Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Белавин, Рекуррентные соотношения для $N = 1$ суперсимметричных конформных блоков, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 476–487

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:05:48

© 2007 г.

В. А. Белавин*

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ

Приведены явные рекуррентные соотношения для четырехточечной функции суперконформных блоков, которые представляют собой частные вклады в четырехточечную корреляционную функцию, задаваемые данным конформным классом. Подход основан на аналитических свойствах суперконформных блоков как функций от конформных размерностей и центрального заряда суперконформной алгебры. Проведено сравнение результатов с явными аналитическими выражениями, полученными при специальных значениях параметров, отвечающих вырожденному операторному разложению. Эти рекуррентные соотношения представляют собой эффективный метод для численного исследования четырехточечной корреляционной функции в суперконформной теории поля в рамках бутстрапного подхода, подобно тому, что имеет место в случае чисто конформной симметрии.

Ключевые слова: $N = 1$ суперконформная теория поля, четырехточечные функции конформных блоков, рекуррентные соотношения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс, достигнутый в последнее время в полевой теории Лиувилля [1]–[3] и в двумерной квантовой гравитации Лиувилля [4]–[6], открывает возможности для новых приложений в струнной теории. Очень важным шагом в этом направлении оказываются суперсимметричные обобщения методов, используемых в бозонных теориях. Это особенно интересно, так как до сих пор не существует суперсимметричного обобщения техники матричных моделей, и поэтому подход, использующий суперсимметричную теорию Лиувилля, предложенный Поляковым [7], остается единственным перспективным методом. Одной из нерешенных проблем в этом подходе оказывается построение полного набора явных корреляционных функций минимальной супергравитации (минимальной суперструнной теории). Как и в бозонной конформной теории поля, основным методом вычислений в этой задаче является решение конформных уравнений бутстрапа. В этой программе важную роль играют функции конформных блоков [8]. К сожалению, замкнутые аналитические выражения для этих функций удастся найти только при некоторых специальных значениях

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy. E-mail: belavin@sisva.it

конформных размерностей рассматриваемых полей. В этой статье найдены рекуррентные соотношения для четырехточечных функций конформных блоков в секторе Невье–Шварца $N = 1$ суперсимметричной конформной теории поля, аналогичные соотношениям, найденным в работе [9] в бозонном случае. Последовательные итерации этих соотношений сходятся при достаточно малых x , что позволяет эффективно вычислить степенные разложения для корреляционных функций.

Структура статьи следующая. В разделе 2 кратко повторяются некоторые необходимые сведения из области $N = 1$ суперсимметричной конформной теории поля (см. более детальное изложение в работах [10], [11]). В разделе 3 вводятся функции суперконформных блоков и описываются их аналитические свойства. В разделе 4 описаны сингулярности суперконформных блоков как функций от размерностей полей. В разделе 5 обсуждается асимптотическое поведение конформных блоков как функций от центрального заряда c суперконформной алгебры и их сингулярности относительно c . После этого вводятся рекуррентные соотношения для функций суперконформных блоков. В разделе 6 обсуждается специальный вырожденный случай, в котором удается получить обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют исследуемые функции суперконформных блоков, и проверить рекуррентные соотношения при соответствующем выборе параметров. Заключительные замечания представлены в разделе 7.

2. $N = 1$ СУПЕРКОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Симметрия в суперконформной теории поля порождается голоморфными и антиголоморфными компонентами супертока S и тензора энергии-импульса T . Будучи представлена через лорановские компоненты S и T , алгебра принимает общепринятый вид алгебры Невье–Шварца–Рамона:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{8}(n^3 - n)\delta_{n,-m}, \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}c\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r,-s}, \\ [L_n, G_r] &= \left(\frac{1}{2}n - r\right)G_{n+r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $r, s \in \mathbb{Z} + 1/2$ в секторе Невье–Шварца, $r, s \in \mathbb{Z}$ в секторе Рамона. Мы параметризуем центральный заряд как обычно в теории Лиувилля:

$$c = 1 + 2Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}. \quad (2)$$

Локальные поля представляют собой представления со старшим весом для алгебры Невье–Шварца–Рамона. Каждое представление $[\Phi_\Delta]$ состоит из примарного поля конформной размерности Δ и всех его суперконформных потомков. Примарные суперполя Невье–Шварца¹⁾ имеют вид

$$\Phi_\Delta(z) = \Phi_\Delta(x) + \theta\Psi_\Delta(x), \quad \Psi_\Delta(z) = G_{-\frac{1}{2}}\Phi_\Delta(z), \quad (3)$$

¹⁾Для простоты рассматривается только голоморфная составляющая.

где x и θ – голоморфные координаты на $(2+2)$ -мерном суперпространстве (при этом через θ обозначена антикоммутирующая, “нечетная” координата). Введем также удобную параметризацию:

$$\Delta(\lambda) = \frac{Q^2}{8} - \frac{\lambda^2}{2}. \quad (4)$$

Поле Φ_{mn} , у которого индексы m и n – оба четные или оба нечетные положительные целые числа, отвечает “вырожденному” примарному полю в секторе Невье–Шварца, обладающему конформной размерностью $\Delta = \Delta(\lambda_{mn})$:

$$\lambda_{mn} = \frac{mb^{-1} + nb}{2}. \quad (5)$$

Общий вид оператора потомков в конформном классе $[\Phi_\Delta]$ следующий:

$$\mathcal{L}_{\vec{k}} |\Delta\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_n} G_{-r_1} \dots G_{-r_m} \Phi_\Delta, \quad (6)$$

где через $\vec{k}$ обозначен набор $\{k_i, r_j\}$, представляющий собой упорядоченное множество соответственно положительных целых и полуцелых чисел. Соотношение $\sum_i k_i + \sum_j r_j = N$ задает уровень модуля Верма, отвечающий суперконформному семейству $[\Phi_\Delta]$. Как обычно, тождества Уорда налагают ограничения на возможную зависимость корреляционных функций от координат. В частности, двухточечные функции полностью определены:

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle \sim \frac{\delta_{\Delta_1, \Delta_2}}{|z_{12}|^{4\Delta_1}}, \quad (7)$$

где $z_{ik} = x_i - x_k + \theta_i \theta_k$. Трехточечная функция содержит зависимость от произвольной функции от “нечетного” суперпроективного инвариантного трехточечного соотношения:

$$\theta_{123} = \frac{z_{23}\theta_1 + z_{31}\theta_2 + z_{12}\theta_3 - \theta_1\theta_2\theta_3}{(z_{12}z_{13}z_{23})^{1/2}}, \quad (8)$$

и может быть представлена в следующем виде:

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123} + |\theta_{123}|^2 \tilde{C}_{123}}{|z_{12}|^{2(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)} |z_{13}|^{2(\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2)} |z_{23}|^{2(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1)}}. \quad (9)$$

“Вырожденное” примарное поле Φ_{mn} содержит сингулярный вектор на уровне $N = mn/2$ [12]. Удобно ввести оператор рождения сингулярного вектора D_{mn} [13], который, будучи примененным к Φ_{mn} , порождает сингулярный вектор. Фиксируем нормировку, выбирая коэффициент при ведущем члене равным единице, $D_{mn} = G_{-1/2}^{mn} + \dots$. Первый нетривиальный нулевой вектор в секторе Невье–Шварца появляется на уровне $N = 3/2$:

$$D_{13} \Phi_{13} = (L_{-1} G_{-\frac{1}{2}} + b^2 G_{-\frac{3}{2}}) \Phi_{13} = 0. \quad (10)$$

3. ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И КОНФОРМНЫЕ БЛОКИ

Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию примарных суперполей в секторе Невье–Шварца $N = 1$ суперсимметричной конформной теории. Для четырехточечной корреляционной функции имеются три независимых суперпроективных инварианта, один “четный” и два “нечетных” (см., например, [11]). Применяя суперконформную инвариантность (аналогично рассмотрению в работе [5]), можно записать

$$\langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)\Phi_4(z_4) \rangle = |z_{34}|^{2\gamma_{34}}|z_{13}|^{2\gamma_{13}}|z_{23}|^{2\gamma_{23}}|z_{12}|^{2\gamma_{12}}g(z, \bar{z}, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{34} &= -2\Delta_4, \\ \gamma_{13} &= -\Delta_1 - \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_2, \\ \gamma_{23} &= -\Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_1, \\ \gamma_{12} &= -\Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3, \end{aligned} \quad (12)$$

и мы выбираем три независимых инварианта:

$$z = \frac{z_{41}z_{23}}{z_{43}z_{21}}, \quad \tau_1 = \theta_{213}, \quad \tau_2 = -[z(z-1)]^{1/2}\theta_{214}. \quad (13)$$

Принимая в расчет суперпроективную инвариантность, можно, например, фиксировать

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & \theta_2 &= 0, & \theta_3 &= R\eta, \\ x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= R, & x_4 &= x, \end{aligned} \quad (14)$$

где $R \rightarrow \infty$. Функция g связана с корреляционной функцией бозонных компонент супермультиплета (3):

$$\langle \Phi_1(0)\Phi_2(1)\Phi_3(\infty)\Phi_4(z) \rangle = g(z, \bar{z}, 0, 0, 0, 0) = g_0(z, \bar{z}). \quad (15)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением суперконформных блоков, дающих вклад в корреляционную функцию g_0 . Обобщение на оставшиеся компоненты очевидно.

Аналогично случаю чисто конформной симметрии [8] можно выписать разложение в s -канале для корреляционной функции g_0 :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(x)\Phi_2(0)\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) \rangle &= \sum_{\Delta} [C_{12}^{\Delta}C_{34}^{\Delta}F_0(\Delta, \Delta_i, x)F_0(\Delta, \Delta_i, \bar{x}) + \\ &\quad + \tilde{C}_{12}^{\Delta}\tilde{C}_{34}^{\Delta}F_1(\Delta, \Delta_i, x)F_1(\Delta, \Delta_i, \bar{x})]. \end{aligned} \quad (16)$$

Суперконформные блоки F_0 и F_1 определяются аналогично бозонному случаю (подробнее см., например, [14]):

$$\begin{aligned} F_0(\Delta, \Delta_i, c, x) &= x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{\substack{N \geq 0 \\ N \in \mathbb{Z}}} x^N {}_{12}\langle N | N \rangle_{34}, \\ F_1(\Delta, \Delta_i, c, x) &= x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{\substack{N > 0 \\ N \in \mathbb{Z}+1/2}} x^N {}_{12}\langle N | N \rangle_{34}, \end{aligned} \quad (17)$$

где вектор $|N\rangle$ представляет собой вклад потомков на N -м уровне, приходящий от промежуточного состояния с конформной размерностью Δ , возникающего в операторном разложении $\Phi(x)\Phi(0)$:

$$[\Phi_1(x)\Phi_2(0)]_\Delta = x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{N=0}^{\infty} x^N |N\rangle_{12}, \quad (18)$$

где $|N\rangle_{12} = Q_{12}(N, \Delta)|\Delta\rangle$, $Q_{12}(N, \Delta) = \sum \beta_{12}(\vec{k}) \mathcal{L}_k^{(N)}$, а $\mathcal{L}_k$ определено в (6) (предполагается суммирование по всем потомкам на N -м уровне). Векторы $|N\rangle_{12}$ зависят не только от конформной размерности Δ и центрального заряда c , но также от размерностей полей Φ_1 и Φ_2 , и поэтому мы присваиваем оператору Q соответствующий индекс. Векторы $|N\rangle_{12}$, равно как и векторы $|\tilde{N}\rangle_{12} = \tilde{Q}(N, \Delta)|\Delta\rangle$, появляющиеся в операторном разложении $\Psi_1(x)\Phi_2(0)$,

$$[\Psi_1(x)\Phi_2(0)]_\Delta = x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} x^N |\tilde{N}\rangle_{12}, \quad (19)$$

полностью задаются суперконформной симметрией. А именно, суперконформные связи приводят к соотношениям на векторы цепочки, растущей из вакуумного вектора $|\Delta\rangle$,

$$G_k |N\rangle_{12} = |\widetilde{N-k}\rangle_{12}, \quad (20)$$

$$G_k |\tilde{N}\rangle_{12} = [\Delta + 2k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k] |N-k\rangle_{12}$$

при $k > 0$. Из определения (17) и из свойств уравнений (20) можно получить, что начиная с уровня $mn/2$ функции F_0 и F_1 имеют простые полюсы при $\Delta = \Delta_{mn}(c)$. Аналогично из этого соотношения следует, что конформные блоки, как функции центрального заряда c , имеют один простой полюс для каждой пары положительных целых чисел m и n ($n > 1$) при $c = c_{mn}(\Delta)$, где

$$c_{mn} = 5 + 2(T_{mn} + T_{mn}^{-1}),$$

$$T_{mn} = \frac{1 - 4\Delta - mn + \sqrt{[(mn-1) + 4\Delta]^2 - (m^2-1)(n^2-1)}}{n^2-1}. \quad (21)$$

Вычеты функций F_0 и F_1 в этих полюсах пропорциональны функциям конформных блоков, отвечающих инвариантному подклассу, возникающему на $mn/2$ уровне, на котором старший вектор представляет собой новое примарное поле с конформной размерностью $\Delta_{mn} = \Delta + mn/2$ (см. аналогичное рассмотрение в работах [9] и [14]). Сингулярная часть этого выражения вкратце обсуждается в следующем разделе.

4. СТРУКТУРА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ ВЕКТОРОВ ЦЕПОЧКИ

Сингулярная структура векторов цепочки будет рассмотрена более детально в следующей публикации. Здесь же будут представлены только основные результаты,

касающиеся сингулярностей векторов цепочки, введенных в (20). При $\Delta \rightarrow \Delta_{mn}$

$$\begin{aligned} \left| N = \frac{mn}{2} \right\rangle &\rightarrow \frac{X_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} D_{mn} |\Delta\rangle, \\ \left| \widetilde{N = \frac{mn}{2}} \right\rangle &\rightarrow \frac{\bar{X}_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} D_{mn} |\Delta\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Чтобы получить зависимость коэффициентных функций X_{mn} и $\bar{X}_{mn}$ от внешних размерностей, заметим, что при $\Delta = \Delta_{mn}(c)$ векторы цепочки все еще будут хорошо определены, если удовлетворяются некоторые правила “слияния” [8] между Δ и Δ_i . Исследование правил “слияния”, основанное на анализе структурных функций [10], приводит к выражениям

$$\begin{aligned} X_{mn} &= \begin{cases} 2^{-mn/2} \frac{P_{mn}(\lambda_1 + \lambda_2) P_{mn}(\lambda_1 - \lambda_2)}{r'_{mn}}, & m, n \text{ четные,} \\ 2^{-(1-mn)/2} \frac{P_{mn}(\lambda_1 + \lambda_2) P_{mn}(\lambda_1 - \lambda_2)}{r'_{mn}}, & m, n \text{ нечетные,} \end{cases} \\ \bar{X}_{mn} &= \begin{cases} 2^{-mn/2} \frac{\bar{P}_{mn}(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{P}_{mn}(\lambda_1 - \lambda_2)}{r'_{mn}}, & m, n \text{ четные,} \\ 2^{-(1+mn)/2} \frac{\bar{P}_{mn}(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{P}_{mn}(\lambda_1 - \lambda_2)}{r'_{mn}}, & m, n \text{ нечетные.} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$P_{mn} = \prod_{(r,s) \in [m,n]} (\lambda - \lambda_{rs}),$$

где

$$[m, n] = \{1 - m : 4 : m - 3, 1 - n : 4 : n - 3\} \cup \{3 - m : 4 : m - 1, 3 - n : 4 : n - 1\},$$

когда оба числа m и n четны, и

$$[m, n] = \{3 - m : 4 : m - 3, 1 - n : 4 : n - 1\} \cup \{1 - m : 4 : m - 1, 3 - n : 4 : n - 3\},$$

когда оба числа m и n нечетны;

$$\bar{P}_{mn} = \prod_{(r,s) \in [\overline{m}, \overline{n}]} (\lambda - \lambda_{rs}),$$

где

$$[\overline{m}, \overline{n}] = \{1 - m : 4 : m - 3, 3 - n : 4 : n - 1\} \cup \{3 - m : 4 : m - 1, 1 - n : 4 : n - 3\},$$

когда оба числа m и n четны, и

$$[\overline{m}, \overline{n}] = \{3 - m : 4 : m - 3, 3 - n : 4 : n - 3\} \cup \{1 - m : 4 : m - 1, 1 - n : 4 : n - 1\},$$

когда оба числа m и n нечетны. Простой анализ соотношений (20) приводит к выводу, что множитель r'_{mn} зависит только от c и Δ . В последующей публикации будет прояснено, что этот коэффициент связан с нормой соответствующего сингулярного вектора,

$$\|D_{mn} |\Delta\rangle\|^2 = r'_{mn} (\Delta - \Delta_{mn}) \quad (24)$$

при $\Delta \rightarrow \Delta_{mn}$. Принимая в расчет результаты работы [13], запишем

$$r'_{mn} = \frac{r_{mn}}{\lambda_{mn}}, \quad (25)$$

где

$$r_{mn} = 2^{1-mn} \prod_{(k,l) \in [m,n]} (kb^{-1} + lb),$$

$$[m, n] = \{1 - m : 2 : m - 1, 1 - n : 2 : n - 1\} \cup \{2 - m : 2 : m, 2 - n : 2 : n\} \setminus (0, 0).$$

Выражения вида $a : d : b$ (“от a до b с шагом d ”) в формулах выше обозначают наборы чисел $a, a + d, a + 2d, \dots, b$. Через $\{A, B\}$ обозначено множество пар (k, l) , в которых k и l независимо пробегают множества A и B , а $\{A_1, B_1\} \cup \{A_2, B_2\}$ обозначает стандартное объединение двух множеств. Наконец, “ $\dots \setminus (0, 0)$ ” означает исключение пары индексов $(0, 0)$ из набора.

Таким же образом векторы цепочки при $N > mn/2$ также обладают простыми полюсами при $\Delta = \Delta_{mn}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| N \geq \frac{mn}{2} \right\rangle &\rightarrow \begin{cases} \frac{X_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} Q(N - \frac{mn}{2}, \Delta_{mn} + \frac{mn}{2}) D_{mn} | \Delta \rangle, & N - \frac{mn}{2} \text{ целое,} \\ \frac{\bar{X}_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} Q(N - \frac{mn}{2}, \Delta_{mn} + \frac{mn}{2}) D_{mn} | \Delta \rangle, & N - \frac{mn}{2} \text{ полуцелое,} \end{cases} \\ \left| \widetilde{N \geq \frac{mn}{2}} \right\rangle &\rightarrow \begin{cases} \frac{\bar{X}_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} \tilde{Q}(N - \frac{mn}{2}, \Delta_{mn} + \frac{mn}{2}) D_{mn} | \Delta \rangle, & N - \frac{mn}{2} \text{ целое,} \\ \frac{X_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} \tilde{Q}(N - \frac{mn}{2}, \Delta_{mn} + \frac{mn}{2}) D_{mn} | \Delta \rangle, & N - \frac{mn}{2} \text{ полуцелое.} \end{cases} \end{aligned}$$

5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрение в предыдущем разделе приводит к соотношениям на конформные блоки, рассматриваемые как функции внутренней конформной размерности Δ :

$$\begin{aligned} F_0(\Delta \rightarrow \Delta_{mn}, \Delta_i, c, x) &= \begin{cases} \frac{R_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} F_0(\Delta_{m,-n}, \Delta_i, c, x), & m, n \text{ четные,} \\ \frac{\bar{R}_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} F_1(\Delta_{m,-n}, \Delta_i, c, x), & m, n \text{ нечетные,} \end{cases} \\ F_1(\Delta \rightarrow \Delta_{mn}, \Delta_i, c, x) &= \begin{cases} \frac{\bar{R}_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} F_1(\Delta_{m,-n}, \Delta_i, c, x), & m, n \text{ четные,} \\ \frac{R_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} F_0(\Delta_{m,-n}, \Delta_i, c, x), & m, n \text{ нечетные,} \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$R_{mn} = X_{mn}^{(12)} X_{mn}^{(34)} r'_{mn}, \quad \bar{R}_{mn} = \bar{X}_{mn}^{(12)} \bar{X}_{mn}^{(34)} r'_{mn}. \quad (27)$$

Тем самым вычеты в полюсах конформных блоков, рассматриваемых как функции центрального заряда c , также полностью определены:

$$\begin{aligned} F_0(\Delta, \Delta_i, c \rightarrow c_{mn}, x) &= \begin{cases} \frac{R'_{mn}}{c - c_{mn}} F_0(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x), & m, n \text{ четные,} \\ \frac{\bar{R}'_{mn}}{c - c_{mn}} F_1(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x), & m, n \text{ нечетные,} \end{cases} \\ F_1(\Delta, \Delta_i, c \rightarrow c_{mn}, x) &= \begin{cases} \frac{\bar{R}'_{mn}}{c - c_{mn}} F_1(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x), & m, n \text{ четные,} \\ \frac{R'_{mn}}{c - c_{mn}} F_0(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x), & m, n \text{ нечетные,} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

где c_{mn} задано в (21), а коэффициенты R_{mn} и R'_{mn} по существу совпадают и отличаются только заменой переменной:

$$R'_{mn} = R_{mn}(c_{mn}) \left(\frac{\partial \Delta_{mn}}{\partial c} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial \Delta_{mn}}{\partial c} = \frac{1}{16} \frac{(n^2 - 1)T_{mn} - (m^2 - 1)T_{mn}^{-1}}{T_{mn} - T_{mn}^{-1}}.$$

При $c = \infty$ соотношения (20) упрощаются и могут быть решены явно. Это приводит к выражениям для асимптотических значений F_0 и F_1 в терминах гипергеометрических функций:

$$F_0(c \rightarrow \infty) = f_0(\Delta, \Delta_i, x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} {}_2F_1(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2, \Delta + \Delta_3 - \Delta_4, 2\Delta, x),$$

$$F_1(c \rightarrow \infty) = f_1(\Delta, \Delta_i, x) = \frac{1}{2\Delta} x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2} \times$$

$$\times {}_2F_1(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2, \Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1/2, 2\Delta + 1, x).$$

Таким образом, ясно, что можно выписать следующие соотношения для конформных блоков F_0 и F_1 :

$$F_0(\Delta, \Delta_i, c, x) = f_0(\Delta, \Delta_i, x) + \sum_{\substack{\{m,n\} \\ m,n \text{ четные}}} \frac{R'_{mn}}{c - c_{mn}} F_0\left(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\{m,n\} \\ m,n \text{ нечетные, } n > 1}} \frac{\bar{R}'_{mn}}{c - c_{mn}} F_1\left(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x\right),$$

$$F_1(\Delta, \Delta_i, c, x) = f_1(\Delta, \Delta_i, x) + \sum_{\substack{\{m,n\} \\ m,n \text{ четные}}} \frac{\bar{R}'_{mn}}{c - c_{mn}} F_1\left(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x\right) + \quad (29)$$

$$+ \sum_{\substack{\{m,n\} \\ m,n \text{ нечетные, } n > 1}} \frac{R'_{mn}}{c - c_{mn}} F_0\left(\Delta + \frac{mn}{2}, \Delta_i, c_{mn}, x\right).$$

Можно разложить выражения для F_0 и F_1 в ряды по x , итерируя уравнения (29):

$$F_0(\Delta, \Delta_i, c, x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{k=0}^{\infty} F_0^{(k)} x^k,$$

$$F_1(\Delta, \Delta_i, c, x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2} \sum_{k=0}^{\infty} F_1^{(k)} x^k. \quad (30)$$

Для краткости в дальнейшем опустим зависимость от внешних размерностей, которая ниже всюду одна и та же. Применяя рекуррентные соотношения (29), можно легко найти первые члены разложения:

$$F_0^{(0)} = f_0^{(0)}(\Delta),$$

$$\begin{aligned}
F_0^{(1)} &= f_0^{(1)}(\Delta), \\
F_0^{(2)} &= f_0^{(2)}(\Delta) + \frac{\overline{R}'_{13}}{c - c_{13}} f_1^{(0)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right) + \frac{R'_{22}}{c - c_{22}} f_0^{(0)}(\Delta + 2), \\
F_1^{(0)} &= f_1^{(0)}(\Delta), \\
F_1^{(1)} &= f_1^{(1)}(\Delta) + \frac{\overline{R}'_{13}}{c - c_{13}} f_0^{(0)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right), \\
F_1^{(2)} &= f_1^{(2)}(\Delta) + \frac{R'_{13}}{c - c_{13}} f_0^{(1)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right) + \frac{\overline{R}'_{22}}{c - c_{22}} f_1^{(0)}(\Delta + 2) + \frac{R'_{15}}{c - c_{15}} f_0^{(0)}\left(\Delta + \frac{5}{2}\right).
\end{aligned} \tag{31}$$

Используя формулы (27) вместе с выражениями, полученными в предыдущем разделе, можно выписать явно первые коэффициенты:

$$F_0^{(0)} = 1, \tag{32}$$

$$F_0^{(1)} = (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(2\Delta)^{-1}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
F_0^{(2)} &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(1 + \Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(1 + \Delta + \Delta_3 - \Delta_4) \times \\
&\times [4\Delta(1 + 2\Delta)]^{-1} + [\Delta^2 - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 2\Delta(\Delta_1 + \Delta_2)] \times \\
&\times [\Delta^2 - 3(\Delta_3 - \Delta_4)^2 + 2\Delta(\Delta_3 + \Delta_4)] \times \\
&\times [2\Delta(3 + 2\Delta)(-3 + 3c + 16\Delta)]^{-1} + \\
&+ [\Delta_1 - 2(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta_2 + \Delta(-1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2)] \times \\
&\times [\Delta_3 - 2(\Delta_3 - \Delta_4)^2 + \Delta_4 + \Delta(-1 + 2\Delta_3 + 2\Delta_4)] \times \\
&\times \{[c + 2(-3 + c)\Delta + 4\Delta^2][3 + 4\Delta(2 + \Delta)]\}^{-1},
\end{aligned} \tag{34}$$

$$F_1^{(0)} = (2\Delta)^{-1}, \tag{35}$$

$$F_1^{(1)} = (1 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(1 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)[8\Delta(1 + 2\Delta)]^{-1}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(2)} &= 128^{-1}(1 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(3 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2) \times \\
&\times (1 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)(3 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4) \times \\
&\times [\Delta(1 + 3\Delta + 2\Delta^2)]^{-1} + \\
&+ (3 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(\Delta_1 - \Delta_2)(3 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4) \times \\
&\times (\Delta_3 - \Delta_4)\{[c + 2(-3 + c)\Delta + 4\Delta^2][3 + 4\Delta(2 + \Delta)]\}^{-1} + \\
&+ \{1 + 4\Delta_1 + 4\Delta_2 + 2[-6(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta(-1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2)]\} \times \\
&\times (\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_3, \Delta_4) \times \\
&\times \{64\Delta(1 + \Delta)(2 + \Delta)[5 - 11\Delta + 2\Delta^2 + 3c(1 + \Delta)]\}^{-1} + \\
&+ \{3(-1 + 4\Delta_1 + 4\Delta_2) + 4[\Delta^2 - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \\
&+ \Delta(1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2)]\} \times \\
&\times (\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_3, \Delta_4)[64\Delta(2 + \Delta)(3 + 2\Delta)(-3 + 3c + 16\Delta)]^{-1}.
\end{aligned} \tag{37}$$

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОТВЕЧАЮЩИЕ НУЛЕВОМУ ВЕКТОРУ (1, 3)

Поскольку сингулярный вектор (10) обращается в нуль, выполнено дифференциальное уравнение

$$\left\{ -b^{-2}\partial_4 D_4 + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{2\Delta_i}{z_{4i}^2} \theta_{4i} + \frac{1}{z_{4i}} [2\theta_{4i} \partial_i - D_i] \right\} \right\} \langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \Phi_{13}(z_4) \rangle = 0, \quad (38)$$

где $D = \partial_\theta - \theta \partial_x$. С учетом (11) это уравнение сведется к дифференциальному уравнению на $g(z, \bar{z}, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2)$:

$$\begin{aligned} & \left[-b^{-2}\partial_4 D_4 - b^{-2} \frac{\gamma_{34}}{z_{34}} (\theta_{43} \partial_4 - D_4) + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{2\Delta_i}{z_{4k}^2} \theta_{4i} + \frac{1}{z_{4i}} (2\theta_{4i} \partial_i - D_i) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_{12}(\theta_{41} + \theta_{42})}{z_{41} z_{42}} + \frac{\gamma_{13}(\theta_{41} + \theta_{43})}{z_{41} z_{43}} + \frac{\gamma_{23}(\theta_{42} + \theta_{43})}{z_{42} z_{43}} + \frac{\gamma_{34} \theta_{43}}{z_{43}^2} \right] g = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

В соответствии с (15) представим $g = g_0(z) + g_1(z)\tau_1 + g_2(z)\tau_2 + g_3(z)\tau_1\tau_2$ (также не забывая про антиголоморфную зависимость). Уравнение (39) расщепляется на две независимых системы обыкновенных дифференциальных уравнений для g_i . Для целей данной работы выпишем явно систему для g_0 и g_3 :

$$\begin{aligned} & -b^{-2} z g_0'' + \frac{3z-2}{z-1} g_0' + b^{-2} g_3' + \left[\frac{\gamma_{13}}{z} + \frac{\gamma_{23}}{z-1} \right] g_0 + \frac{1-2z}{z(z-1)} g_3 = 0, \\ & b^{-2} g_0'' + \frac{1-3z}{z(z-1)} g_0' + \left[\frac{2\Delta_1}{z^2} + \frac{2\Delta_2}{(z-1)^2} + \frac{2\gamma_{12}}{z(z-1)} \right] g_0 + \frac{1}{z(z-1)} g_3 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Три независимых решения для g_0 с диагональной монодромией в окрестности точки $x = 0$ представляют собой конформные блоки в s -канале при специальном выборе параметров $\Delta_1 = \Delta_{13}$, $\Delta_2 = \Delta(\lambda_1)$, $\Delta_3 = \Delta(\lambda_2)$, $\Delta_4 = \Delta(\lambda_3)$ и $\Delta = \Delta^{(\pm)} = \Delta(\lambda_1 \pm b)$ или $\Delta = \Delta^{(0)} = \Delta(\lambda_1)$, отвечающем общей нормировке $A_0^{(\pm)} = 1$, $A_0^{(0)} = 1/(2\Delta(\lambda_1))$:

$$\begin{aligned} g_0^{(\pm)} &= x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\pm)} x^n = F_0(\Delta^{(\pm)}, \Delta_i, c, x), \\ g_0^{(0)} &= x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} x^n = F_1(\Delta^{(0)}, \Delta_i, c, x). \end{aligned} \quad (41)$$

Первые члены разложения в ряд можно легко найти, подставляя эти разложения в дифференциальные уравнения (40) и разрешая рекуррентные соотношения на коэффициенты порядок за порядком (что было сделано с помощью программы Matematika):

$$\begin{aligned} A_0^{(+)} &= 1, \\ A_1^{(+)} &= (1 + 2b^2 - 3b^4 - 8b^3\lambda_1 - 4b^2\lambda_1^2 - 4b^2\lambda_2^2 + 4b^2\lambda_3^2) [4(-1 + b^2 + 2b\lambda_1)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(+)} = & (21 + 4b^2 - 90b^4 + 84b^6 - 19b^8 - 62b\lambda_1 - 152b^3\lambda_1 + 380b^5\lambda_1 - 184b^7\lambda_1 + \\
& + 18b^9\lambda_1 + 8b^2\lambda_1^2 + 432b^4\lambda_1^2 - 472b^6\lambda_1^2 + 96b^8\lambda_1^2 + 112b^3\lambda_1^3 - 416b^5\lambda_1^3 + \\
& + 176b^7\lambda_1^3 - 112b^4\lambda_1^4 + 128b^6\lambda_1^4 + 32b^5\lambda_1^5 - 72b^2\lambda_2^2 + 176b^4\lambda_2^2 - 40b^6\lambda_2^2 + \\
& + 240b^3\lambda_1\lambda_2^2 - 288b^5\lambda_1\lambda_2^2 + 48b^7\lambda_1\lambda_2^2 - 224b^4\lambda_1^2\lambda_2^2 + 128b^6\lambda_1^2\lambda_2^2 + 64b^5\lambda_1^3\lambda_2^2 - \\
& - 48b^4\lambda_2^4 + 32b^5\lambda_1\lambda_2^4 + 24b^2\lambda_3^2 - 144b^4\lambda_3^2 + 56b^6\lambda_3^2 - 112b^3\lambda_1\lambda_3^2 + 288b^5\lambda_1\lambda_3^2 - \\
& - 48b^7\lambda_1\lambda_3^2 + 160b^4\lambda_1^2\lambda_3^2 - 128b^6\lambda_1^2\lambda_3^2 - 64b^5\lambda_1^3\lambda_3^2 + 96b^4\lambda_2^2\lambda_3^2 - 64b^5\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 - \\
& - 48b^4\lambda_3^4 + 32b^5\lambda_1\lambda_3^4) [64(-1 + b\lambda_1)(-3 + b^2 + 2b\lambda_1)(-1 + b^2 + 2b\lambda_1)]^{-1}, \\
A_0^{(0)} = & 4b^2[(1 + b^2 - 2b\lambda_1)(1 + b^2 + 2b\lambda_1)]^{-1}, \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^{(0)} = & [-2b^4(9 + 6b^2 + b^4 - 4b^2\lambda_1^2 - 8\lambda_2^2 - 4b^2\lambda_2^2 + 8\lambda_3^2 + 4b^2\lambda_3^2)] \times \\
& \times [(1 + b^2 - 2b\lambda_1)(3 + b^2 - 2b\lambda_1)(1 + b^2 + 2b\lambda_1)(3 + b^2 + 2b\lambda_1)]^{-1}, \\
A_2^{(0)} = & [b^2(-72 - 534b^2 - 287b^4 + 48b^6 + 62b^8 + 14b^{10} + b^{12} + 32b^2\lambda_1^2 + 288b^4\lambda_1^2 - \\
& - 8b^6\lambda_1^2 - 48b^8\lambda_1^2 - 8b^{10}\lambda_1^2 - 32b^6\lambda_1^4 + 16b^8\lambda_1^4 + 544b^2\lambda_2^2 + 128b^4\lambda_2^2 - \\
& - 200b^6\lambda_2^2 - 80b^8\lambda_2^2 - 8b^{10}\lambda_2^2 - 128b^4\lambda_1^2\lambda_2^2 + 32b^8\lambda_1^2\lambda_2^2 + 128b^4\lambda_2^4 + 96b^6\lambda_2^4 + \\
& + 16b^8\lambda_2^4 - 256b^2\lambda_3^2 + 208b^4\lambda_3^2 + 328b^6\lambda_3^2 + 96b^8\lambda_3^2 + 8b^{10}\lambda_3^2 - 64b^6\lambda_1^2\lambda_3^2 - \\
& - 32b^8\lambda_1^2\lambda_3^2 - 256b^4\lambda_2^2\lambda_3^2 - 192b^6\lambda_2^2\lambda_3^2 - 32b^8\lambda_2^2\lambda_3^2 + 128b^4\lambda_3^4 + 96b^6\lambda_3^4 + \\
& + 16b^8\lambda_3^4)] [2(1 + b^2 - 2b\lambda_1)(3 + b^2 - 2b\lambda_1)(5 + b^2 - 2b\lambda_1) \times \\
& \times (1 + b^2 + 2b\lambda_1)(3 + b^2 + 2b\lambda_1)(5 + b^2 + 2b\lambda_1)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Эти выражения совпадают с выражениями для соответствующих коэффициентов (32)–(34) и (35)–(37), вычисленными при тех же значениях параметров, что подтверждает справедливость рекуррентных соотношений (29).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рекуррентные соотношения (29) для функций суперконформных блоков и их проверка в разделе 6 представляют собой основной результат данной работы. С помощью этих соотношений можно эффективно вычислять суперконформные блоки при произвольных значениях параметров. Они подходят также и для численных вычислений четырехточечных корреляционных функций как для примарных полей общего вида в секторе Невье–Шварца, так и для вырожденных примарных полей в частности. Заметим, что для четырехточечных конформных блоков (а также для суперконформных блоков) имеет место [9], [15] так называемое q -представление рекуррентных соотношений, которое оказывается предпочтительным, так как оно сходится всюду в комплексной плоскости с тремя выколотыми точками.

Представления вида (16) можно выписать также и для высших многоточечных корреляционных функций. Они включают в себя многоточечные конформные блоки, которые имеют структуру, гораздо более сложную, чем четырехточечные блоки. Мы надеемся, что подход, предложенный в этой статье, окажется плодотворным при решении чрезвычайно интересной задачи обобщения рекуррентных соотношений на

высшие многоточечные конформные блоки и, в частности, при исследовании вопроса о соответствующих обобщенных q -представлениях.

Благодарности. Автор признателен А. А. Белавину и Ал. Б. Замолодчикову за полезные обсуждения и за возможность использовать наши совместные результаты до их опубликования. Автор также благодарен Дж. Дельфино и Дж. Муссардо за поддержку и интерес к его работе. Автор благодарен SISSA (Триест, Италия) за гостеприимство в период выполнения работы и INFN за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477** (1996), 577–605; *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, [hep-th/9506136](#).
- [2] H. Dorn, H.-J. Otto, *Nucl. Phys. B*, **429** (1994), 375–388; [hep-th/9403141](#).
- [3] J. Teschner, *Class. Quantum Grav.*, **18** (2001), R153–R222; [hep-th/0104158](#).
- [4] Al. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:suppl2 (2004), 510–523; [hep-th/0312279](#).
- [5] Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **142** (2005), 218–234; [hep-th/0505063](#).
- [6] А. А. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **147** (2006), 339–371.
- [7] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103** (1981), 211–213.
- [8] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241** (1984), 333–380.
- [9] Al. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **96** (1984), 419–422.
- [10] Ал. Б. Замолодчиков, Р. Погосян, *ЯФ*, **47** (1988), 1461–1474.
- [11] L. Alvarez-Gaumé, Ph. Zaugg, *Ann. Phys.*, **215** (1992), 171–230; [hep-th/9109050](#).
- [12] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [13] А. А. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *Письма в ЖЭТФ*, **84** (2006), 496–502; [hep-th/0610316](#).
- [14] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Conformal field theory and 2-D critical phenomena. Part III. Conformal bootstrap and degenerate representations of conformal algebra*, ИТЕР-90-31, 1990.
- [15] Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **73** (1987), 103–110.

Поступила в редакцию 1.12.2006