Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Андреев, Обобщенное неравенство Белла и метод его проверки, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 488–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:41:04

© 2007 г.

В. А. Андреев*

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА И МЕТОД ЕГО ПРОВЕРКИ

С помощью редукции матрицы плотности двучастичного спинового состояния построено обобщенное неравенство Белла–Клаузера–Хорне–Шимони–Хольта. Для каждого конкретного состояния при специальном выборе векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ оно превращается в точное равенство. Показано, как с помощью редуцированной матрицы плотности можно находить такие векторы. Обе части этого равенства имеют конкретное численное значение. Указано на связь этого числа с мерой запутанности двучастичного спинового состояния.

Ключевые слова: квантовая механика, запутанные состояния, матрица плотности, неравенство Белла.

1. ВВЕДЕНИЕ

Неравенства Белла–Клаузера–Хорне–Шимони–Хольта (БКХШХ) [1], [2] широко используются для анализа свойств запутанности двучастичных спиновых состояний. Их левая часть выражается через средние значения спиновой корреляции. Каждая такая величина $E(\vec{a}, \vec{b})$ зависит от двух единичных векторов, задающих направления в пространстве, для которых измеряют проекции спинов частиц, образующих коррелированную пару. Вся левая часть неравенства зависит от четырех единичных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Проверка неравенств БКХШХ состоит в том, что их левая часть (ЛН) измеряется при различных направлениях этих векторов и далее выбирается максимальное значение результата измерения. Если это максимальное значение ЛН > 2 , то делается вывод, что для данного состояния неравенство БКХШХ нарушается. Такая проверка проводилась рядом экспериментальных групп [3]–[8]. При этом следует учитывать, что результат измерения зависит и от того, какое именно двучастичное состояние используется в эксперименте [9]. Факт нарушения неравенств БКХШХ обычно связывают с отсутствием в квантовой теории скрытых параметров, ее возможной нелокальностью и другими фундаментальными проблемами [10]–[18]. Кроме того, по результатам измерений можно получить ответ на вопрос о том, с какими состояниями имеют дело в эксперименте: запутанными, сепарабельными или факторизуемыми.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: andrvtlad@yandex.ru

Но, чтобы сделать определенный вывод, следует быть уверенным, что при измерениях был получен именно максимальный результат. Для этого желательно заранее знать, при каких положениях векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ этот результат достигается.

Неравенство БКХШХ, полученное в рамках модели скрытых переменных, имеет вид

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{c}) + E(\vec{d}, \vec{b}) - E(\vec{d}, \vec{c})| \leq 2. \quad (1)$$

Оно выполняется для чистых факторизуемых состояний, и при определенных положениях векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ левая часть неравенства (1) достигает своего максимального значения – неравенство переходит в равенство. Неравенство (1) также выполняется для сепарабельных состояний и для некоторых классов запутанных смешанных состояний. При этом для них левая часть неравенства (1) может не только не достигать максимального значения, но и быть сколь угодно малой.

Более общее неравенство БКХШХ имеет вид

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{c}) + E(\vec{d}, \vec{b}) - E(\vec{d}, \vec{c})| \leq 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

Это неравенство выполняется для всех двучастичных спиновых состояний, однако не для каждого состояния его левая часть ЛН достигает максимального значения $2\sqrt{2}$. Это значение можно получить только для чистых максимально запутанных состояний. Для всех остальных двучастичных спиновых состояний максимальное значение левой части неравенства (2) меньше $2\sqrt{2}$. Интерпретация неравенства БКХШХ в рамках метода квантовой томографии обсуждалась в работе [19].

При экспериментальной проверке неравенства БКХШХ важно знать не только максимальное значение левой части неравенства (2), но и те векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, при которых это значение достигается для данного состояния. Именно эти значения векторов и следует реализовать в экспериментальной установке.

В данной работе мы покажем, каким образом можно находить эти векторы для конкретных двучастичных спиновых состояний. Для этого будут использованы техника редукции матрицы плотности двучастичных спиновых состояний и построенное с ее помощью обобщенное неравенство БКХШХ. Это неравенство было предложено в работах [20], [21], но его строгого доказательства не приводилось. Здесь мы приводим это доказательство, которое одновременно дает и процедуру выбора оптимального набора векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

Рассмотрены конкретные примеры двучастичных спиновых состояний, как чистых, так и смешанных. Указано также на связь величины ЛН с мерой запутанности двучастичного спинового состояния.

2. ОБОБЩЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА БКХШХ

Неравенства Белла строятся для наблюдаемой величины $E(\vec{a}, \vec{b})$, называемой спиновой корреляцией. Она определяется как учетверенное среднее значение произведений проекций спина первой частицы на ось $\vec{a}$, а второй частицы на ось $\vec{b}$.

Спиновая корреляция измеряется следующим образом. Пусть имеется источник пар коррелированных частиц со спином $S = 1/2$ и две оси в конфигурационном

пространстве, которые задаются единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Последовательно проводится измерение проекций на эти оси спинов частиц из N таких пар. После чего строится величина

$$E_N(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i b_i. \quad (3)$$

Здесь $a_i = 1$, если проекция спина первой частицы из i -й коррелированной пары на ось $\vec{a}$ равна $+1/2$, и $a_i = -1$, если проекция спина первой частицы из i -й коррелированной пары на ось $\vec{a}$ равна $-1/2$. Соответственно $b_i = 1$, если проекция спина второй частицы из i -й коррелированной пары на ось $\vec{b}$ равна $+1/2$, и $b_i = -1$, если проекция спина второй частицы из i -й коррелированной пары на ось $\vec{b}$ равна $-1/2$.

Наблюдаемая величина E_N называется спиновой корреляцией. Ее оператор для достаточно больших N определяется следующим образом. Пусть имеется одно спиновое состояние такое, что направление спина вверх по оси Z обозначается как $|+\rangle$, а вниз по оси Z — как $|-\rangle$. На этих векторах спиновые операторы задаются соотношениями

$$\begin{aligned} S_x|+\rangle &= \frac{1}{2}|-\rangle, & S_y|+\rangle &= \frac{i}{2}|-\rangle, & S_z|+\rangle &= \frac{1}{2}|+\rangle, \\ S_x|-\rangle &= \frac{1}{2}|+\rangle, & S_y|-\rangle &= -\frac{i}{2}|+\rangle, & S_z|-\rangle &= -\frac{1}{2}|-\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор $\hat{a}$ удвоенной проекции спина на направление, задаваемое вектором $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $|\vec{a}| = 1$, имеет вид

$$\hat{a} = 2(\vec{a}, \vec{S}) = 2(a_x S_x + a_y S_y + a_z S_z). \quad (5)$$

Для двухчастичных состояний можно определить оператор

$$\hat{a} \otimes \hat{b} = 4(\vec{a}, \vec{S}^{(1)}) \otimes (\vec{b}, \vec{S}^{(2)}), \quad (6)$$

действующий в четырехмерном линейном пространстве, натянутом на базисные векторы

$$\begin{aligned} \Psi_{++} &= |(1)+\rangle|(2)+\rangle, & \Psi_{+-} &= |(1)+\rangle|(2)-\rangle, \\ \Psi_{-+} &= |(1)-\rangle|(2)+\rangle, & \Psi_{--} &= |(1)-\rangle|(2)-\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом операторы $\vec{S}^{(1)}$ действуют на векторы $|(1)+\rangle$, $|(1)-\rangle$, а операторы $\vec{S}^{(2)}$ — на векторы $|(2)+\rangle$, $|(2)-\rangle$. Матричные элементы $\langle\psi|\hat{a} \otimes \hat{b}|\psi\rangle$ оператора (6) являются учетверенными средними значениями произведений проекций спина первой частицы на ось $\vec{a}$, а второй частицы на ось $\vec{b}$.

Оператор (6) соответствует наблюдаемой величине, называемой спиновой корреляцией. В базисе (7) оператор (6) имеет вид матрицы

$$\begin{aligned} \hat{a} \otimes \hat{b} &= \\ &= \begin{pmatrix} a_z b_z & a_z(b_x - ib_y) & (a_x - ia_y)b_z & (a_x - ia_y)(b_x - ib_y) \\ a_z(b_x + ib_y) & -a_z b_z & (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) & -(a_x - ia_y)b_z \\ (a_x + ia_y)b_z & (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) & -a_z b_z & -a_z(b_x - ib_y) \\ (a_x + ia_y)(b_x + ib_y) & -(a_x + ia_y)b_z & -a_z(b_x + ib_y) & a_z b_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если спиновое двухчастичное состояние в базисе (8) описывается матрицей плотности

$$\rho = \|\rho_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (9)$$

то значение величины спиновой корреляции имеет вид

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Sp}(\hat{a} \otimes \hat{b} \rho). \quad (10)$$

Для вычисления этой величины часто оказывается удобным использовать вместо матрицы плотности ρ двухчастичного спинового состояния ее редукцию P . Такая редукция есть (3×3) -матрица

$$P = \|\rho_{ij}\| = \begin{pmatrix} \rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{41} & i(\rho_{14} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41}) & \rho_{13} + \rho_{31} - \rho_{24} - \rho_{42} \\ i(\rho_{14} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{41}) & -\rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41} & i(\rho_{13} - \rho_{31} - \rho_{24} + \rho_{42}) \\ \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{34} - \rho_{43} & i(\rho_{12} - \rho_{21} - \rho_{34} + \rho_{43}) & \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Используя редуцированную матрицу P , величину (10) можно представить в виде скалярного произведения векторов в трехмерном пространстве,

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x, a_y, a_z) P \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (\vec{a}, P\vec{b}). \quad (12)$$

Редуцированная матрица P не эквивалентна исходной матрице плотности ρ : из формулы (11) легко видеть, что одной и той же матрице P отвечают разные матрицы ρ , т.е. матрица P не задает полностью двухчастичное состояние. Однако той информации, которая в ней содержится, достаточно для того, чтобы вычислить величину спиновой корреляции $E(\vec{a}, \vec{b})$, соответствующую этому состоянию. Преимущество редуцированной матрицы P состоит в том, что она, как правило, имеет более простой вид, чем исходная матрица плотности ρ , и пользоваться формулой (12) оказывается проще и удобнее, чем формулой (10). Ниже мы убедимся в этом на конкретных примерах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для двухчастичного спинового состояния, описываемого матрицей плотности (9), справедливо обобщенное неравенство БКХШХ

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{c}) + E(\vec{d}, \vec{b}) - E(\vec{d}, \vec{c})| \leq \sqrt{2} \sup_{n_1, n_2} (|P\vec{n}_1| + |P\vec{n}_2|). \quad (13)$$

Здесь точная верхняя грань берется по всем парам векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ таким, что

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0, \quad |\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (12) для величины спиновой корреляции $E(\vec{a}, \vec{b})$, левую часть неравенства (13) представим в виде

$$\begin{aligned} & |E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{c}) + E(\vec{d}, \vec{b}) - E(\vec{d}, \vec{c})| = \\ & = |(\vec{a}, P\vec{b}) + (\vec{a}, P\vec{c}) + (\vec{d}, P\vec{b}) - (\vec{d}, P\vec{c})| = |(\vec{a}, P(\vec{b} + \vec{c})) + (\vec{d}, P(\vec{b} - \vec{c}))|. \end{aligned} \quad (14)$$

Векторы $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ ортогональны друг другу, и сумма квадратов их модулей равна 4:

$$(\vec{b} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}) = 0, \quad |(\vec{b} + \vec{c})|^2 + |(\vec{b} - \vec{c})|^2 = 4. \quad (15)$$

При фиксированных векторах $\vec{b}$, $\vec{c}$ выражение (14) принимает наибольшее значение, когда вектор $\vec{a}$ параллелен вектору $P(\vec{b} + \vec{c})$, а вектор $\vec{d}$ параллелен вектору $P(\vec{b} - \vec{c})$. Пусть среди всех пар векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$ мы выбрали такую, для которой величина (14) принимает наибольшее значение. Докажем лемму.

ЛЕММА. Векторы $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ можно выбрать так, что их модули будут одинаковыми, т.е.

$$|(\vec{b} + \vec{c})|^2 = |(\vec{b} - \vec{c})|^2 = 2. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ удовлетворяют условиям (15). Рассмотрим плоскость, в которой лежат эти векторы, и выберем базис в трехмерном пространстве так, чтобы векторы $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ лежали в этой плоскости, а третий базисный вектор $\vec{k}_3$ был ортогонален векторам $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$. Пусть базисные векторы имеют вид

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В базисе из этих векторов редуцированная матрица (11) записывается как

$$P_k = \|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Рассмотрим величину

$$\text{RH} = 2(|P(\vec{k}_1)| \cos \psi + |P(\vec{k}_2)| \sin \psi) = 2G \sin(\phi + \psi). \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{|P(k_1)|}{G}, \quad \cos \phi = \frac{|P(k_2)|}{G}, \quad G = \sqrt{k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2 + k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2}, \\ |P(k_1)| &= [(k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2) \sin^2 \varphi + (k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2) \cos^2 \varphi + \\ &\quad + (k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32}) \sin 2\varphi]^{1/2}, \\ |P(k_2)| &= [(k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2) \cos^2 \varphi + (k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2) \sin^2 \varphi - \\ &\quad - (k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32}) \sin 2\varphi]^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (19) – это правая часть неравенства (13), вычисленная для двух векторов, удовлетворяющих условию (15). Она достигает максимального значения, когда $\phi + \psi = \pi/2$. Таким образом, имеется целое семейство пар векторов $\sqrt{2}\vec{k}_1 \cos \psi$, $\sqrt{2}\vec{k}_2 \sin \psi$, на которых достигается максимум выражения (19). Их модули, вообще говоря, различны, но в этом семействе существует пара векторов с равными модулями. Найдем ее явный вид.

Для равенства модулей векторов пары должно выполняться равенство $\psi = \pi/4$. Тогда из условия максимальности РН следует, что и $\phi = \pi/4$. Угол ϕ задается соотношениями (20), из которых следует, что в этом случае должно выполняться условие

$$|P(\vec{k}_1)|^2 = |P(\vec{k}_2)|^2. \quad (21)$$

Это равенство выполняется при определенных значениях угла φ , которые можно найти, используя выражения (20):

$$\begin{aligned} (k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2 - k_{12}^2 - k_{22}^2 - k_{32}^2) \sin^2 \varphi - (k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2 - k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2) \cos^2 \varphi = \\ = 2 \sin 2\varphi (k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2 - k_{11}^2 - k_{21}^2 - k_{31}^2}{2(k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32})}. \quad (22)$$

Это равенство задает то значение угла φ , при котором единичные векторы k_1 и k_2 в (17) образуют пару, на которой величина (19) достигает максимального значения. Мы показали, что в качестве векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ можно взять векторы $\sqrt{2}\vec{k}_1$, $\sqrt{2}\vec{k}_2$ у которых значение угла φ определяется выражением (22). Таким образом, лемма доказана.

Условие (22) задает то значение угла φ , при котором единичные векторы (17) $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ образуют пару, на которой величина (19) достигает максимального значения. Поэтому теперь для того, чтобы получить утверждение, содержащееся в предложении, достаточно заметить, что правая часть неравенства (13) принимает свое максимальное значение, когда $\vec{n}_1 = \vec{k}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{k}_2$. Это максимальное значение равно $2G$. Обобщенное неравенство БКХШХ принимает вид

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{c}) + E(\vec{d}, \vec{b}) - E(\vec{d}, \vec{c})| \leq 2G = 2\sqrt{k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2 + k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2}. \quad (23)$$

Здесь k_{ij} – элементы редуцированной матрицы (11), записанной в базисе (17).

Итак, мы доказали обобщенное неравенство БКХШХ (13). У этого неравенства и левая, и правая части зависят от матрицы плотности двухчастичного спинового состояния. Поэтому в отличие от неравенства (2) при подстановке в обобщенное неравенство БКХШХ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, реализующих максимум правой части, оно превращается в равенство.

Перейдем теперь непосредственно к описанию процедуры вычислений.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$

Процедура доказательства неравенства (13) фактически дает нам также способ, позволяющий найти нужный набор векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Алгоритм поиска состоит из следующих операций.

1. По матрице плотности двучастичного спинового состояния ρ строим редуцированную матрицу P (11).

2. Ищем два ортогональных единичных вектора $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ таких, что величина $\text{RH}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sqrt{2}(|P\vec{n}_1| + |P\vec{n}_2|)$ принимает наибольшее значение. Это значение мы обозначаем RH .

3. По этим векторам $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ строим векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{b} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{\sqrt{2}}. \quad (24)$$

4. Действуем на векторы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ матрицей (11), получаем векторы $P\vec{n}_1$, $P\vec{n}_2$ и строим по ним векторы

$$\vec{a} = \frac{P\vec{n}_1}{|P\vec{n}_1|}, \quad \vec{d} = \frac{P\vec{n}_2}{|P\vec{n}_2|}. \quad (25)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

СЛУЧАЙ 1. Пусть матрица P имеет диагональную форму,

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \quad (26)$$

тогда ее действие на единичный вектор $\vec{n}_1$ запишется как

$$P\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \varphi \sin \theta \\ \lambda_2 \sin \varphi \sin \theta \\ \lambda_3 \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Квадрат модуля вектора $P\vec{n}_1$ равен

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \lambda_3^2 \cos^2 \theta = \\ & = \lambda_1^2 - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \varphi \sin^2 \theta - (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда видно, что максимальное значение модуля достигается при $\cos^2 \theta = 0$. Поэтому при нахождении векторов, на которых достигается максимальное значение левой части обобщенного неравенства БКХШХ (13), достаточно ограничиться теми векторами, у которых $\cos^2 \theta = 0$. Рассмотрим два таких вектора, ортогональных друг другу:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем искать векторы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, для которых величина $\text{RH}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ будет принимать наибольшее значение,

$$\text{RH}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sqrt{2} \left(\sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \varphi + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi} \right). \quad (29)$$

Величина $\text{RH}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ принимает свое максимальное значение при $\varphi = \pi/4$. В этом случае

$$\text{RH} = 2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (30)$$

Это значение достигается на единичных векторах

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Отметим, что векторы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ имеют данный вид в том базисе, в котором редуцированная матрица P (11) диагональна, см. (26).

По этим векторам $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ с помощью формул (24), (25) легко определить векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть редуцированную матрицу P можно привести к нормальной форме, содержащей две жордановы клетки:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2. \quad (32)$$

Эта матрица имеет собственный вектор $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ограничим матрицу (32) на подпространство, ортогональное вектору $\vec{k}_1$ и рассмотрим вектор

$$\vec{l} = p\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \sin \varphi + \cos \varphi \\ \lambda_2 \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Найдем теперь такой угол φ , при котором вектор $\vec{l}$ имеет наибольший модуль,

$$\begin{aligned} |\vec{l}|^2 &= \lambda_2^2 \sin^2 \varphi + 2\lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi = \lambda_2^2 + \lambda_2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi = \\ &= \lambda_2^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_2^2 + \frac{1}{4}} \sin(\phi + 2\varphi), \end{aligned}$$

где

$$\sin \phi = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2^2 + 1/4}}, \quad \cos \phi = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 + 1/4}}.$$

Мы видим, что модуль вектора (33) принимает наибольшее значение

$$|\vec{l}_M|^2 = \lambda_2^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_2^2 + \frac{1}{4}},$$

если

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь два ортогональных вектора

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

В базисе, образованном этими векторами $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ рассмотрим пару ортогональных векторов, сумма квадратов модулей которых равна 2. Эту пару выберем в виде $(\vec{v}_1 \cos \gamma, \vec{v}_2 \sin \gamma)$, где γ – произвольный угол. Определим, какое максимальное значение принимает величина

$$\begin{aligned} \text{RH} &= 2|p\vec{v}_1| \cos \gamma + 2|p\vec{v}_1| \sin \gamma = \\ &= 2\sqrt{\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi} \cdot \cos \gamma + \sqrt{\lambda_2^2 - 2\lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi} \cdot \sin \gamma = \\ &= 2\sqrt{2\lambda_2^2 + 1} \cdot \sin(\gamma + \psi). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 1}}, \\ \cos \psi &= \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - 2\lambda_2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi}}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из формулы (35) видно, что максимальное значение величины RH при условии, что для вычисления используются только векторы, ортогональные вектору $\vec{k}_1$, равно $\text{RH} = 2\sqrt{2\lambda_2^2 + 1}$. Оно достигается при

$$\gamma + \psi = \frac{\pi}{2}. \quad (37)$$

При фиксированном угле φ фиксирован и угол ψ ; по заданным φ, ψ с помощью условия (37) определяется угол ϕ . Из формулы (37) следует, что если $\psi = \pi/4$, то и $\gamma = \pi/4$. Отсюда и из формул (36) получаем, что $\text{tg } 2\varphi = -1/(2\lambda_2)$.

Таким образом, среди множества пар ортогональных векторов, на которых достигается максимальное значение $\text{RH} = 2\sqrt{2\lambda_2^2 + 1}$, имеется и пара единичных векторов. Эти векторы имеют вид

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Здесь угол φ определяется условием $\text{tg } 2\varphi = -1/(2\lambda_2)$.

Рассмотрим теперь пару ортогональных векторов вида

$$\vec{s}_1 = \vec{L}_M \cos \delta + \vec{k}_1 \sin \delta, \quad \vec{s}_2 = \vec{L}_M \sin \delta - \vec{k}_1 \cos \delta, \quad (39)$$

где $\vec{L}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{l}_M \end{pmatrix}$. Вектор $\vec{l}_M$ здесь тот же, что и в формуле (34). Из всех векторов вида (33) он обладает наибольшим модулем. Вычислим величину

$$\begin{aligned} \text{RH} &= 2|P\vec{s}_1| \cos \beta + 2|P\vec{s}_2| \sin \beta = \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 \sin^2 \delta + |\vec{l}_M|^2 \cos^2 \delta} \cos \beta + \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \delta + |\vec{l}_M|^2 \sin^2 \delta} \sin \beta = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 + |\vec{l}_M|^2} \sin(\beta + \psi). \quad (40)$$

Здесь

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 \sin^2 \delta + |\vec{l}_M|^2 \cos^2 \delta}}{\sqrt{\lambda_1^2 + |\vec{l}_M|^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \delta + |\vec{l}_M|^2 \sin^2 \delta}}{\sqrt{\lambda_1^2 + |\vec{l}_M|^2}}, \quad (41)$$

β – произвольный угол. Величина РН (40) принимает свое максимальное значение при

$$\beta + \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Из этой формулы следует, что если $\delta = \pi/4$, то и $\psi = \pi/4$, следовательно, $\beta = \pi/4$. Таким образом, среди множества пар ортогональных векторов, на которых достигается максимальное значение

$$\text{РН} = 2\sqrt{\lambda_1^2 + |\vec{l}_M|^2} = 2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_2^2 + \frac{1}{4}}}, \quad (42)$$

существует пара единичных векторов. Эти векторы имеют вид

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где угол φ определен равенством (34).

Таким образом, мы имеем два максимальных значения величины РН. Одно из них достигается на векторах (32), а другое – на векторах (43). Каким из них следует пользоваться, зависит от величин λ_1, λ_2 . Если $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \geq \lambda_1^2$, то $\sqrt{2\lambda_2^2 + 1} \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 1/4}}$, и следует пользоваться парой векторов (37). Если $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \leq \lambda_1^2$, то $\sqrt{2\lambda_2^2 + 1} \leq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 1/4}}$, и следует пользоваться парой векторов (43).

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим скалярное двухчастичное состояние, которое также часто называют ЭПР-состоянием

ПРИМЕР 1. Рассмотрим $\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$. Для этого состояния

$$\rho_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{0,0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица P диагональна, и можно воспользоваться формулой (30). Поэтому для такого состояния максимальное значение правой части неравенства (13) равно

$$\text{РН} = 2\sqrt{2}.$$

Это значение достигается на любой паре векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, ортогональных друг другу: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$. Четыре единичных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ можно выразить через векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{n}_1, \quad \vec{b} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{d} = \vec{n}_2.$$

ПРИМЕР 2. Такой же результат получается для $\Psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$. Для этого состояния

$$\rho_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для состояния $\Psi_{1,0}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ могут быть выражены через векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ точно так же, как и в случае состояния $\Psi_{0,0}$,

$$RH = 2\sqrt{2}, \quad \vec{a} = \vec{n}_1, \quad \vec{b} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{d} = \vec{n}_2.$$

Векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ произвольны лишь с тем ограничением, что $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$.

ПРИМЕР 3. До сих пор мы рассматривали чистые состояния. Рассмотрим сейчас состояние Вернера [22]. Это смешанное состояние, которое описывается матрицей плотности

$$\rho_W = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Для этого состояния матрица P имеет вид

$$P_W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

С помощью этой матрицы можно найти, что для состояния (45) $RH = \sqrt{2}$, и это максимальное значение достигается на каждой паре ортогональных векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ таких, что $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$. Четыре единичных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ могут быть выражены через векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{n}_1, \quad \vec{b} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{d} = \vec{n}_2.$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим смешанное состояние, которое описывается матрицей плотности

$$\rho_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mu & 0 \\ 0 & -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Для этого состояния матрица P имеет вид

$$P_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \text{RH} &= 2\sqrt{1+\mu^2}, & \vec{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{n}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{a} &= \vec{n}_1, & \vec{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{c} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{d} &= \vec{n}_2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. Во всех предыдущих случаях мы рассматривали такие пары коррелированных спиновых состояний, в которых одночастичные состояния обладают определенной проекцией спина на одну и ту же ось. Рассмотрим состояние $\Psi_{0,0}^{\vec{k}_1, \vec{k}_2}$, аналогичное состоянию $\Psi_{0,0}$. Оно образовано двумя состояниями, одно из которых обладает определенным значением проекции спина на ось, задаваемую вектором $\vec{k}_1$, а второе – определенным значением проекции спина на ось, задаваемую вектором $\vec{k}_2$. В этом случае

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Матрица плотности такого состояния имеет вид

$$\rho_\theta = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin \theta & -\sin \theta & 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \theta \\ -\sin \theta & -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\sin \theta \\ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \sin \theta & -\sin \theta & 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

а матрица P записывается как

$$P_\theta = \begin{pmatrix} -\cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Для этого состояния

$$\begin{aligned} \text{RH} &= 2\sqrt{2}, & \vec{n}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{n}_2 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \\ \vec{a} &= \vec{n}_1, & \vec{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, & \vec{c} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 1 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}, & \vec{d} &= \vec{n}_2, \end{aligned}$$

где α – произвольный угол.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим процесс декогеренции, преобразующий состояние (48) в состояние, которое описывается матрицей плотности

$$\rho_{\theta\mu} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \mu \sin \theta & -\mu \sin \theta & 2\mu \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \mu \sin \theta & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -2\mu \cos^2 \frac{\theta}{2} & \mu \sin \theta \\ -\mu \sin \theta & -2\mu \cos^2 \frac{\theta}{2} & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\mu \sin \theta \\ 2\mu \sin^2 \frac{\theta}{2} & \mu \sin \theta & -\mu \sin \theta & 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Для этого состояния матрица P имеет вид

$$P_{\theta\mu} = \begin{pmatrix} -\mu \cos \theta & 0 & -\mu \sin \theta \\ 0 & -\mu & 0 \\ \mu \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Если $\theta = \pi/4$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{RH} &= 2\sqrt{1+\mu^2}, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{2\mu}{1+\mu}, \quad \mu \neq 1, \\ \vec{a} &= \vec{n}_1, \quad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 1 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \vec{n}_2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 7. До сих пор мы рассматривали чистые максимально зацепленные состояния. Рассмотрим теперь состояние

$$\Psi_\varphi = \cos \varphi |+\rangle|-\rangle + \sin \varphi |-\rangle|+\rangle, \quad (52)$$

которое не является максимально зацепленным. Состоянию (52) соответствует матрица плотности

$$\rho_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (53)$$

а матрица P имеет вид

$$P_\varphi = \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Воспользовавшись формулой (30), получаем, что для состояния (52)

$$\text{RH}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2\sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}. \quad (55)$$

При $\varphi = \pi/4$ состояние (52) является максимально запутанным и соответствующая ему величина $\text{RH} = 2\sqrt{2}$. Если же $\varphi = \pi/2$, то оно становится факторизуемым и для него $\text{RH} = 2$. Мы видим, что величину RH можно использовать в качестве меры запутанности состояния. Подробно этот вопрос будет исследован в отдельной работе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, с помощью матрицы P , которая является редукцией матрицы плотности, можно сформулировать обобщенное неравенство БКХШХ, которое для каждого конкретного двучастичного спинового состояния при специальном выборе векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ превращается в точное равенство, и в этом смысле никогда не нарушается. Мы также показали, как с помощью этой матрицы P можно находить такие векторы, и указали на связь величины РН с мерой запутанности двучастичного спинового состояния.

Список литературы

- [1] J. S. Bell, *Physics*, **1** (1964), 195.
- [2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.*, **23** (1969), 880.
- [3] S. J. Freedman, J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.*, **28** (1972), 938.
- [4] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 460.
- [5] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 91.
- [6] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 1804.
- [7] Z. Y. Ou, L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988), 50.
- [8] T. E. Kiess, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, C. O. Alley, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 3893.
- [9] В. А. Андреев, В. И. Манько, *ТМФ*, **140** (2004), 284.
- [10] I. V. Volovich, *Bell's theorem and locality in space*, [quant-ph/0012010](#).
- [11] L. Accardi, M. Regoli, *Locality and Bell's inequality*, [quant-ph/0007005](#).
- [12] М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция*, Физматлит, М., 2001.
- [13] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, Современ. матем. физика. Проблемы и методы, **5**, МЦНМО, М., 2002.
- [14] A. Khrennikov, *Found. Phys.*, **32** (2002), 1159.
- [15] A. Khrennikov, I. Volovich, *Local realism, contextualism and loopholes in Bell's experiments*, [quant-ph/0212127](#).
- [16] А. Ю. Хренников, *Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика*, Физматлит, М., 2003.
- [17] A. Khrennikov, I. V. Volovich, "Quantum nonlocality, EPR model, and Bell's theorem", *Proc. III Int. Sakharov Conf. on Physics*, vol. 2 (Moscow, Russia, 2002), eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin, World Sci., Singapore, 2003, 260.
- [18] V. A. Andreev, V. I. Man'ko, "The quantum tomography representation of Bell-CHSH inequalities", *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations – 2* (Växjö, Sweden, 2003), *Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci.*, **10**, ed. A. Khrennikov, Växjö Univ. Press, Växjö, 2004, 47.
- [19] В. А. Андреев, В. И. Манько, О. В. Манько, Е. В. Щукин, *ТМФ*, **146** (2006), 172.
- [20] В. А. Андреев, В. И. Манько, *Письма в ЖЭТФ*, **72** (2000), 130.
- [21] V. A. Andreev, V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **281** (2001), 278.
- [22] R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **40** (1989), 4277.

Поступила в редакцию 18.12.2006