факт, что помимо оператора рекурсии N для исследуемой интегрируемой системы необходимо построить матрицу Лакса, функцию Вейля или функцию Бейкера–Ахиезера с подходящей нормировкой.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00140).

Список литературы

- [1] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **53** (1990), 35–81.
- [2] F. Magri, “Eight lectures on integrable systems”, *Integrability of Nonlinear Systems* (Pondicherry, India, 1996), Lecture Notes in Phys., **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, Springer, Berlin, 1997, 256–296.
- [3] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8** (2001), 118–127.
- [4] G. Falqui, M. Pedroni, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **6** (2003), 139–179.
- [5] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, *Функц. анализ и его прилож.*, **13:4** (1979), 13–30.
- [6] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas, *Phys. D*, **4** (1981), 47–66.
- [7] A. Frölicher, A. Nijenhuis, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **59** (1956), 338–359.

- [8] I. M. Gelfand, I. Zakharevich, “On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure”, *Gelfand Mathematical Seminars*, 1990–1992, eds. L. Corwin et al., Birkhäuser, Boston, 1993, 51–112.
- [9] F. Magri, “Geometry and soliton equations”, *La mécanique analytique de Lagrange et son héritage*, Atti Accad. Sci. Torino Suppl., **124**, Accad. Sci. Torino, Turin, 1990, 181–209.
- [10] T. Levi-Civita, *Math. Ann.*, **59** (1904), 383–397.
- [11] A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *J. Geom. Phys.*, **33** (2000), 210–228.
- [12] H. Flaschka, D. W. McLaughlin, *Progr. Theoret. Phys.*, **55** (1976), 438–456.
- [13] A. Das, S. Okubo, *Ann. Phys.*, **190** (1989), 215–232.
- [14] R. L. Fernandes, *J. Phys. A*, **26** (1993), 3797–3803.
- [15] J. Moser, “Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system”, *Dynamical Systems, Theory and Applications* (Seattle, 1974), Lecture Notes in Phys., **38**, ed. J. Moser, Springer, Berlin, 1975, 467–497.
- [16] L. Faybusovich, M. Gekhtman, *Phys. Lett. A*, **272** (2000), 236–244.
- [17] K. L. Vaninsky, *J. Geom. Phys.*, **46** (2003), 283–307.
- [18] E. K. Sklyanin, “The quantum Toda chain”, *Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory* (Paris, 1983–1984), Lecture Notes in Phys., **226**, ed. N. Sanchez, Springer, Berlin, 1985, 196–233.
- [19] M. Atiyah, N. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988.
- [20] A. V. Tsiganov, *Regul. Chaotic. Dyn.*, **6** (2001), 307–326.
- [21] E. K. Sklyanin, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **118** (1995), 35–60.
- [22] F. A. Smirnov, *J. Phys. A*, **31** (1998), 8953–8971.
- [23] И. В. Комаров, А. В. Цыганов, *Вестн. ЛГУ. Сер. физ., хим.*, 1988, № 2, 69–71.
- [24] О. И. Bogoyavlensky, *Commun. Math. Phys.*, **51** (1976), 201–209.
- [25] P. A. Damianou, *Rev. Math. Phys.*, **16** (2004), 175–241.
- [26] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21** (1988), 2375–2389.
- [27] В. Б. Кузнецов, А. В. Цыганов, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **172** (1989), 89–98.
- [28] V. B. Kuznetsov, *J. Phys. A*, **30** (1997), 2127–2138.
- [29] В. В. Соколов, А. В. Цыганов, *ТМФ*, **133** (2002), 485–500.
- [30] V. I. Inozemtsev, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989), 629–638.

Поступила в редакцию 9.11.2006