Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 518–527

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:40:24

© 2007 г.

Т. Х. Расулов*

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Рассмотрена модель, описывающая “урезанный” (по числу частиц) оператор, действующий в прямой сумме нуль-, одно- и двухчастичных подпространств фоковского пространства. При некоторых естественных условиях на параметры, задающие данную модель, доказана конечность дискретного спектра.

Ключевые слова: дискретный спектр, пространство Фока, компактный оператор, непрерывность в равномерной операторной топологии, операторы Гильберта–Шмидта, уравнение Вайнберга.

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые задачи физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2] и статистической физики [3] приводят к необходимости исследования дискретного спектра гамильтонианов с несохраняющимся ограниченным числом квазичастиц. Изучению спектральных свойств таких гамильтонианов в непрерывном пространстве посвящены работы [4], [5].

В настоящей работе рассматривается модель, описывающая “урезанный” (по числу частиц) оператор H , действующий в прямой сумме нуль-, одно- и двухчастичных подпространств фоковского пространства и являющийся решетчатым аналогом гамильтонианов модели спин-бозона с ограниченным числом частиц [4] и модели светового излучения с не более чем тремя фотонами [5]. Следует отметить, что некоторые спектральные свойства модельного оператора H изучены в работах [6]–[8]. В частности, в работе [7] установлена (без доказательства) конечность дискретного спектра, лежащего левее “трехчастичной” ветви существенного спектра модельного оператора H . Данная работа посвящена полному доказательству этого результата в более общем случае.

Отметим, что в работе [9], пользуясь уравнениями типа Фаддеева и Вайнберга, а также разложением определителя Фредгольма, авторы доказали конечность дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера с парными

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: rth@mail.ru

контактными взаимодействиями при отсутствии виртуальных уровней у операторов, описывающих двухчастичные подсистемы. В работе [10] с помощью принципа Бирмана–Швингера доказана конечность дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера, описывающего системы трех частиц (два бозона и третья частица иной природы). В этой статье при доказательстве конечности дискретного спектра модельного оператора H , задающегося как операторная матрица, использован метод, изложенный в работе [11]. Следует отметить, что в непрерывном случае, рассмотренном в работе [11], “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви непрерывного спектра представляют собой полупрямые и пересекаются. В нашем случае в отличие от непрерывного случая “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра модельного оператора H заполняют отрезки конечной длины и могут не пересекаться (см. теорему 2). Наш метод можно использовать даже в том случае, когда существенный спектр модельного оператора H имеет лауну (см. случай “в” теоремы 3).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\mathbf{T}^3 \equiv [-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб, $L_2(\mathbf{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$, $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций на $(\mathbf{T}^3)^2$, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 = L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и задающийся как операторная матрица

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где операторы $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются формулами

$$\begin{aligned} (H_{00}f_0)_0 &= u_0f_0, & (H_{01}f_1)_0 &= \int v(q')f_1(q')dq', \\ H_{02} &\equiv 0, & (H_{10}f_0)_1(p) &= v(p)f_0, & (H_{11}f_1)_1(p) &= u(p)f_1(p), \\ (H_{12}f_2)_1(p) &= \int v(q')f_2(p, q')dq', & H_{20} &\equiv 0, \\ (H_{21}f_1)_2(p, q) &= \frac{v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)}{2}, & (H_{22}f_2)_2(p, q) &= w(p, q)f_2(p, q). \end{aligned}$$

Здесь u_0 – фиксированное вещественное число, $v(\cdot)$, $u(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbf{T}^3$, $w(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbf{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В математической физике операторы H_{01} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{10} и H_{21} – операторами рождения.

Можно легко проверить, что модельный оператор H , определенный операторной матрицей (2.1) и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Приведем несколько основных обозначений, которые будут применяться на протяжении всей работы.

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)]$ функцию

$$\Delta(p; z) = u(p) - z - \frac{1}{2} \int \frac{v^2(q') dq'}{w(p, q') - z},$$

где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q).$$

Пусть σ – множество тех точек $z \in \mathbb{C}$, для которых равенство $\Delta(p; z) = 0$ имеет место хотя бы для одной $p \in \mathbf{T}^3$.

Введем обозначения

$$m_w = \min_{p, q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad M_w = \max_{p, q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad \Sigma = [m_w; M_w] \cup \sigma.$$

Следующая теорема [6] описывает положение существенного спектра модельного оператора H .

ТЕОРЕМА 1. *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ модельного оператора H справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множества σ и $[m_w; M_w]$ называются соответственно “*двухчастичной*” и “*трехчастичной*” ветвями существенного спектра модельного оператора H .

Далее мы будем предполагать, что все производные функции $u(\cdot)$ и частные производные второго порядка функции $w(\cdot, \cdot)$ непрерывны в $\mathbf{T}^3$ и $(\mathbf{T}^3)^2$, соответственно, причем функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$.

Для любых $p, q \in \mathbf{T}^3$ и $z < m_w$ справедливо неравенство $w(p, q) - z > 0$. Отсюда следует, что

$$\int \frac{v^2(q') dq'}{w(p, q') - z} > 0, \quad p \in \mathbf{T}^3, \quad z < m_w.$$

Так как функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и функция $v(\cdot)$ непрерывна на $\mathbf{T}^3$, то конечен интеграл

$$\int \frac{v^2(q') dq'}{w(p, q') - m_w} > 0, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta(0; m_w) = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta(p; m_w),$$

следовательно, функция $\Delta(\cdot; m_w)$ непрерывна на $\mathbf{T}^3$.

Пусть $E_{\min}$ и $E_{\max}$ – соответственно точная нижняя грань и точная верхняя грань множества $\sigma \cap (-\infty; \max_{p \in \mathbf{T}^3} m(p))$.

Следующая теорема [7], [8] описывает структуру части существенного спектра модельного оператора H , расположенной в $(-\infty; M_w]$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие утверждения:*

- а) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m_w) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) \cap (-\infty; M_w] = [m_w; M_w]$;
- б) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m_w) < 0$ и $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m_w) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) \cap (-\infty; M_w] = [E_{\min}; M_w]$, причем $E_{\min} < m_w$;
- в) если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m_w) < 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H) \cap (-\infty; M_w] = [E_{\min}; E_{\max}] \cup [m_w; M_w]$, причем $E_{\max} < m_w$.

Положим

$$\mathbf{D}(p; z) = \left(\frac{\partial^2 \Delta(p; z)}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} \right)_{s, l=1, \overline{3}}, \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3, \quad z < m_w.$$

Так как $E_{\min}$, $E_{\max}$ принадлежат σ , существуют точки $p_1, q_1 \in \mathbf{T}^3$ такие, что $\Delta(p_1; E_{\min}) = 0$ и $\Delta(q_1; E_{\max}) = 0$. Следует отметить, что последние равенства могут выполняться в нескольких точках.

Сформулируем следующие важные для дальнейших рассуждений условия.

УСЛОВИЕ 1. Предположим, что

$$\{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p; E_{\min}) = 0\} = \{p_1, \dots, p_n\}, \quad 1 \leq n < +\infty,$$

матрица $\mathbf{D}(p_i; E_{\min})$, $i = \overline{1, n}$, $E_{\min} < m_w$, положительно определена, и для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ справедливо неравенство $\Delta(p; E_{\min}) > 0$.

УСЛОВИЕ 2. Предположим, что

$$\{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p; E_{\max}) = 0\} = \{q_1, \dots, q_k\}, \quad 1 \leq k < +\infty,$$

матрица $\mathbf{D}(q_j; E_{\max})$, $j = \overline{1, k}$, $E_{\max} < m_w$, отрицательно определена, и для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{q_1, \dots, q_k\}$ справедливо неравенство $\Delta(p; E_{\max}) < 0$.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть имеет место одно из следующих условий:*

- а) $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) > 0$;
- б) $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) < 0$, $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) \geq 0$ и условие 1;
- в) $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) < 0$ и условия 1, 2.

Тогда часть дискретного спектра модельного оператора H , расположенная левее “трехчастичной” ветви существенного спектра, конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Класс функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 3, является непустым (см. утверждение в п. 3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При аналогичных естественных условиях на параметры, задающие модельный оператор H , можно доказать конечность части дискретного спектра, расположенной правее “трехчастичной” ветви существенного спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) = \Delta(0; m_w) = 0$ и $v(0) \neq 0$, то модельный оператор H имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее точки $z = m_w$ [7], [8], а при $v(0) = 0$ модельный оператор H может иметь только конечное число собственных значений, лежащих левее точки $z = m_w$ [8].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе мы построим уравнение, представляющее собой “симметризованный” вариант известного уравнения Вайнберга и приведем некоторые вспомогательные утверждения, с помощью которых докажем основной результат работы.

В дальнейшем через δ , C_1 , C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

3.1. Вспомогательные утверждения. Пусть $U_\delta(0) = \{p \in \mathbf{T}^3: |p| < \delta\}$ – δ -окрестность точки $p = 0 \in \mathbf{T}^3$, $\delta > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие “а” теоремы 3. Тогда существует положительное число C_1 такое, что при всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z \leq m_w$ имеет место неравенство $\Delta(p; z) \geq C_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при каждом $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p; \cdot)$ монотонно убывает при $z \in (-\infty; m_w(p))$, то

$$\Delta(p; z) \geq \Delta(p; m_w) \geq \min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m_w) > 0$$

при всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z \leq m_w$. Отсюда и из непрерывности функции $\Delta(\cdot; m_w)$ на компактном множестве $\mathbf{T}^3$ следует, что существует число $C_1 > 0$ такое, что $\Delta(p; z) \geq C_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Существуют числа $\delta > 0$, $C_1, C_2, C_3 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} C_1(p^2 + q^2) &\leq w(p, q) - m_w \leq C_2(p^2 + q^2) \quad \text{при} \quad (p, q) \in U_\delta(0) \times U_\delta(0), \\ w(p, q) - z &\geq w(p, q) - m_w > C_3 \quad \text{при} \quad (p, q) \notin U_\delta(0) \times U_\delta(0) \quad \text{и} \quad z \leq m_w. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все частные производные второго порядка функции $w(\cdot, \cdot)$ непрерывны в $(\mathbf{T}^3)^2$ и функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$, то согласно лемме Адамара [12] в δ -окрестности этой точки выполняется равенство

$$w(p, q) = m_w + \sum_{s, l=1}^3 H_{sl}(p, q) p^{(s)} q^{(l)}, \quad p, q \in U_\delta(0),$$

где функция $H_{sl}(\cdot, \cdot)$, $s, l = 1, 2, 3$, непрерывна в $U_\delta(0) \times U_\delta(0)$. Отсюда следует, что существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и некоторая δ -окрестность $U_\delta(0)$ нуля такие, что справедливы неравенства, приведенные в утверждении леммы.

Пусть $\tau_{\text{ess}}(H)$ – нижняя грань существенного спектра модельного оператора H . Отметим, что если при всех $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ ($z \in (E_{\max}, m_w)$) выполнено условие “В” теоремы 3 и $p \in \mathbf{T}^3$, то $\Delta(p; z) \geq 0$ ($-\Delta(p; z) \geq 0$), следовательно, существует $\sqrt{\Delta(p; z)}$ ($\sqrt{-\Delta(p; z)}$).

Пусть оператор $W(z)$ при каждом $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ действует в пространстве $\mathcal{H}$ как операторная матрица, и ее матричные элементы $W_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, при $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} (W_{00}(z)f_0)_0 &= (u_0 + 1 - z)f_0, & (W_{01}(z)f_1)_0 &= \int \frac{v(q')f_1(q')}{\sqrt{\Delta(q'; z)}} dq', \\ (W_{10}(z)f_0)_1(p) &= -\frac{v(p)f_0}{\sqrt{\Delta(p; z)}}, \\ (W_{11}(z)f_1)_1(p) &= \frac{v(p)}{2\sqrt{\Delta(p; z)}} \int \frac{v(q')f_1(q') dq'}{\sqrt{\Delta(q'; z)}(w(p, q') - z)}, \\ (W_{20}(z)f_0)_2(p, q) &= \frac{v(p)v(q)f_0}{w(p, q) - z}, & W_{\alpha 2}(z) &\equiv 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \\ (W_{21}(z)f_1)_2(p, q) &= -\frac{v(p)(W_{11}(z)f_1)_1(q) + v(q)(W_{11}(z)f_1)_1(p)}{2(w(p, q) - z)}, \end{aligned}$$

где $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$. При каждом $z \in (E_{\max}, m_w)$ матричные элементы оператора $W(z)$ определяются так же, как в случае $z < \tau_{\text{ess}}(H)$, но роль функции $\Delta(\cdot; \cdot)$ в данном случае играет $-\Delta(\cdot; \cdot)$.

Верна следующая

ЛЕММА 3. Если $f \in \mathcal{H}$ – собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ ($z \in (E_{\max}, m_w)$) модельного оператора H , то f удовлетворяет уравнению Вайнберга $W(z)f = f$, где матричные элементы оператора $W(z)$ при $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ ($z \in (E_{\max}, m_w)$) определены выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z < \tau_{\text{ess}}(H)$ ($z \in (E_{\max}, m_w)$) – собственное значение модельного оператора H и $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 , f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (u_0 - z)f_0 + \int v(q')f_1(q') dq' &= 0, \\ v(p)f_0 + (u(p) - z)f_1(p) + \int v(q')f_2(p, q') dq' &= 0, \\ \frac{v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)}{2} + (w(p, q) - z)f_2(p, q) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Так как $z \notin [m_w; M_w]$, то из третьего уравнения системы (3.1) имеем

$$f_2(p, q) = -\frac{v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)}{2(w(p, q) - z)}. \tag{3.2}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (3.1) и учитывая, что $z < \tau_{\text{ess}}(H)$, получим

$$\begin{aligned} f_0 &= (u_0 + 1 - z)f_0 + \int \frac{v(q')f_1(q')}{\sqrt{\Delta(q'; z)}} dq', \\ f_1(p) &= -\frac{v(p)f_0}{\sqrt{\Delta(p; z)}} + \frac{v(p)}{2\sqrt{\Delta(p; z)}} \int \frac{v(q')f_1(q') dq'}{\sqrt{\Delta(q'; z)}(w(p, q') - z)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для $z \in (E_{\text{max}}, m_w)$

$$f_1(p) = -\frac{v(p)f_0}{\sqrt{-\Delta(p; z)}} + \frac{v(p)}{2\sqrt{-\Delta(p; z)}} \int \frac{v(q')f_1(q') dq'}{\sqrt{-\Delta(q'; z)}(w(p, q') - z)}. \quad (3.4)$$

Подставляя вместо f_1 ее выражение (3.3) ((3.4)) в формулу (3.2), получим уравнение Вайнберга $W(z)f = f$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие “а” (“б”) теоремы 3. Тогда при $z \leq m_w$ ($z \leq E_{\text{min}}$) оператор $W(z)$ является компактным, а операторнозначная функция $W(z)$ непрерывна в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; m_w]$ ($z \in (-\infty; E_{\text{min}}]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие “а” теоремы 3. Из одномерности операторов $W_{00}(z)$, $W_{01}(z)$, $W_{10}(z)$ и $W_{20}(z)$ вытекает их компактность при $z \leq m_w$, а также непрерывность операторнозначных функций $W_{00}(z)$, $W_{01}(z)$, $W_{10}(z)$ и $W_{20}(z)$ в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; m_w]$.

Покажем, что операторы $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ принадлежат классу операторов Гильберта–Шмидта при $z \leq m_w$, а операторнозначные функции $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ непрерывны в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; m_w]$.

Ядра $W_{11}(p, q; z)$ и $W_{21}(p, q, t; z)$ операторов $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ равны

$$W_{11}(p, q; z) = \frac{v(p)v(q)}{2\sqrt{\Delta(p; z)}\sqrt{\Delta(q; z)}(w(p, q) - z)}$$

и

$$W_{21}(p, q, t; z) = -\frac{v(p)W_{11}(q, t; z) + v(q)W_{11}(p, t; z)}{2(w(p, q) - z)},$$

соответственно. Так как функция $v(\cdot)$ непрерывна в $\mathbf{T}^3$, то для некоторого $C_1 > 0$ имеем $|v(p)| \leq C_1$, $p \in \mathbf{T}^3$. Из лемм 2 и 3 следует, что абсолютная величина ядра $W_{11}(p, q; z)$ оператора $W_{11}(z)$ может быть оценена сверху функцией

$$C_1 \left(1 + \frac{\chi_\delta(p)\chi_\delta(q)}{p^2 + q^2} \right), \quad (3.5)$$

а абсолютная величина ядра $W_{21}(p, q, t; z)$ оператора $W_{21}(z)$ – функцией

$$C_1 \left(1 + \frac{\chi_\delta(p)\chi_\delta(t)}{p^2 + t^2} + \frac{\chi_\delta(q)\chi_\delta(t)}{q^2 + t^2} + \frac{\chi_\delta(p)\chi_\delta(q)\chi_\delta(t)}{(p^2 + q^2)(p^2 + t^2)} + \frac{\chi_\delta(p)\chi_\delta(q)\chi_\delta(t)}{(p^2 + q^2)(q^2 + t^2)} \right), \quad (3.6)$$

где $\chi_\delta(\cdot)$ – характеристическая функция множества $U_\delta(0)$.

Ясно, что оценочные функции (3.5) и (3.6) квадратично интегрируемы по совокупности переменных p, q и p, q, t в $(\mathbf{T}^3)^2$ и $(\mathbf{T}^3)^3$, соответственно, что доказывает принадлежность операторов $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ классу операторов Гильберта–Шмидта при $z \leq m_w$.

Ядро оператора $W_{11}(z)$ ($W_{21}(z)$) непрерывно по $p, q \in \mathbf{T}^3$ при $z < m_w$ (по $p, q, t \in \mathbf{T}^3$ при $z < m_w$) и квадратично интегрируемо по совокупности переменных p, q в $(\mathbf{T}^3)^2$ (p, q, t в $(\mathbf{T}^3)^3$) при $z \leq m_w$. Тогда по теореме Лебега операторнозначные функции $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ непрерывны в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; m_w]$.

Пусть теперь выполняется условие “б” теоремы 3. В силу условия 1 точки $p = p_i$, $i = \overline{1, n}$, являются невырожденными точками минимума функции $\Delta(\cdot; E_{\min})$, следовательно, существуют числа $\delta, C_1, C_2 > 0$ такие, что в силу $\Delta(p_i; E_{\min}) = 0$, $i = \overline{1, n}$, имеют место оценки

$$C_1|p - p_i|^2 < \Delta(p; E_{\min}) < C_2|p - p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь число $\delta > 0$ выбрано так, чтобы $U_\delta(p_i) \cap U_\delta(p_j) = \emptyset$, $i \neq j$.

Тогда в силу леммы 1 и оценки $w(p, q) - z \geq m_w - E_{\min} > 0$, справедливой при всех $p, q \in \mathbf{T}^3$, $z \leq E_{\min}$, абсолютная величина ядра $W_{11}(p, q; z)$ ($W_{21}(p, q, t; z)$) оператора $W_{11}(z)$ ($W_{21}(z)$) оценивается сверху функцией

$$C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\chi_\delta(p - p_i)}{|p - p_i|} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\chi_\delta(q - p_i)}{|q - p_i|} \right). \quad (3.7)$$

Так как эта функция квадратично интегрируема по совокупности переменных p, q в $(\mathbf{T}^3)^2$, соответствующие операторы $W_{11}(z)$ и $W_{21}(z)$ являются операторами Гильберта–Шмидта при $z \leq E_{\min}$.

Рассуждая аналогично, получаем компактность операторов $W_{00}(z)$, $W_{01}(z)$, $W_{10}(z)$ и $W_{20}(z)$ при $z \leq E_{\min}$ и непрерывность операторнозначных функций $W_{ij}(z)$, $i, j = 0, 1, 2$, в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; E_{\min}]$. Лемма 4 доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие “в” теоремы 3. Тогда оператор $W(z)$ является компактным при $z \leq E_{\min}$ и $E_{\max} \leq z \leq m_w$, а операторнозначная функция $W(z)$ непрерывна в равномерной операторной топологии при $z \in (-\infty; E_{\min}] \cup [E_{\max}; m_w]$.

3.2. Доказательство теоремы 3. Сначала докажем конечность дискретного спектра H , расположенного в области $(-\infty; \tau_{\text{ess}}(H))$. Допустим, что модельный оператор имеет бесконечное число собственных значений $z_i \in (-\infty; \tau_{\text{ess}}(H))$ и $z_i \rightarrow \tau_{\text{ess}}(H)$ при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через φ_i , соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции. Тогда из леммы 3 следует $\varphi_i = W(z_i)\varphi_i$. Согласно леммам 4 и 5 оператор $W(\tau_{\text{ess}}(H))$ является компактным и $\|W(z) - W(\tau_{\text{ess}}(H))\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \tau_{\text{ess}}(H)$, следовательно,

$$1 = \|\varphi_i\| = \|W(z_i)\varphi_i\| \leq \|[W(z_i) - W(\tau_{\text{ess}}(H))]\varphi_i\| + \|W(\tau_{\text{ess}}(H))\varphi_i\| \rightarrow 0$$

при $i \rightarrow \infty$. Это противоречие означает, что точка $z = \tau_{\text{ess}}(H)$ не может быть предельной точкой множества собственных значений модельного оператора H , лежащих на полуоси $(-\infty; \tau_{\text{ess}}(H))$.

Аналогично, пользуясь леммами 3 и 5, мы можем доказать конечность множества собственных значений модельного оператора H , лежащих в интервале $(E_{\text{max}}; m_w)$. Теорема 3 доказана.

Докажем еще одно

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть

$$u(p) = \varepsilon(p) + \lambda, \quad v(q) \equiv \sqrt{\mu}, \quad w(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q),$$

где λ – некоторое вещественное число, $\mu \in [0; \delta)$, $\delta > 0$ достаточно мало, а функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется формулой

$$\varepsilon(p) = \sum_{s=1}^3 (1 - \cos p^{(s)}).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\lambda \in [1; +\infty)$, то выполняется условие “а” теоремы 3;
- 2) если $\lambda \in [-6; 0]$, то выполняется условие “б” теоремы 3;
- 3) если $\lambda \in (-\infty; -7]$, то выполняется условие “в” теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем третье утверждение, первое и второе доказываются аналогично. Пусть $\lambda \in (-\infty; -7]$. Тогда

$$\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; 0) \leq 6 + \lambda - \mu \min_{p \in \mathbf{T}^3} \int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q')}. \quad (3.8)$$

Из непрерывности по p интеграла

$$\int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q')}, \quad p \in \mathbf{T}^3,$$

вытекает, что величину

$$\mu \min_{p \in \mathbf{T}^3} \int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q')}$$

можно сделать малой, выбрав достаточно малое δ и $\mu \in [0, \delta)$. В силу соотношения (3.8) из этого следует, что $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; 0) < 0$.

Отметим, что

$$\mathbf{D}(p; z) = \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(p)}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} + \mu \frac{\partial^2}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} \int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q') - z} \right)_{s, l=1, 3}, \quad z < m_w.$$

Так как функция $\varepsilon(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точке $p_1 = (0, 0, 0) \in \mathbf{T}^3$ и невырожденный максимум в точках $q = (\pm\pi, \pm\pi, \pm\pi)$ (здесь $q = (\pm\pi, \pm\pi, \pm\pi)$ означает двенадцать различных точек из $\mathbf{T}^3$), а величины

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} \int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q') - E_{\min}} \Big|_{p=p_1},$$

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} \int \frac{dq'}{\varepsilon(p) + \varepsilon(q') - E_{\max}} \Big|_{p=q}, \quad s, l = \overline{1, 3},$$

малы, матрица $\mathbf{D}(p_1, E_{\min})$ ($\mathbf{D}(q, E_{\max})$) является положительно (отрицательно) определенной. Утверждение доказано.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность С. Н. Лакаеву за постановку задачи и М. Э. Муминову за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. Mattis, *Rev. Mod. Phys.*, **58** (1986), 361–379.
- [2] К. О. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.
- [3] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 63–80.
- [4] R. A. Minlos, H. Spohn, “The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons”, *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **177**, AMS, Providence, RI, 1996, 159–193.
- [5] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.
- [6] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564.
- [7] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Функц. анализ и его прилож.*, **37**:1 (2003), 81–84.
- [8] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics*, [math-ph/0508028](#).
- [9] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 94–108.
- [10] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [11] Д. Р. Яфаев, *ТМФ*, **25**:2 (1975), 185–195.
- [12] В. А. Зорич, *Математический анализ*, ч. 2, Наука, М., 1984.

Поступила в редакцию 6.11.2006