Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Шишанин, Фазы многоследовой матричной модели Голдстоуна в пределе больших N , *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 457–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:03:43

© 2007 г.

А. О. Шишанин*

ФАЗЫ МНОГОСЛЕДОВОЙ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ГОЛДСТОУНА В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ N

Рассматривается эрмитова голдстоуновская матричная модель с многоследовым слагаемым. При определении решений на двух отрезках вводится специальный параметр ξ , описывающий фазу. Условия существования фаз обсуждаются для $\xi = 0$ (или 1) и $\xi = 1/2$. Рассчитаны пропагатор и вакуумная энергия в симметричном случае с $\xi = 1/2$. В общем случае обсуждается структура решения, вычисляются намагнитченность и другие параметры, выраженные через сумму всех отрезков.

Ключевые слова: планарное приближение, эрмитовы матричные модели, многоследовое слагаемое, многоразрезные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно из работы 'т Хоофта [1], только планарные диаграммы выживают при больших N в режиме $g^2 N = \text{const}$, где g – константа связи для $SU(N)$ -калибровочной теории поля. Нульмерные матричные модели позволяют подсчитать число планарных диаграмм в многомерных полевых теориях. Исследование степени роста планарных диаграмм проводилось комбинаторными [2] и аналитическими [3] методами.

В работе [3] было показано, что решение уравнения для плотности распределения собственных значений матрицы обычной эрмитовой нульмерной матричной модели при больших N лежит на одном отрезке. Однако модель с отрицательным квадратом массы помимо решения на одном отрезке может допускать решения на большем числе отрезков-разрезов [4]–[8]. Замечательным оказалось то, что такие решения нашли применение в суперсимметричных калибровочных теориях [9] (см. также обзор [10]).

Отметим, что наиболее известное применение нульмерных матричных моделей связано с двумерной квантовой гравитацией [11]. В частности, обычные эрмитовы

---

*Московский государственный индустриальный университет, Москва, Россия.
E-mail: shishandr@rambler.ru

матричные модели являются решетчатым аналогом квантовой гравитации в отсутствие материи [12]. В литературе исследуются также так называемые многоследовые матричные модели [13]. Интерес к этим моделям связан с рассмотрением двумерной квантовой гравитации со старшими членами по кривизне, которой соответствует матричная модель с модифицированным квадратичным членом в действии. При интегрировании этого члена по угловым переменным в действии появляются многоследовые слагаемые. Простейшая матричная модель с двуследовым членом была рассмотрена в работе [13]; исследование матричных моделей с многоследовыми слагаемыми продолжили авторы работ [14], [15]. Отметим, что многоследовые объекты возникают также в АдС/КТП-соответствии, которое активно изучалось в последние годы. Исследовать их в этом контексте было предложено в работе [16], а их динамика обсуждалась в статье [17].

В данной работе обсуждаются свойства двуследовой модели с голдстоуновским массовым членом. Это представляет интерес как обобщение матричной модели Голдстоуна для двух констант связи. Здесь также возникают решения с плотностью собственных значений на нескольких отрезках, характеризующиеся параметром ξ . В разделе 2 представлена модель и даны некоторые определения. В разделе 3 обсуждаются решения при $\xi = 0$ (или 1) и $\xi = 1/2$ [18]. В разделе 4 рассматривается общий случай произвольного ξ .

2. МОДЕЛЬ

В данной работе рассматривается модель с действием

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Phi^2 + \frac{g}{N} \operatorname{tr} \Phi^4 + \frac{h}{N^2} (\operatorname{tr} \Phi^2)^2. \quad (1)$$

Функциональный интеграл Z и вакуумная энергия E_0 связаны соотношением вида

$$Z = e^{-N^2 E_0} = \int D\Phi e^{-S(\Phi)}. \quad (2)$$

Здесь Φ есть $(N \times N)$ -эрмитова матрица, а g и h – константы связи; мера интегрирования

$$D\Phi = \prod_i D\Phi_{ii} \prod_{i < j} D(\operatorname{Re} \Phi_{ij}) D(\operatorname{Im} \Phi_{ij}).$$

Перейдем к собственным значениям λ_i матрицы Φ . В обычной матричной модели угловые переменные разделяются. Введем при больших N аппроксимирующую функцию $\lambda(x)$ и функцию распределения $u(\lambda)$:

$$\lambda\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{N}}, \quad x = \frac{i}{N}, \quad \frac{dx}{d\lambda} = u(\lambda).$$

Тогда квазиклассическое уравнение в планарном пределе для плотности распределения собственных значений на некотором множестве L определится как

$$-\frac{1}{2}\lambda + 2g\lambda^3 + 2hD\lambda = \oint_L d\mu \frac{u(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (3)$$

с условием нормировки на $u(\lambda)$

$$\int_L u(\lambda) d\lambda = 1,$$

где $u(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in L$, $u(\lambda) = 0$, $\lambda \notin L$.

В формуле (3) D -пропагатор определяется следующим выражением:

$$D = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \Phi^2 \right\rangle = \int_L u(\lambda) \lambda^2 d\lambda. \quad (4)$$

Таким образом, как и в случае, рассмотренном в работе [3], получаем сингулярное интегральное уравнение. Допустим, что L состоит из двух сегментов $[a, b]$ и $[c, d]$. Чтобы замкнуть систему уравнений и найти $u(\lambda)$, введем, как и в работе [5], новый параметр модели

$$\xi = \int_a^b u(\lambda) d\lambda. \quad (5)$$

Кроме того, в дальнейшем будут проводиться расчеты с величиной

$$s = a + b + c + d. \quad (6)$$

3. СЛУЧАИ С $\xi = 1/2$ И $\xi = 0$ (ИЛИ 1)

Напомним особенности теории, когда константа $h = 0$ [4]–[6]. В этом случае при $g < g_{\text{cr}} < 1/16$ существуют решения, соответствующие одному или двум отрезкам. При $g > (g_{\text{cr}})_{\xi=1/2} = 1/16$ существует решение, соответствующее только одному отрезку, и оно является симметричным. При $g \leq (g_{\text{cr}})_{\xi=1/2} < 1/16$ симметричное решение соответствует двум отрезкам.

При $g < g_{\text{cr}}(\xi)$ возможны также несимметричные решения, характеризующиеся параметром ξ , $0 \leq \xi < 1/2$ ($1/2 < \xi \leq 1$). Эти решения [5] с заданным ξ можно получить, если ввести в действие исчезающий малый член, нарушающий исходную симметрию.

Запишем эти решения.

А. Решение Брезана–Ициксона–Паризи–Зюбера [3], где L – отрезок $[-2a, 2a]$, плотность распределения собственных значений матрицы Φ имеет вид

$$u_A = \frac{1}{\pi} \left(2g\lambda^2 - \frac{1}{2} + 4ga^2 \right) \sqrt{4a^2 - \lambda^2}.$$

Из уравнения

$$12ga^4 - a^2 - 1 = 0$$

видно, что при $g \rightarrow 0$ это решение на одном отрезке перестает существовать. Вакуумная энергия определяется как

$$E^0(g) - E^0(0) = -\frac{1}{24}(a^4 + 10a^2) - \frac{1}{2} \ln a^2 - \frac{3}{8}.$$

Б. Симметричное решение на двух отрезках с $\xi = 1/2$, где $g < 1/16$,

$$u_B = \frac{2g|\lambda|}{\pi} \sqrt{(\delta^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \gamma^2)}, \quad \gamma \leq \lambda \leq \delta,$$

$$\delta^2 = \frac{1}{4g} + \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{4g} - \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad D = \frac{1}{4g},$$

а вакуумная энергия определяется как

$$E^0(g) - E^0(0) = -\frac{1}{16g} + \frac{1}{4} \ln(4g) - \frac{3}{8}.$$

В. Решение с $\xi = 0$ (или 1) (решение с максимальной симметрией $U(N)$), где

$$u_C(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(2g\lambda^2 + 2g\sigma\lambda + 2g\sigma^2 + g\tau^2 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{(\sigma + \tau - \lambda)(\lambda - \sigma + \tau)},$$

$$\tau^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 60g}}{15g}, \quad \sigma^2 = \frac{3 + 2\sqrt{1 - 60g}}{20g}.$$

Теперь вернемся к более общей теории с $h \neq 0$ [18] и рассмотрим те же три решения.

А'. Для случая одного отрезка было найдено так называемое решение Даса–Дхара–Сенгупты–Вадиа [13], когда

$$u_A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2} + 4ga^2 + 2hD + 2g\lambda^2 \right) \sqrt{4a^2 - \lambda^2},$$

$$16gha^8 + (12g + 4h)a^4 - a^2 - 1 = 0, \quad D = \frac{16ga^6 - a^4}{1 - 4ha^4},$$

$$E^0(g, h) = \frac{3}{8} - 4ga^4 - 6g^2a^8 - \frac{1}{2} \ln a^2.$$

Б'. Рассмотрим симметричное решение на двух отрезках с $\xi = 1/2$, когда

$$u_B(\lambda) = \frac{2g|\lambda|}{\pi} \sqrt{(\delta^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \gamma^2)}, \quad \gamma \leq |\lambda| \leq \delta,$$

$$\delta^2 = \frac{1}{4(g+h)} + \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{4(g+h)} - \frac{1}{\sqrt{g}}. \quad (7)$$

Условием существования фазы будет $\gamma^2 \geq 0$. Это дает неравенство

$$g \geq 16(g+h)^2. \quad (8)$$

Если здесь $h = 0$, то $g \geq 1/16$.

Расчет пропагатора D и вакуумной энергии проводится на отрезках $[-\delta, -\gamma]$ и $[\gamma, \delta]$. В частности, получим, что

$$D = \frac{1}{4(g+h)}. \quad (9)$$

Правая часть уравнения (3) сведется к интегралу

$$\int_{\gamma}^{\delta} d\mu u(\mu) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Расчет вакуумной энергии, в отличие от предыдущих случаев, проведем по следующей формуле:

$$E(g, h) = 2 \int_{\gamma}^{\delta} d\lambda u(\lambda) \left(-\frac{1}{2}\lambda^2 + g\lambda^4 + 2hD\lambda^2 \right) - \int_{\gamma}^{\delta} d\mu u(\mu) \ln |\lambda^2 - \mu^2|.$$

После этого, вычитая нулевую энергию, получим

$$E^0(g, h) - E^0(0) = -\frac{g}{16(g+h)^2} + \frac{1}{4} \ln(4g) - \frac{3}{8}. \quad (10)$$

В'. Исследуем решение с $\xi = 0$ (или 1), когда

$$u_C(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(2g\lambda^2 + 2g\sigma\lambda + 2hD + 2g\sigma^2 + g\tau^2 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{(\sigma + \tau - \lambda)(\lambda - \sigma + \tau)}.$$

Уравнения, которые определяют τ , σ , D , имеют вид

$$\begin{aligned} 3g\tau^2 + 2g\sigma^2 - \frac{1}{2} + 2hD &= 0, \\ 3g\sigma^2\tau^2 - \frac{1}{4}\tau^2 + \frac{3}{4}g\tau^4 + hD\tau^2 &= 1, \\ D &= \frac{\tau^2}{2} \left(6g\sigma^4 + \frac{1}{2}g\tau^4 + 6g\sigma^2\tau^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{8}\tau^2 + hD \left(2\sigma^2 + \frac{1}{2}\tau^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Исключая σ и D , можно вывести уравнение для τ :

$$5g^2h\tau^8 + (11gh + 15g^2)\tau^4 - 2g\tau^2 + 4(g+h) = 0, \quad (11)$$

где σ и D связаны с τ как

$$\sigma^2 = \frac{3}{8}\tau^2 + \frac{1}{2g\tau^2}, \quad D = \frac{2\tau^2 - 15g\tau^4 - 4}{8h\tau^2}.$$

Чтобы найти область (g, h) определения физических величин, построим дискриминант данного алгебраического уравнения (11) для τ^2 . С помощью одного из множителей дискриминанта для этого уравнения найдем неравенство, которое определяет структуру разветвления корней как

$$225g \geq 4(45g + 41h)^2. \quad (12)$$

Сравнение неравенств (8) и (12) показывает, что парабола, ограничивающая область $\xi = 0$ (или 1) (кривая 2 на рисунке) располагается внутри другой параболы, соответствующей $\xi = 1/2$ (кривая 1).

4. ОБСУЖДЕНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Для рассматриваемой модели (1) плотность распределения имеет вид [5], [7]

$$u(\lambda) = \pm \frac{g}{\pi} (2\lambda + s) \sqrt{(d - \lambda)(\lambda - c)(\lambda - b)(\lambda - a)}, \quad (13)$$

где верхний знак соответствует отрезку $[c, d]$, а нижний – отрезку $[a, b]$. Напомним, что s задается формулой (6).

Асимптотические условия для генератора корреляционных функций

$$F(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda + 2g\lambda^3 + 2hD\lambda + \int_L d\mu \frac{u(\lambda)}{\lambda - \mu}$$

дают при $h = 0$ три уравнения, определяющие a, b, c, d :

$$s_1 = \frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{2g}, \quad (14)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}s^3 - \frac{1}{2g}s, \quad (15)$$

$$s_3 = \frac{5}{16}s^4 - \frac{3}{8g}s^2 + \frac{1}{16g^2} - \frac{1}{g}, \quad (16)$$

где

$$s_1 = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$s_2 = abc + abd + acd + bcd, \quad s_3 = abcd.$$

Заметим, что переход к случаю С с $\xi = 0$ происходит при

$$a = b = \frac{1}{4} \left(-s + \sqrt{\frac{8 - 5gs^2}{3}} \right). \quad (17)$$

Двухточечная корреляционная функция D и намагниченность M , которые определяются как

$$D = \int_{L_2} u(\lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad M = \int_{L_2} u(\lambda) \lambda d\lambda,$$

могут быть выражены через s , s_1 , s_2 и s_3 .

Тогда с помощью теоремы о вычетах эти характеристики примут вид

$$D = -\frac{g}{8} \left[8ss_1s_2 + s^2 \left(5s_3 - \frac{21}{4}s_1^2 \right) - 4s^3s_2 + \frac{55}{16}s^4s_1 - \frac{35}{64}s^6 + s_1^3 - 4s_1s_3 - 2s_2^2 \right],$$

$$M = -\frac{g}{8} \left[4s(2s_3 - s_1^2) - 5s^2s_2 + 4s^3s_1 - \frac{3}{4}s^5 + 4s_1s_2 \right],$$

или, при исключении s_1 , s_2 , s_3 ,

$$D = -\frac{5}{64}s^6g + \frac{3}{32}s^4 + \frac{s^2}{4} \left(1 - \frac{1}{16g} \right) + \frac{1}{4g}, \quad (18)$$

$$M = -\frac{3}{16}s^5g + \frac{1}{4}s^3 - \frac{1}{16g}s + s. \quad (19)$$

Численное решение системы (14)–(16) с учетом определения (5) для ξ показывает взаимную зависимость критического значения g и параметра ξ , ранее изученную в работе [5]. Здесь, например, при изменении g от 0.017 до 0.04 параметр ξ спадает от 0.752 до 0.520. Это является подтверждением того, что верхняя граница области существования решения с произвольным ξ лежит между двумя параболой, изображенными на рисунке.

Когда $h \neq 0$, плотность $u(\lambda)$ имеет такой же вид, а условия для границ отрезков выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{4}s^2 + F, & s_2 &= \frac{1}{2}s^3 + Fs, \\ s_3 &= \frac{5}{16}s^4 + \frac{3}{4}s^2F + \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{g}, \end{aligned}$$

где

$$F = -\frac{1}{2g} + \frac{2D}{g}h.$$

В этом случае выражения для D и M через s , s_1 , s_2 , s_3 не изменятся. В итоге могут быть получены уравнения

$$D = -\frac{5}{64}s^6g - \frac{3}{16}s^4g - \frac{1}{16}s^2F^2 - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}F, \quad (20)$$

$$M = -\frac{3}{16}s^5g - \frac{1}{2}s^3Fg - \frac{1}{4}sF^2g + s. \quad (21)$$

Рассмотрим частный случай. Следуя работе [7], чтобы замкнуть систему, положим b (или c) равным $-s/2$. Тогда выражение под корнем в формуле (13) равно нулю при $\lambda = -s/2$. Это приводит к уравнению для s вида

$$15s^4 - \frac{12}{g}s^2 + \left(\frac{1}{g^2} - \frac{16}{g} \right) = 0,$$

которое согласуется с условием нормировки $u(\lambda)$.

В случае $h \neq 0$ условие для s выглядит как

$$15s^4 + 24s^2F + 4F^2 - \frac{16}{g} = 0. \quad (22)$$

Для выражения интегралов

$$\int_{L_2} \lambda^k u(\lambda) d\lambda$$

через элементарные функции сделаем подстановку $\lambda = t + s/2$ и разложим многочлен под корнем в $u(\lambda)$ как

$$(t + s)(t + k)^2(l - t),$$

где $l = 2k$, $k = \sqrt{-s_1/3}$, $l = \sqrt[3]{4s_1s}$.

Здесь соответствующее интегрирование от $-s$ до l дает условие нормировки.

Интегралы более общего вида

$$I_k = \int_{-s}^l t^k \sqrt{(t + s)(l - t)} dt$$

приводятся к интегралам на отрезке, симметричном относительно нуля. С их помощью, например, можно вычислить намагниченность, которая совпадает с формулой (19).

Пропагатор, согласно выражению (4), после вычисления интегралов вида I_k определится из уравнения

$$D = \frac{g}{16^2}(175s^6 + 306Fs^4 + 96F^2s^2). \quad (23)$$

Исключая отсюда s с помощью формулы (22), можно найти систему для D , которая будет состоять из уравнений

$$395h^2t^6 + 12 \cdot 1801gh^2t^4 + 27 \cdot 32 \cdot 41g^2ht^3(t + 1) - 143 \cdot 384g^2h^2t^2 + \\ + 19 \cdot 27 \cdot 40 \cdot 64g^3ht(t + 1) + 27 \cdot 64 \cdot 400g^4(t + 1)^2 - 35^2 \cdot 64 \cdot 80g^3h^2 = 0, \quad (24)$$

$$D = \frac{t + 1}{4h}.$$

Уравнение для s имеет вид

$$25 \cdot 79g^2h^2s^{12} + 60(488g + 785h)ghs^8 - 125 \cdot 160ghs^6 + \\ + 24 \cdot 64(10g^2 + 3gh + 24h^2)s^4 - 3 \cdot 64^2(g + h)s^2 + 16 \cdot 64(1 - 16g) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, в работе были обобщены формулы для пропагатора и вакуумной энергии в симметричном случае при $h \neq 0$ и найдены области в плоскости (g, h) , в которых реализуются фазы $\xi = 0$ (или 1) и $\xi = 1/2$. Эти области фаз ограничены параболой и прямой $h = -g$. Вычислены также намагниченность и пропагатор в общем случае. Рассмотрен еще один частный случай решения для плотности распределения на двух отрезках.

Благодарности. Автор благодарен И. Я. Арефьевой и Л. О. Чехову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **72** (1974), 461.
- [2] W. T. Tutte, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 21; J. Koplik, A. Neveu, S. Nussinov, *Nucl. Phys. B*, **123** (1977), 109.
- [3] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, *Commun. Math. Phys.*, **59** (1978), 35.
- [4] Y. Shimamune, *Phys. Lett. B*, **108** (1982), 407.
- [5] И. Я. Арефьева, А. С. Илчев, В. К. Митрюшкин, “Фазовая структура матричной модели Голдстоуна в пределе больших N ”, *Тр. III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики* (Дубна, 1984), **1**, ОИЯИ, Дубна, 1984, 20.
- [6] G. M. Cicuta, L. Molinari, E. Montaldi, *Mod. Phys. Lett. A*, **1** (1986), 125.
- [7] G. M. Cicuta, L. Molinari, E. Montaldi, *J. Phys. A*, **20** (1987), L67.
- [8] J. Jurkiewicz, *Phys. Lett. B*, **245** (1990), 178; O. Lechtenfeld, *Int. J. Modern Phys. A*, **7** (1992), 2335; 7097; G. Akemann, *Nucl. Phys. B*, **482** (1996), 403; [hep-th/9606004](#); G. Bonnet, F. David, B. Eynard, *J. Phys. A*, **33** (2000), 6739; [cond-mat/0003324](#).
- [9] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644** (2002), 3; [hep-th/0206255](#); 21; [hep-th/0207106](#); *A perturbative window into non-perturbative physics*, [hep-th/0208048](#).
- [10] Л. О. Чехов, *УМН*, **61**:3 (2006), 93.
- [11] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.*, **254** (1995), 1; P. Ginsparg, G. Moore, *Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [12] F. David, *Nucl. Phys. B*, **257** (1985), 45; 543; V. A. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **150** (1985), 282; J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Frölich, *Nucl. Phys. B*, **257** (1985), 433.
- [13] S. Das, A. Dhar, A. Sengupta, S. Wadia, *Mod. Phys. Lett. A*, **5** (1990), 1041.
- [14] L. Alvarez-Gaumé, J. L. F. Barbón, Č. Crnković, *Nucl. Phys. B*, **394** (1993), 383.
- [15] G. P. Korchemsky, *Mod. Phys. Lett. A*, **7** (1992), 3081; *Phys. Lett. B*, **296** (1992), 323.
- [16] O. Aharony, M. Berkooz, E. Silverstein, *JHEP*, **08** (2001), 006; [hep-th/0105309](#).
- [17] E. Witten, *Multi-trace operators, boundary conditions, and AdS/CFT correspondence*, [hep-th/0112258](#).
- [18] A. O. Shishanin, “Some aspects of multitrace matrix models”, *Particle Physics at the Year of 250th Anniversary of Moscow University*, Proc. 12th Lomonosov Conf. on Elementary Particle Physics (Moscow, Russia, 2005), ed. A. I. Studenikin, World Sci. Publ., Singapore, 2006, 414.

Поступила в редакцию 16.10.2006,
после доработки 26.01.2007