Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, И. А. Икромов, Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 502–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:27:28

© 2007 г.

Ж. И. Абдуллаев*, И. А. Икромов*

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

В работе рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $H(k)$ на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$. Доказана конечность числа отрицательных собственных значений оператора $H(k)$ для широкого класса потенциалов $\hat{v}$.

Ключевые слова: гамильтониан, оператор Шредингера, дискретный спектр, принцип Бирмана–Швингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Условия конечности отрицательного спектра и отсутствия положительных собственных значений двухчастичного непрерывного оператора Шредингера $-\Delta + \lambda V$ приведены в книге [1]. Если $V \leq 0$, то число отрицательных собственных значений $N(\lambda)$ – неубывающая функция от $\lambda \in (0, \infty)$. Конечность числа связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности была установлена в работе [2], а потом в более общей ситуации в книге [3]. Спектральные свойства двухчастичного дискретного оператора Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$ ($k \in \mathbb{T}^\nu \equiv (-\pi, \pi]^\nu$ – полный квазиимпульс системы двух частиц) изучены в работах [4]–[7]. В работе [4] рассматривается оператор Шредингера на двумерной решетке и доказывается бесконечность числа собственных значений оператора $H(k)$ при некоторых значениях полного квазиимпульса. При этом, если потенциал $\hat{v}$ принадлежит классу $W(j)$, $j \in \{1, 2\}$ (см. ниже формулу (4.5)), то собственные значения $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}$, и соответствующие им собственные функции f_n , $n \in \mathbb{Z}$, оператора $H(k)$ находятся явно. В работе [5] изучается монотонность каждого собственного значения $z_n(k)$ оператора $H(k)$ по координатам $k_j \in [0, \pi]$. В работах [6], [7] рассматривается двухчастичный оператор $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, с контактным потенциалом $\hat{v}(n_1 - n_2) = \mu \delta_{n_1 n_2}$ и устанавливается единственность и невырожденность собственного значения $z(k)$ этого оператора. В работе [8] показано, что двухчастичный оператор $H(k)$, $k \neq 0$, имеет положительное собственное значение,

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: jabdullaev@mail.ru, ikromov1@rambler.ru

лежащее ниже непрерывного спектра, при условии, что $H(0)$ имеет виртуальный уровень в нуле. Некоторые результаты, касающиеся двухчастичного дискретного оператора Шредингера $H(k)$ на трехмерной решетке, докладывались на международной конференции [9].

Следует отметить, что в непрерывном случае “ухудшением” потенциала V можно получить бесконечное число собственных значений вне непрерывного спектра. В этом случае “особенность” невозмущенного оператора в нуле невырожденна и имеет относительно простой вид. Однако в случае дискретного оператора Шредингера особенности невозмущенного оператора могут быть довольно сложными, хотя в некоторых случаях [10] с помощью леммы Морса вид оператора умножения заменой переменных можно свести к сумме квадратов. Как показывают примеры, особенности функций, появляющиеся в зависимости от параметров (квазиимпульса), могут быть неизолированными критическими точками или критическими точками с достаточно большим числом Милнора [11]. Отсюда естественно возникают вопросы. Если потенциал $\hat{v}(n)$ принадлежит некоторому классу последовательностей с убыванием порядка $O(|n|^{-\alpha})$, где α – некоторое фиксированное положительное число, то можно ли получить бесконечное число собственных значений с “ухудшением” особенности невозмущенного оператора? Какова связь между особенностью невозмущенного оператора и гладкостью ядра, гарантирующая конечность дискретного спектра возмущенного оператора?

Как известно, в случае одномерного дискретного оператора Шредингера имеются более точные результаты о конечности дискретного спектра [12]. Кроме того, доказано, что если

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{v}^2(n) = \infty,$$

то оператор $H(0)$ обязательно имеет бесконечное число собственных значений вне непрерывного спектра. В системе двух фермионов [13] на одномерной решетке получен аналогичный результат о конечности дискретного спектра оператора $H(k)$, который плотно примыкает к результатам Никишина. В работе [13] доказано, что $N(k)$ – число собственных значений оператора $H(k)$ – есть неубывающая функция от $k \in [0, \pi]$ – полного квазиимпульса системы. Описано множество точек разрыва функции $N(k)$ и вычислен скачок $N(k+0) - N(k)$ в точках разрыва. В работе [4] рассмотрен разностный оператор Шредингера $H(k)$ на двумерной решетке и доказано, что оператор $H(k_1, \pi)$ ($H(\pi, k_2)$) имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}$. Как показано в этой работе, явление бесконечности числа собственных значений связано с неизолированностью точки минимума функции ε_k . В работе [9] рассмотрен оператор Шредингера $H(k)$, соответствующий системе двух частиц с одинаковыми массами на трехмерной решетке. Установлено, что для любого $k \in \mathbb{T}^3 \setminus (-\pi, \pi)^3$ существует потенциал $\hat{v}$ такой, что двухчастичный оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, накапливающихся к левому краю непрерывного спектра $m(k)$. Кроме того, найдена асимптотическая формула для $z_n(k)$ при $n \rightarrow \infty$. Появление бесконечного числа собственных значений также связано с неизолированностью точки минимума функции ε_k .

В данной работе мы получим достаточные условия конечности дискретного спектра оператора Шредингера в зависимости от гладкости потенциала, степень которой зависит от кратности экстремальных значений энергии свободных частиц. Точнее, мы рассмотрим двухчастичный оператор $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, общего вида и докажем конечность числа отрицательных собственных значений этого оператора для широкого класса потенциалов $\hat{v}$.

Следуя известному подходу [14] к исследованию спектра оператора $H(k)$, мы рассмотрим оператор $G(k, z) = r_0^{1/2}(k, z) V r_0^{1/2}(k, z)$, $z < 0$, где $r_0(k, z)$ – резольвента невозмущенного оператора. В случае компактности предельного оператора $G(k, 0) := \lim_{z \rightarrow 0-} r_0^{1/2}(k, z) V r_0^{1/2}(k, z)$ мы приводим совершенно элементарное доказательство конечности дискретного спектра оператора $H(k)$. В случае, когда предельный оператор $G(k, 0)$ теряет смысл, мы воспользуемся приемом, анонсированным в работе [15], т.е. представим оператор $V^{1/2}$ в виде суммы двух операторов $V_1^{1/2} + V_2^{1/2}$, для которой оператор $G_2(k, z) = r_0^{1/2}(k, z) (V_2^{1/2})^* V_2^{1/2} r_0^{1/2}(k, z)$ компактен при $z \leq 0$, а оператор $G_1(k, z) = G(k, z) - G_2(k, z)$ имеет фиксированный конечный ранг ℓ при всех $z \in (-\infty, 0)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$. При доказательстве в обоих случаях будем использовать принцип Бирмана–Швингера.

2. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНА

Гамильтониан $\hat{H}$ системы двух квантовых частиц на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ и имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2,$$

где свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ действует в $\ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2}.$$

Здесь $m_1, m_2 > 0$ означают массы частиц, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, где Δ – оператор кинетической энергии отдельной частицы:

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) \hat{\psi}(x + s), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu),$$

$\hat{\varepsilon}(s)$ – закон дисперсии. Взаимодействие двух частиц описывается оператором $\hat{V}_2$:

$$(\hat{V}_2 \hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2).$$

Относительно вещественнозначных функций $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{\varepsilon}(-s) = \hat{\varepsilon}(s), \quad \hat{v}(-s) = \hat{v}(s) \geq 0, \quad s \in \mathbb{Z}^\nu; \quad (2.1)$$

$$\hat{v}, \hat{\varepsilon} \in \ell_1(\mathbb{Z}^\nu). \quad (2.2)$$

Условия (2.2) обеспечивают ограниченность операторов $\hat{H}_0$ и $\hat{V}_2$, а вещественность $\hat{v}$ и четность функции $\hat{\varepsilon}$ – самосопряженность этих операторов в $\ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$. Из $\hat{v}(s) \geq 0$ следует положительность оператора $\hat{V}_2$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}: \ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^\nu)^2)$. Оператор энергии $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$ в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов U_s , $s \in \mathbb{Z}^\nu$:

$$(U_s f)(k_1, k_2) = e^{-i(s, k_1 + k_2)} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^\nu)^2).$$

Отсюда следует [1], что существуют разложения пространства $L_2((\mathbb{T}^\nu)^2)$, а также операторов U_s и H в прямые интегралы:

$$L_2((\mathbb{T}^\nu)^2) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus L_2(\mathbb{F}_k) dk, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus U_s(k) dk, \quad H = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus \tilde{H}(k) dk.$$

Здесь

$$\mathbb{F}_k = \{(k_1, k_2) \in (\mathbb{T}^\nu)^2: k_1 + k_2 = k\}, \quad k \in \mathbb{T}^\nu,$$

$U_s(k)$, $s \in \mathbb{Z}^\nu$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, – оператор умножения на числа $e^{-i(s, k)}$ в пространстве $L_2(\mathbb{F}_k)$. Оператор $\tilde{H}(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, также действует в $L_2(\mathbb{F}_k)$ по формуле

$$(\tilde{H}(k)f)(q, k-q) = \left(\frac{1}{m_1} \varepsilon(q) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(k-q) \right) f(q, k-q) - (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{T}^\nu} v(q-s) f(s, k-s) ds$$

и унитарно-эквивалентен оператору $H(k) = H_0(k) - V$, называемому оператором Шредингера; унитарность осуществляется с помощью преобразования

$$u_k: L_2(\mathbb{F}_k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\nu), \quad (u_k g)(q) = g(q, k-q).$$

$H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_k(q) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(q) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(k-q), \quad (2.3)$$

где

$$\varepsilon(q) = (2\pi)^{-\nu/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) e^{i(s, q)};$$

V – интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^\nu)$, порожденный ядром

$$(2\pi)^{-\nu/2} v(p-q) = (2\pi)^{-\nu} \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{v}(s) e^{i(s, p-q)}.$$

Из условий (2.1), (2.2) следует, что функции ε и v являются четными, вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^\nu$.

Обозначим через $m(k)$ и $M(k)$ минимальное и максимальное значения функции $\varepsilon_k(q)$, соответственно. Для удобства вместо оператора $H(k)$ мы рассмотрим оператор $H(k) - m(k)I$, заново обозначив его через $H(k)$, т.е.

$$(H(k)f)(q) = (\varepsilon_k(q) - m(k))f(q) - (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{T}^\nu} v(q-s)f(s) ds. \quad (2.4)$$

В силу теоремы Вейля о существенном спектре непрерывный спектр оператора $H(k)$ совпадает со спектром оператора $H_0(k) - m(k)I$. Спектр невозмущенного оператора $H_0(k) - m(k)I$ чисто непрерывный и совпадает с отрезком $[0, \omega(k)]$. Длина этого отрезка $\omega(k) = M(k) - m(k)$ называется шириной непрерывного спектра оператора $H(k)$. Из самосопряженности оператора $H(k)$ и положительности V вытекает, что $\sigma(H(k)) \cap (\omega(k), \infty) = \emptyset$, поэтому $\sigma_{\text{disc}}(H(k)) \subset (-\infty, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\varphi(p)$ – непрерывная вещественнозначная функция на $\mathbb{T}^\nu := (-\pi, \pi]^\nu$. Экстремальная точка $p^0 \in \mathbb{T}^\nu$ функции $\varphi(p)$ называется конечнократной, если существуют числа $m > 0$, $c > 0$ и окрестность $U(p^0)$ точки p^0 такие, что для любого $p \in U(p^0)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(p) - \varphi(p^0)| \geq c|p - p^0|^m, \quad (2.5)$$

где $|p - p^0|^2 = \sum_{i=1}^\nu (p_i - p_i^0)^2$. В противном случае экстремальная точка p^0 называется бесконечнократной. Точная нижняя грань множества чисел $m > 0$, для которых выполняется условие (2.5), называется кратностью экстремальной точки p^0 .

Обозначим через $C^{\gamma+0}(\mathbb{T}^\nu)$ пространство определенных на $\mathbb{T}^\nu$ непрерывных функций f таких, что для любого мультииндекса β с длиной $|\beta| \leq [\gamma]$ производная $f^{(\beta)}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\{\gamma\} + \tau$ для некоторого $\tau = \tau(f) > 0$, где $[\gamma]$ – целая часть, а $\{\gamma\} = \gamma - [\gamma]$ – дробная часть числа γ , $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varepsilon_k^{-1}(m(k)) = \{p^0\}$ и p^0 является единственной точкой минимума функции ε_k кратности $2n$. Тогда для любого $v^{1/2}(p)$ из класса $C^{n-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu)$ оператор $H(k)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

Как отмечено выше, при исследовании дискретного спектра оператора $H(k)$ мы воспользуемся принципом Бирмана–Швингера. Для изложения этого принципа введем некоторые факты и обозначения. Для любого самосопряженного оператора B , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и не имеющего существенного спектра правее точки $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $\mathcal{H}_B(\mu) \subset \mathcal{H}$ подпространства такие, что ненулевые элементы $f \in \mathcal{H}_B(\mu)$ удовлетворяют неравенству $(Bf, f) > \mu(f, f)$, и положим

$$n(\mu, B) = \sup_{\mathcal{H}_B(\mu)} \dim \mathcal{H}_B(\mu).$$

Число $n(\mu, B)$ совпадает с числом собственных значений оператора B , лежащих правее от μ . В работе [8] получена нижняя оценка для числа собственных значений оператора $H(k)$. Число отрицательных собственных значений оператора $H(k)$ не меньше, чем число собственных значений оператора V , больших $\omega(k)$, т.е. имеет место неравенство

$$n(0, -H(k)) \geq n(\omega(k), V).$$

Как отмечено выше, конечность дискретного спектра оператора связана с поведением кинетической энергии вблизи края непрерывного спектра. В приложении мы исследуем функции в окрестностях экстремальных точек и докажем связь между кратностью экстремальных точек и так называемым числом Милнора [11] для достаточно гладких функций.

3. КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для любого $k \in \mathbb{T}^\nu$ и $z < 0$ определим интегральные операторы

$$G(k, z) = r_0^{1/2}(k, z) V r_0^{1/2}(k, z), \quad Q(k, z) = V^{1/2} r_0^{1/2}(k, z),$$

где $r_0(k, z)$ – резольвента невозмущенного оператора $H_0(k) - m(k)I$. Условие $\hat{v}(s) \geq 0$ обеспечит положительность оператора V . Из условия $z < 0$ следует, что $r_0(k, z) \geq 0$. Через $r_0^{1/2}(k, z)$ и $V^{1/2}$ обозначены положительные квадратные корни операторов $r_0(k, z)$ и V , соответственно. При условии (2.2) ядро $v^{1/2}(p - q)$ интегрального оператора $V^{1/2}$ принадлежит $L_2((\mathbb{T}^\nu)^2)$, поэтому $Q(k, z)$ принадлежит классу операторов Гильберта–Шмидта Σ_2 . Из представления

$$G(k, z) = (Q(k, z))^* Q(k, z)$$

следует его положительность и принадлежность классу со следом Σ_1 при всех $k \in \mathbb{T}^\nu$ и $z < 0$. Кроме того, имеет место принцип Бирмана–Швингера:

$$n(-z, -H(k)) = n(1, G(k, z)) \quad (3.1)$$

при всех $z < 0$. Равенство (3.1) означает, что число собственных значений оператора $H(k)$, лежащих левее $z < 0$, совпадает с числом собственных значений оператора $G(k, z)$, больших 1.

Решение f уравнения Шредингера

$$H(k)f = zf \quad (3.2)$$

и неподвижные точки φ оператора $G(k, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0^{1/2}(k, z)\varphi, \quad \varphi = (H_0(k) - (m(k) + z)I)^{1/2}f. \quad (3.3)$$

Так как $\text{Ker } r_0^{1/2}(k, z) = \{0\}$ при всех $k \in \mathbb{T}^\nu$, $z < 0$, то f и φ одновременно отличны от нуля.

ЛЕММА 3.1. Число $z < 0$ является собственным значением оператора $H(k)$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $G(k, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевое $f \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$ является решением уравнения (3.2) эквивалентного уравнению $(H_0(k) - (m(k) + z)I)^{1/2}f = r_0^{1/2}(k, z)Vf$. Учитывая соотношения (3.3), получим, что уравнение

$$\varphi = G(k, z)\varphi \quad (3.4)$$

имеет ненулевое решение. И обратно, если уравнение (3.4) имеет ненулевое решение $\varphi \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$, то функция f , построенная по соотношениям (3.3), удовлетворяет уравнению Шредингера (3.2) и принадлежит $L_2(\mathbb{T}^\nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Не нарушая общности, предположим, что $p^0 = 0$. Так как $v^{1/2} \in C^{n-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu)$, то имеет место представление

$$v^{1/2}(p - q) = \sum_{|\alpha| < [n-\nu/2]} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p)}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \sum_{|\alpha| = [n-\nu/2]} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p - \theta_\alpha(q)q)}{\partial q^\alpha} q^\alpha, \\ \theta_\alpha(q) \in [0, 1],$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ – мультииндекс и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$. Обозначая

$$\begin{aligned} v_1^{1/2}(p, q) &= \sum_{|\alpha| \leq [n-\nu/2]} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p)}{\partial q^\alpha} q^\alpha, \\ v_2^{1/2}(p, q) &= \sum_{|\alpha| = [n-\nu/2]} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p - \theta_\alpha(q)q)}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p)}{\partial q^\alpha} \right) q^\alpha, \end{aligned} \quad (3.5)$$

представим функцию $v^{1/2}(p - q)$ в виде суммы $v_1^{1/2}(p, q) + v_2^{1/2}(p, q)$. Обозначим через $Q_i(k, z)$, $i = 1, 2$, интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^\nu)$ с ядром $v_i^{1/2}(p, q)/\sqrt{\varepsilon_k(q) - m(k) - z}$. Тогда

$$Q(k, z) = Q_1(k, z) + Q_2(k, z).$$

При выполнении условий теоремы 2.1 функция $\partial^\alpha v^{1/2}(p)/\partial q^\alpha$ при $|\alpha| = [n - \nu/2]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\{n - \nu/2\} + \tau$ для некоторого $\tau > 0$. Учитывая, что $\theta_\alpha(q) \in [0, 1]$ для любого α , $|\alpha| = [n - \nu/2]$, мы получим, что для функции

$$a_\alpha(p, q) = \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p - \theta_\alpha(q)q)}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^\alpha v^{1/2}(p)}{\partial q^\alpha}$$

имеет место неравенство

$$|a_\alpha(p, q)| \leq C|q|^{\{n-\nu/2\}+\tau}. \quad (3.6)$$

Здесь без ограничения общности мы будем предполагать, что $\tau > 0$, $\{n - \nu/2\} + \tau \leq 1$. Из выражений (3.5) и (3.6) получаем, что

$$|v_2^{1/2}(p, q)| \leq C|q|^{n-\nu/2+\tau},$$

где C не зависит от $p \in \mathbb{T}^\nu$. По условию теоремы 2.1 $\varepsilon_k(q) - m(k) \geq C|q|^{2n}$, поэтому

$$\frac{|v_2^{1/2}(p, q)|^2}{\varepsilon_k(q) - m(k)} \leq \frac{C}{|q|^{\nu-2\tau}}. \quad (3.7)$$

Тогда из неравенства (3.7) следует, что оператор $Q_2(k, 0)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта Σ_2 . Оператор $Q_1(k, z)$ имеет конечный ранг. Обозначим $G_2(k, z) \equiv (Q_2(k, z))^* Q_2(k, z)$ и $G_1(k, z) \equiv G(k, z) - G_2(k, z)$. Операторы $G_1(k, z)$ и $G_2(k, z)$ самосопряженные при $z < 0$. Кроме того, предельный оператор $G_2(k, 0)$ принадлежит Σ_1 , и $G_2(k, z)$ равномерно сходится к $G_2(k, 0)$ при $z \rightarrow 0$. Оператор $G_1(k, z)$ имеет ранг $\ell < \infty$, и число ℓ не зависит от $z < 0$ и $k \in \mathbb{T}^\nu$. Из неравенства Вейля имеем

$$n(1, G(k, z)) \leq n(\varepsilon, G_1(k, z)) + n(1 - \varepsilon, G_2(k, z)) \quad (3.8)$$

при $0 < \varepsilon < 1$. Первое слагаемое в правой части этого неравенства не превышает ранга ℓ оператора $G_1(k, z)$, а второе слагаемое конечно для любого $z < 0$ из-за компактности предельного оператора $G_2(k, 0)$ и $\lim_{z \rightarrow 0-} \|G_2(k, z) - G_2(k, 0)\| = 0$. Отсюда и из принципа Бирмана–Швингера (3.1) следует утверждение теоремы.

Из доказательства теоремы 2.1 следует

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\varepsilon_k^{-1}(m(k)) = \{p^0, p^1, p^2, \dots, p^s\}$ и p^ℓ , $\ell \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$, является точкой минимума функции ε_k кратности $2n_\ell$. Положим $n_0 = \max_{1 \leq \ell \leq s} n_\ell$. Тогда для любого $v^{1/2}(p)$ из класса $C^{n_0-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu)$ оператор $H(k)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\nu \geq 3$ и $\varepsilon_k^{-1}(m(k))$ состоит из невырожденных экстремальных точек. Тогда предельный оператор $Q(k, 0)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что каждая экстремальная точка конечного порядка изолирована, поэтому $\varepsilon_k^{-1}(m(k))$ содержит конечное число экстремальных точек, скажем, $\varepsilon_k^{-1}(m(k)) = \{p^1, p^2, \dots, p^n\} \subset \mathbb{T}^\nu$. Из предположения (2.2) следует, что $v^{1/2} \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$. Пользуясь этим фактом, покажем, что

$$\int_{(\mathbb{T}^\nu)^2} \left| \frac{v^{1/2}(p-q)}{\sqrt{\varepsilon_k(q) - m(k)}} \right|^2 dp dq < \infty. \quad (3.9)$$

Действительно, делая замену переменных $p - q = p'$ в интеграле (3.9), получим

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{T}^\nu)^2} \left| \frac{v^{1/2}(p')}{\sqrt{\varepsilon_k(q) - m(k)}} \right|^2 dp' dq &= \int_{\mathbb{T}^\nu} |v^{1/2}(p)|^2 dp \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - m(k)} = \\ &= \|v^{1/2}\|^2 \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - m(k)}. \end{aligned}$$

Так как все экстремальные точки $p^j \in \varepsilon_k^{-1}(m(k))$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, являются невырожденными, то при $\nu \geq 3$ последний интеграл сходится.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.2. Тогда оператор $H(k)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений, и верно равенство

$$n(0, -H(k)) = n(1, G(k, 0)), \quad (3.10)$$

т.е. число отрицательных собственных значений оператора $H(k)$ совпадает с числом собственных значений оператора $G(k, 0)$, больших 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2 предельный оператор $G(k, 0) = (Q(k, 0))^* Q(k, 0)$ является компактным. Из компактности оператора $G(k, 0)$ и равенства (3.10) следует конечность числа отрицательных собственных значений оператора $H(k)$. Поэтому достаточно доказать равенство (3.10). В работе [8] оно доказано для случая, когда $\nu = 3$ и Δ совпадает с разностным оператором Лапласа на решетке (см. ниже формулу (4.1)). В нашем случае доказательство проводится аналогично.

4. СЛУЧАЙ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда оператор кинетической энергии Δ совпадает с разностным оператором Лапласа на решетке, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{j=1}^{\nu} [\hat{\psi}(x + e_j) - 2\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x - e_j)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu), \quad (4.1)$$

где $e_j, j \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, – единичные орты в $\mathbb{Z}^\nu$. В этом случае функция $\varepsilon(q)$ равна

$$\varepsilon(q) = \sum_{j=1}^{\nu} (1 - \cos q_j).$$

Функцию $\varepsilon_k(p)$, определенную по формуле (2.3), можно представить в виде

$$\varepsilon_k(q) = \frac{\nu}{m_1} + \frac{\nu}{m_2} - \sum_{j=1}^{\nu} [a(k_j) \cos q_j + b(k_j) \sin q_j], \quad (4.2)$$

где коэффициенты $a(k_j)$ и $b(k_j)$ равны

$$a(k_j) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \frac{k_j}{2}, \quad b(k_j) = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \sin \frac{k_j}{2}.$$

Из равенства (4.2) вытекает следующее представление для функции $\varepsilon_k(q)$:

$$\varepsilon_k(q) = \frac{\nu}{m_1} + \frac{\nu}{m_2} - \sum_{j=1}^{\nu} r(k_j) \cos(q_j - p(k_j)), \quad (4.3)$$

где

$$r(k_j) = \sqrt{a^2(k_j) + b^2(k_j)}, \quad p(k_j) = \arcsin \frac{b(k_j)}{r(k_j)} \in [0, \pi].$$

Отсюда мы находим, что ширина непрерывного спектра $\omega(k)$ равна

$$\omega(k) = \sum_{j=1}^{\nu} 2r(k_j).$$

В случае одинаковых масс ($m_1 = m_2 = 2m$) имеем

$$\varepsilon_k(q) = \frac{\nu}{m} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\nu} \cos \frac{k_i}{2} \cos q_j, \quad \omega(k) = \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{\nu} \cos \frac{k_i}{2}. \quad (4.4)$$

Заметим, что при $m_1 = m_2 = 2m$ и $k_i = \pi$ для любого $p_i \in (-\pi; \pi]$ точка $p = e_i p_i \in \mathbb{T}^\nu$ является бесконечнократной экстремальной точкой для функции $\varepsilon_k(p)$. В этом случае экстремальная точка функции $\varepsilon_k(p)$ не изолирована.

Очевидно, что $\omega(k_1, k_2, \dots, k_\nu)$ есть положительная функция в $(-\pi, \pi)^\nu$, четная по каждому $k_j \in (-\pi, \pi)$. Заметим, что

$$\omega(k) = 0$$

тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$ и $k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = \pi$. Из представления (4.3) и соотношений (4.4) следует

ЛЕММА 4.1. Пусть $m_1 \neq m_2$, $k \in \mathbb{T}^\nu := (-\pi, \pi]^\nu$, или $m_1 = m_2$, $k \in (-\pi, \pi)^\nu$. Тогда функция $\varepsilon_k(p)$ имеет единственный невырожденный минимум.

Теорема 2.1 и лемма 4.1 приводят к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\nu \leq 2$ и $v^{1/2}(p) \in C^{1-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu)$. Если $m_1 \neq m_2$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, или $m_1 = m_2$, $k \in (-\pi, \pi)^\nu$, то оператор $H(k)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\nu \geq 3$ и выполняется условие (2.2). Если $m_1 \neq m_2$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, или $m_1 = m_2$, $k \in (-\pi, \pi)^\nu$, то оператор $H(k)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

Известно, что если $\nu = 1$, $m_1 = m_2$, то $\sigma_{\text{disc}}(H(\pi)) = \sigma(-V) = \{-\hat{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Приведем теперь некоторые факты из работы [4], где рассматривался оператор $H(k)$ с бесконечным числом собственных значений в случае $\nu = 2$, $m_1 = m_2 = 1$. Обозначим через $W(j)$, $j \in \{1, 2\}$, класс потенциалов $\hat{v}$ таких, что

$$W(j) = \{\hat{v}: \text{supp } \hat{v} \subset e_j \mathbb{Z}; \hat{v}(ne_j) > \hat{v}((n+1)e_j), n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad (4.5)$$

а через $M(j) \subset \mathbb{T}^2$ – множество $M(j) = \{(k_1, k_2): k_j = \pi\}$. Тогда для любого $(k, \hat{v}) \in M(j) \times W(j)$ оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вида

$$z_n(k) = \frac{\omega(k)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega(k)}{2}\right)^2 + \hat{v}^2(ne_j)}. \quad (4.6)$$

Более того, из них только $z_0(k)$ невырожденное, а остальные $z_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$, – двукратные собственные значения. Собственным значениям $z_0(k)$ и $z_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$, соответствуют собственные функции

$$f_0(p) = \frac{1}{\varepsilon_k(p) - m(k) - z_0(k)}, \quad f_n^\pm(p) = \frac{e^{\pm in p_j}}{\varepsilon_k(p) - m(k) - z_n(k)}.$$

В работе [9] описано множество $\widehat{M}(j) \subset \mathbb{T}^3$, $j \in \{1, 2, 3\}$, и класс потенциалов $\widehat{W}(j)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, такие, что если $(k, \hat{v}) \in \widehat{M}(j) \times \widehat{W}(j)$, то оператор $H(k)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О поведении гладких функций в окрестностях экстремальных точек

Пусть $U \subset \mathbb{R}^\nu$ – некоторая окрестность начала координат, $\varphi(p)$ – непрерывная вещественнозначная функция, определенная на U и имеющая минимум в некоторой точке $p = p_0$. Значение функции $\varphi(p)$ в экстремальной точке p_0 называется экстремальным значением этой функции.

Далее ради упрощения обозначений мы будем считать, что $p_0 = 0$. Согласно известной теореме Ферми, если $\varphi(p)$ – дифференцируемая функция в нуле, то $\nabla \varphi(0) = 0$, иными словами, нуль является критической точкой этой функции. Легко показать, что если $\varphi \in C^2$ – некоторая функция, имеющая локальный минимум в нуле, и нуль – невырожденная критическая точка, т.е. $\text{Det}(D^2 \varphi(0)) \neq 0$, то нуль является экстремальной точкой кратности 2.

Согласно теореме Лоясевича [16], если f – вещественно-аналитическая функция и $x = 0$ – изолированная экстремальная точка, то существует $\mu > 0$ такое, что для любой точки $x \in U$ выполняется неравенство $|f(x) - f(0)| \geq C|x|^\mu$. Иными словами, $x = 0$ является экстремальной точкой конечной кратности. Как показывает следующий классический пример, в гладком случае изолированные экстремальные точки могут быть бесконечнократными:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

В случае выпуклых функций имеется аналогичный более точный результат Шульца [17].

Пусть f – бесконечно-гладкая функция. Функция f называется выпуклой, если для любых точек $x, y \in U \in \mathbb{R}^\nu$ (где U – некоторая выпуклая окрестность начала координат) и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, имеет место неравенство

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Гладкая функция f называется функцией конечного типа в точке $x = 0$, если для любого единичного вектора e существует натуральное число $N \geq 2$ такое, что $D_e^N f(0) \neq 0$, где $D_e f(0)$ производная функции f по направлению вектора e в точке $x = 0$. Напомним, что P называется квазиоднородной функцией с весом $(1/n_1, \dots, 1/n_\nu)$, если для любого положительного t и $y \in \mathbb{R}^\nu$ выполняется равенство

$$P(t^{1/n_1}y_1, \dots, t^{1/n_\nu}y_\nu) = tP(y_1, \dots, y_\nu).$$

ТЕОРЕМА П.1 [17]. Если f – выпуклая функция конечного типа в точке $x = 0$ и $|f(0)| + |\nabla f(0)| = 0$, то существует вращение V в $\mathbb{R}^\nu$ такое, что для функции $f_1(y) := f(Vy)$ справедливы следующие утверждения:

1) существует квазиоднородный полином $P(y)$ с весом $(1/n_1, \dots, 1/n_\nu)$, где $n_1 \leq \dots \leq n_\nu$ – некоторые определенные единственным образом четные натуральные числа, такой, что для функции $f_1(y)$ имеет место соотношение

$$f_1(y) = P(y) + R(y);$$

2) для остатка $R(y)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{R(t^{1/n_1}y_1, \dots, t^{1/n_\nu}y_\nu)}{t^{1+\varepsilon}} = 0,$$

где ε – некоторое положительное число;

3) $P(y)$ – выпуклый полином, причем для любого $y \neq 0$ выполняется неравенство $P(y) > 0$.

СЛЕДСТВИЕ П.1. Если f – выпуклая функция конечного типа и $|f(0)| + |\nabla f(0)| = 0$, то точка $y = 0$ является экстремальной точкой типа m , где $m = \max\{n_1, \dots, n_\nu\}$, $n_1, \dots, n_\nu$ – четные натуральные числа, определенные в теореме П.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(y) = P(y) + R(y)$, где $P(y)$ и $R(y)$ – квазиоднородный полином и остаток, определенные согласно теореме П.1.

Заметим, что если $P(y) > 0$ – выпуклый квазиоднородный полином с весом $(1/n_1, \dots, 1/n_\nu)$, то существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для любого $y \in \mathbb{R}^\nu$ выполняется неравенство

$$P(y) \geq C_1(y_1^{n_1} + \dots + y_\nu^{n_\nu})$$

и для остаточного члена $R(y)$ в некоторой окрестности нуля имеет место оценка сверху:

$$R(y) \leq C_2(y_1^{n_1} + \dots + y_\nu^{n_\nu})^{1+\varepsilon}.$$

Теперь очевидным образом получаем существование окрестности U со свойством

$$f(y) \geq C(y_1^{n_1} + \dots + y_\nu^{n_\nu}).$$

Фактически в некоторой окрестности нуля мы имеем $f(y) \asymp P(y) \asymp y_1^{n_1} + \dots + y_\nu^{n_\nu}$, где символ $\asymp$ означает, что справедливы оценки сверху и снизу с некоторыми константами. Отсюда легко вытекает следствие П.1.

ЗАМЕЧАНИЕ П.1. Аналогичная оценка снизу для аналитических функций с экстремальной точкой в нуле получена Васильевым [18] в терминах многогранников Ньютона, однако результаты Васильева справедливы лишь для класса аналитических функций общего положения.

Ниже мы покажем связь между кратностью экстремальной точки и числом Милнора. Для полноты изложения приведем соответствующие определения [11].

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ – алгебра ростков бесконечно дифференцируемых функций в нуле и f – бесконечно-гладкая функция, имеющая критическую точку в нуле. Градиентным идеалом, соответствующим функции f , называется идеал $I_{\nabla f}$ алгебры $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$, порожденный элементами $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_\nu$, т.е.

$$I_{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_1} C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\nu} C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu).$$

Локальной алгеброй $Q_{\nabla f}$ градиентного отображения функции f называется фактор-алгебра $Q_{\nabla f} := C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) / I_{\nabla f}$.

Локальная алгебра $Q_{\nabla f}$ естественно обладает структурой линейного пространства над $\mathbb{R}$.

Критическая точка 0 гладкой функции f называется конечнократной, если локальная алгебра $Q_{\nabla f}$ является конечномерным линейным пространством над $\mathbb{R}$ размерности μ . Число μ называется кратностью критической точки или числом Милнора. Мы используем термин “число Милнора”, чтобы различать кратности экстремальных и критических точек.

Отметим, что экстремальные точки с конечной кратностью могут быть критическими точками с бесконечным числом Милнора. Например, для функции $f(x) =$

$(x_1^2 + x_2^2)^2$ кратность экстремальной точки 0 равна двум, а соответствующая локальная алгебра $Q_{\nabla f}$ является бесконечномерным линейным пространством. Теперь рассмотрим связь между кратностью экстремальной точки и числом Милнора.

Через $C^n(U)$ обозначим пространство n раз непрерывно-дифференцируемых функций на U , где U – некоторая окрестность начала координат и n – некоторое фиксированное натуральное число. Пусть $\varphi \in C^n(U)$ – функция, имеющая точку минимума в начале координат. Через $m(0)$ обозначим кратность экстремальной точки 0. Если $\varphi \in C^\infty(U)$ – функция с критической точкой в нуле, то через $\mu(0)$ обозначается число Милнора для функции φ в этой точке.

Для $\varphi \in C^n(U)$ через $J^n(\varphi)(x)$ [11] обозначается n -джет (т.е. отрезок ряда Тейлора порядка n) функции φ в точке 0.

Известна следующая теорема, доказанная Тужроном [19].

ТЕОРЕМА П.2. Если функция $\varphi \in C^\infty(U)$ имеет критическую точку с числом Милнора $1 \leq \mu < \infty$ в нуле, то существует диффеоморфное в окрестности нуля отображение $g: V \mapsto U$, удовлетворяющее условиям $g(0) = 0$ и $\varphi(g(y)) = J^{\mu+1}(\varphi)(y)$. Другими словами, φ в некоторой окрестности нуля диффеоморфным отображением приводится к многочлену степени не выше $\mu + 1$.

Далее, кратность экстремальных точек оценивается с помощью числа Милнора.

ТЕОРЕМА П.3. Пусть φ – вещественнозначная функция из класса $C^{n+3}(U)$ и $0 \in U$ – экстремальная точка для функции φ . Если существует бесконечно-гладкая функция $\psi \in C^\infty(U)$ такая, что нуль является критической точкой с числом Милнора $\mu := \mu(0) \leq n$ для функции ψ и $J^{\mu+1}(\varphi)(x) = J^{\mu+1}(\psi)(x)$, то справедливо неравенство $m(0) \leq \mu(0) + 1$, где $m(0)$ – экстремальная кратность точки 0 для функции φ . В частности, если $\varphi \in C^\infty(U)$ – функция с экстремальной точкой в нуле и для нее нуль является критической точкой с числом Милнора $\mu(0) < \infty$, то для экстремальной кратности точки 0 справедлива оценка $m(0) \leq \mu(0) + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ П.2. Пусть $f(x) = x^{2n}$. Тогда число Милнора в нуле $\mu(0) = 2n - 1$ и кратность этой экстремальной точки $m(0) = 2n$. Таким образом, в этом случае мы имеем равенство $m(0) = \mu(0) + 1$. Этот пример показывает неулучшаемость оценки теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ П.3. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\varphi(0) = 0$. Пусть $P(x)$ – $(\mu + 1)$ -джет (полином степени не выше $\mu + 1$) функции φ в точке $\alpha = 0$. Сначала покажем, что $P(x)$ также имеет минимум в этой точке. Согласно теореме П.2 [19] ψ диффеоморфно эквивалентно $J_\alpha^{\mu+1}\psi$. Поэтому мы можем считать ψ полиномиальной функцией, точнее, можно предполагать, что $\psi(x) = P(x)$. Пусть μ – нечетное число, тогда мы можем написать формулу Тейлора для функции φ :

$$\varphi(x) = q(x) + R(x),$$

где $q(x)$ – полином степени $\mu + 3$ и $R(x) = o(|x|^{\mu+3})$. Для фиксированного положительного числа ε определим вспомогательную функцию $\varphi_1(x) = q(x) + \varepsilon|x|^{\mu+3}$.

Тогда $\varphi_1(x) = q(x) + \varepsilon|x|^{\mu+3} \geq \varphi(x)$ в некоторой достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, $\varphi_1(x)$ также имеет локальный изолированный минимум в точке $x = 0$. С другой стороны, $\varphi_1 \in C^\infty(U)$. Мы можем применить теорему [П.2](#) к функции φ_1 , и она диффеоморфно эквивалентна P . Таким образом, и функция φ_1 , и P имеют локальные изолированные минимумы в начале координат.

Пусть теперь μ – четное число. В этом случае мы рассмотрим $q(x) - (\mu + 2)$ -джет функции φ . Тогда

$$\varphi(x) = q(x) + R(x)$$

и $R(x) = o(|x|^{\mu+2})$, поэтому вспомогательная функция $\varphi_1(x) = q(x) + \varepsilon|x|^{\mu+2}$ также имеет локальный минимум в точке $x = 0$. С другой стороны, согласно теореме [П.2](#) φ_1 диффеоморфно эквивалентна $P(x)$. Следовательно, $P(x)$ также имеет локальный минимум в начале координат.

Теперь рассмотрим однопараметрическую деформацию полинома $P(x)$ вида

$$F_\varepsilon(x) = P(x) - \varepsilon x_1^{\mu+1},$$

где ε – фиксированное вещественное число.

Так как кратность критической точки $x = 0$ равна μ , то $x_1^\mu \in I_{\nabla P}$ [[11](#)]. Следовательно, существуют аналитические функции $\{h_k\}_{k=1}^\nu$ в начале координат такие, что справедливо тождество

$$x_1^\mu = h_1(x) \frac{\partial P}{\partial x_1} + h_2(x) \frac{\partial P}{\partial x_2} + \cdots + h_\nu(x) \frac{\partial P}{\partial x_\nu}.$$

Поэтому если ε – достаточно малое число, то справедливо соотношение $I_{\nabla P} = I_{\nabla F_\varepsilon}$. Таким образом, при любом фиксированном значении ε кратность критической точки функции F_ε в нуле равна μ .

Заметим, что $x = 0$ является критической точкой конечной кратности для полинома P , поэтому существует шар $V \subset C^\nu$ с центром в начале координат такой, что для любой точки $x \in \partial V$ (граница шара) справедливо неравенство $|\nabla P(x)| > \delta > 0$. Следовательно, существует ненулевое число ε , удовлетворяющее следующим условиям: $F_\varepsilon(x) > 0$ для всех $x \in \partial V \cap R^\nu$; $|\nabla P(x)| > |\varepsilon| |x_1|^\mu$ для всех $x \in \partial V$. Согласно теореме Руше [[20](#)] об отображении многих комплексных переменных отображения $\nabla F_\varepsilon(x)$ и $\nabla P(x)$ имеют одинаковое число нулей (с учетом кратности) в V . Обе вектор-функции $\nabla F_\varepsilon(x)$ и $\nabla P(x)$ имеют нуль одинаковой кратности в начале координат, причем $\nabla P(x)$ не имеет других нулей в V , следовательно, $\nabla F_\varepsilon(x)$ также не имеет нулей, отличных от $x = 0$.

Поэтому при таких фиксированных ε для любой точки $x \in \bar{V} \cap R^\nu$ справедливо неравенство $F_\varepsilon(x) \geq 0$. Действительно, если существует $x_0 \in \bar{V} \cap R^\nu$ такое, что $F_\varepsilon(x_0) < 0$, то мы берем $\min_{x \in \bar{V} \cap R^\nu} F_\varepsilon(x) = m$, и существует x_1 такое, что $F_\varepsilon(x_1) = m$. Так как $F_\varepsilon(x) > 0$ для всех $x \in \partial V \cap R^\nu$, верно $0 \neq x_1 \in \dot{V} \cap R^\nu$, т.е. x_1 – внутренняя точка множества V . Согласно теореме Ферми $\nabla F_\varepsilon(x_1) = 0$, что противоречит вышеупомянутой теореме Руше.

Таким образом, если ε – достаточно малое фиксированное число, то существует окрестность нуля $V_R = V \cap R^\nu$ такая, что при любом $x \in V_R$ выполняется неравенство

$F_\varepsilon(x) \geq 0$, иными словами, при любом $x \in V_R$ имеем

$$P(x) \geq -\varepsilon x_1^{\mu+1}. \quad (\text{П.1})$$

Так как ε – любое достаточно малое вещественное число, то мы можем в качестве ε взять как достаточно малое положительное число, так и достаточно малое отрицательное. Следовательно, имеется окрестность нуля V_R такая, что для любого $x \in V_R$ выполняется неравенство

$$P(x) \geq |\varepsilon| |x_k|^{\mu+1}$$

при $k = 1$.

Аналогичные неравенства имеют место при $k = 2, 3, \dots, \nu$. Суммируя эти неравенства, получим

$$P(x) \geq \frac{\varepsilon}{\nu} (|x_1|^{\mu+1} + |x_2|^{\mu+1} + \dots + |x_\nu|^{\mu+1}).$$

Итак, в некоторой окрестности нуля мы имеем неравенство

$$P(x) \geq C|x|^{\mu+1}.$$

Так как $\varphi(x) = P(x) + o(|x|^{\mu+1})$, то из полученной оценки имеем

$$\varphi(x) \geq C|x|^{\mu+1}$$

в некоторой окрестности нуля. Отсюда $m(0) \leq \mu + 1$. Теорема П.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ П.3. Согласно теореме Васильева [18] число Милнора гладкой функции, имеющей точку экстремума в критической точке, – нечетное. Воспользовавшись этим утверждением, в неравенстве (П.1) мы можем считать ε отрицательным числом (мы не использовали эту теорему, так как она не упрощает доказательства теоремы П.3).

СЛЕДСТВИЕ П.2. Если φ удовлетворяет условиям теоремы П.3 и $P(x) - (\mu + 1)$ -джет этой функции, то в некоторой окрестности нуля справедливо неравенство $\varphi(x) \geq P(x)/2$.

Благодарности. Авторы глубоко признательны рецензенту за ценные замечания. Работа финансировалась ФПФИ АН РУз (гранты № 76-06, 77-06).

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [2] Ш. С. Маматов, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **79** (1989), 163–179.
- [3] R. A. Minlos, A. I. Mogilner, “Some problems concerning spectra of lattice models”, *Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard* (Dubna, USSR, 1988), eds. P. Exner, P. Seba, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, 243–257.
- [4] Ж. И. Абдуллаев, *УзМЖ*, 2005, № 1, 3–11.
- [5] Ж. И. Абдуллаев, *Докл. АН РУз*, 2005, № 4, 5–9.
- [6] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136** (2003), 231–245.

- [7] P. A. Faria da Viegа, L. Ioriatti, M. O'Carroll, *Phys. Rev. E* (3), **66** (2002), 016130.
- [8] S. Albeverio, S. N. Lakaev, J. I. Abdullaev, *On the spectral properties of two-particle discrete Schrödinger operators*, Preprint. SFB 611. № 170, Univ. Bonn, 2004.
- [9] Ж. И. Абдуллаев, “Асимптотика собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке”, *Сборник трудов международной конференции “Современные проблемы математической физики и информационных технологий”*, т. 1 (18–24 апреля 2005, г. Ташкент), 19–23.
- [10] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [11] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982.
- [12] Е. М. Никишин, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **10** (1984), 3–77.
- [13] Ж. И. Абдуллаев, *ТМФ*, **147** (2006), 47–57.
- [14] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН, **69**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963.
- [15] И. А. Икромов, Ф. Шарипов, *Функц. анализ и его прилож.*, **32**:1 (1998), 63–65.
- [16] S. Łojasiewicz, *Studia Math.*, **18** (1959), 87–136.
- [17] H. Schulz, *Indiana Univ. Math. J.*, **40** (1990), 1267–1275.
- [18] В. А. Васильев, *Функц. анализ и его прилож.*, **11**:3 (1977), 1–11.
- [19] J. C. Tougeron, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **18**:1 (1968), 177–240.
- [20] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1985.

Поступила в редакцию 19.06.2006,
после доработки 2.12.2006