Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, О стабильности n -частичных псевдоре-
лятивистских систем, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 528–
537

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:53:41

© 2007 г.

Г. М. Жислин*

О СТАБИЛЬНОСТИ n -ЧАСТИЧНЫХ ПСЕВДОРЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ

Для системы Z_n , состоящей из n тождественных псевдорелятивистских частиц, показано, что при некоторых ограничениях на парные потенциалы взаимодействия существует бесконечная последовательность таких чисел n_s , $s = 1, 2, \dots$, что система Z_n стабильна при $n = n_s$, причем $\sup_s n_{s+1} n_s^{-1} < +\infty$. Кроме того, показано, что если система Z_n стабильна, то при некоторых значениях полного момента частиц системы дискретный спектр оператора энергии относительного движения Z_n не пуст. Ранее устойчивость n -частичных систем изучалась только для нерелятивистских частиц.

Ключевые слова: псевдорелятивистские операторы, многочастичные системы, устойчивость, дискретный спектр.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется устойчивость системы Z_n , состоящей из n тождественных псевдорелятивистских¹⁾ (ПР) частиц, при $n \rightarrow \infty$ и выясняется связь между устойчивостью системы и существованием непустого дискретного спектра гамильтониана относительного движения. При некоторых условиях на потенциалы парного взаимодействия частиц мы доказываем существование такой последовательности “магических” чисел n_s , что система Z_n устойчива при $n = n_s$, $s = 1, 2, \dots$, и устанавливаем равномерную (по s) ограниченность отношения n_{s+1}/n_s (теорема 1). Ранее аналогичный результат об устойчивости n -частичных систем был получен только для нерелятивистских (НР) частиц [1], а оценка величин n_{s+1}/n_s отсутствовала даже в НР-случае. Что касается связи между устойчивостью системы и существованием непустого дискретного спектра оператора энергии относительного движения, то для НР-систем согласно теореме Хунцикера–Ван Винтера–Жислина (ХВЖ) [2], [3] из устойчивости системы следует существование хотя бы одного дискретного собственного значения соответствующего оператора при любых

¹⁾Мы называем квантовую систему, составляющие ее частицы и соответствующий гамильтониан псевдорелятивистскими, если рассматриваются релятивистские операторы кинетической энергии частиц и нерелятивистские операторы потенциальной энергии.

*Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

значениях полного момента P системы Z_n , в то время как для ПР-систем подобный результат установить не удастся, скорее всего, он вообще не имеет места. Такая ситуация обусловлена тем, что ПР-оператор энергии $H_n(P)$ относительного движения (см. п. 1.4) зависит от полного момента P , а в НР-случае зависимость от P отсутствует. Поэтому даже для устойчивых ПР-систем нам удастся доказать, что дискретный спектр оператора $H_n(P)$ не пуст только для некоторых, но отнюдь не для всех значений P (теорема 2).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Рассмотрим квантовую систему $Z_n = \{1, 2, \dots, n\}$, состоящую из n тождественных частиц. Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ и m – радиус-вектор и масса i -й частицы, $r = (r_1, \dots, r_n)$. ПР-гамильтониан системы Z_n имеет вид

$$H_n = K_n(r) + V_n(r), \quad (1.1)$$

где²⁾

$$K_n(r) = \sum_{i=1}^n K(r_i), \quad V_n(r) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n V(|r_{ij}|),$$

$$K(r_i) = \sqrt{-\Delta_i + m^2}, \quad \Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \quad r_{ij} = r_i - r_j.$$

Мы предполагаем, что

$$V(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad (1.2a)$$

$$V(|r_1|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |r_1| \rightarrow \infty^3) \quad (1.2b)$$

и потенциал $V(|r_1|)$ таков, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\inf\{H_n + \varepsilon V_n\} > -\infty \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (1.3)$$

Операторы $K(r_i)$ в координатном представлении являются интегральными операторами, но в импульсном представлении они представляют собой операторы умножения. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ есть преобразование Фурье в $\mathbb{R}^3$ и $\bar{f}(p_i) = \mathcal{F}[f(r_i)]$ для любой функции $f(r_i) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$, где p_i – фурье-сопряженные координаты к r_i . Тогда

$$\mathcal{F}[K(r_i)f(r_i)] = \mathcal{F}[\sqrt{-\Delta_i + m^2} f(r_i)] = \sqrt{p_i^2 + m^2} \bar{f}(p_i).$$

Положим $p = (p_1, \dots, p_n)$,

$$\bar{K}(p_i) = \sqrt{p_i^2 + m^2}, \quad \bar{K}_n(p) = \sum_{i=1}^n \bar{K}(p_i)$$

и используем далее смешанную форму записи для оператора H_n :

$$H_n = \bar{K}_n(p) + V_n(r).$$

²⁾ Система единиц выбрана так, что константа Планка и скорость света равны единице.

³⁾ Требование (1.2b) может быть несколько ослаблено, но мы не останавливаемся на этом, так как (1.2b) выполняется для большинства интересных приложений.

1.2. Пусть $D_k = \{C_1, \dots, C_k\}$ – произвольное разбиение системы Z_n на k подсистем C_j , не имеющих общих элементов и не взаимодействующих друг с другом, $H_n(D_k)$ – оператор энергии составной системы D_k . Очевидно,

$$H_n(D_k) = \sum_{j=1}^k H[C_j],$$

где

$$H[C_j] = \sum_{i \in C_j} \bar{K}(p_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{s, t \in C_j \\ s \neq t}} V(|r_{st}|). \quad (1.4)$$

В силу (1.3) операторы H_n и $H_n(D_k)$ ограничены снизу на $C_0^2(\mathbb{R}^{3n})$, $\mathbb{R}^{3n} = \{r = (r_1, \dots, r_n)\}$. Мы расширим их (по Фридрихсу) до самосопряженных операторов, сохраняя прежние обозначения. Нетрудно показать, что для любых разбиений D_k

$$\inf H_n \leq \inf H_n(D_k) = \sum_{i=1}^k \inf H[C_i]. \quad (1.5)$$

1.3. В настоящей работе исследуется вопрос о стабильности ПР-системы Z_n при $n \rightarrow \infty$. Учитывая физический смысл операторов H_n и $H_n(D_k)$ (это операторы энергии), мы назовем систему Z_n устойчивой, если

$$\inf H_n < \mu_n := \min_{D_k} \inf H_n(D_k), \quad 2 \leq k \leq n. \quad (1.6)$$

Возможны два варианта поведения системы Z_n :

- 1) существует такое $N > 0$, что система Z_n неустойчива при всех $n \geq N$;
- 2) для любого $N > 0$ мы можем указать такое $n > N$, что система Z_n устойчива.

Естественно, поведение системы Z_n определяется свойствами потенциалов $V(|r_1|)$. Наше рассмотрение включает такие взаимодействия $V(|r_1|)$, для которых априори не ясно, какой из двух названных вариантов реализуется. Например, наши результаты применимы к знакопеременным потенциалам, которые представляют собой разность двух потенциалов Юкавы:

$$V(|r_1|) = W(|r_1|) = |r_1|^{-1}(a_1 e^{-b_1|r_1|} - a_2 e^{-b_2|r_1|}), \quad (1.7)$$

где $a_1 > a_2 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$.

Обозначим через $K(A)$ куб в $\mathbb{R}^3$ с ребром длины $2A$, центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостями. Нашим главным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторого $A > 0$

$$\delta = \int_{r_1, r_2 \in K(A)} V(|r_1 - r_2|) dr_1 dr_2 < 0. \quad (1.8)$$

Тогда

- а) существует последовательность таких чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$, где $n_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, что системы Z_{n_s} , $s = 1, 2, \dots$, устойчивы;
- б) если потенциалы $V(|t|)$ ограничены снизу, то для чисел n_s выполняется оценка

$$\sup_s \frac{n_{s+1}}{n_s} < +\infty. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для выполнения неравенства (1.8) достаточно, чтобы были выполнены условие $V(|r_1|) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$ и неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(|r_1|) dr_1 < 0 \quad (1.10)$$

(см. [1]). Для оператора W из (1.7) неравенство (1.10) выполняется, если

$$a_1 a_2^{-1} < b_1^2 b_2^{-2}.$$

1.4. Обсудим теперь связь между устойчивостью системы Z_n и существованием непустого дискретного спектра ПР-оператора энергии относительного движения Z_n . Для НР-систем согласно теореме ХВЖ [2], [3] из устойчивости системы следует существование непустого дискретного спектра оператора энергии относительного движения независимо от значения P полного момента частиц системы. Независимость от P возникает после отделения движения центра масс, которое проводится в НР-системах для получения оператора энергии относительного движения. Для ПР-операторов такое отделение невозможно, в результате чего ПР-оператор энергии относительного движения зависит от значения P полного момента частиц системы Z_n [4]. Именно поэтому связь устойчивости системы Z_n с существованием непустого дискретного спектра соответствующего оператора в ПР-случае сложнее, чем для НР-систем. Чтобы сформулировать полученные результаты, построим (следуя [4]) ПР-оператор энергии относительного движения системы Z_n . Введем радиус-вектор $r_0 = \sum_{j=1}^n r_j/n$ центра масс системы Z_n и относительные координаты $q_j = r_j - r_0$, $j = 1, 2, \dots, n$, частиц системы Z_n . Фурье-сопряженные координаты для q_j суть те же p_j , что для r_j , а для координаты r_0 сопряженная координата есть $P = \sum_{j=1}^n p_j \in \mathbb{R}^3$, что дает значение полного импульса частиц системы Z_n . Легко видеть, что после введения в H_n новых координат r_0, q_j , $j = 1, \dots, n$ (P и p_j , $j = 1, 2, \dots, n$, для оператора $\bar{K}_n(p)$ кинетической энергии), мы получим оператор $H_n(P)$, который будет зависеть от относительных координат q_j , соответствующих моментов p_j и полного момента P , но не будет зависеть от положения r_0 центра масс. Поэтому, если фиксировать произвольное значение $P \in \mathbb{R}^3$ и рассматривать полученный оператор на функциях $\varphi(q_1, \dots, q_n)$ с условием $\sum_{j=1}^n q_j = 0$ (на функциях $\bar{\varphi}(p_1, \dots, p_n)$ с условием $\sum_{j=1}^n p_j = P$ для оператора кинетической энергии), то такой оператор можно интерпретировать как оператор энергии относительного движения системы с фиксированным значением P полного момента. Для оператора $H_n(P)$ имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если система Z_n устойчива, то существует конечное или счетное число таких открытых областей $\gamma_\alpha \subset \mathbb{R}^3$, что дискретный спектр оператора $H_n(P)$ не пуст при $P \in \gamma_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К сожалению, мы не можем указать явный вид областей γ_α (хотя и описываем, как они получаются) и не знаем, например, выполняется ли равенство $\bigcup_\alpha \gamma_\alpha = \mathbb{R}^3$. Это связано с тем, что зависимость спектра операторов $H_n(P)$ и $H_n(P; D_k)$ от P при $n > 2$ до сих пор не изучена (случай $n = 2$ исследован в [5], [6]).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

2.1. Доказательство теоремы 1 проведем от противного. Предположим, что

$$\text{система } Z_n \text{ неустойчива при всех } n \geq N \text{ для какого-либо } N > 0, \quad (*)$$

и докажем, что это предположение приводит к неравенству

$$\inf H_n \geq -d_1 n \quad (2.1)$$

для всех $n \geq N$, и некоторой константы $d_1 > 0$, не зависящей от n . После этого мы построим такие пробные функции ψ_n , $\|\psi_n\| = 1$, что для больших n

$$(H_n \psi_n, \psi_n) \leq -d_2 n^2, \quad (2.2)$$

где $d_2 > 0$ – константа, не зависящая от n . Тогда из (2.1), (2.2) будет следовать, что

$$d_1 n \leq -d_2 n^2,$$

откуда в пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем неравенство $-d_2 \geq 0$, которое неверно, поскольку $d_2 > 0$. Поэтому предположение (*) ошибочно, откуда и будет следовать утверждение теоремы 1.

2.2. Пусть предположение (*) выполняется и $n \geq N$. Тогда система Z_n неустойчива, и, следовательно, существует такое разбиение $D_k = \{C_1, \dots, C_k\}$ системы Z_n , что

$$\inf H_n = \inf H_n(D_k) = \sum_{j=1}^k \inf H[C_j]. \quad (2.3)$$

Выберем разбиение D_k так, что каждый кластер C_j из D_k устойчив. Это можно сделать, ибо если какой-то кластер C_i неустойчив, тогда (согласно определению п. 1.3, см. условие (1.6), примененному не ко всей системе Z_n , а к кластеру C_i) мы можем разбить множество C_i на непересекающиеся подмножества C_{it} , $t = 1, 2, \dots, t_i$, $t_i \geq 2$ (!) так, что

$$\inf H[C_i] = \sum_{t=1}^{t_i} \inf H[C_{it}], \quad (2.4)$$

и заменить разбиение D_k на разбиение

$$\tilde{D}_{k-1+t_i} = \{C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i1}, \dots, C_{it_i}, C_{i+1}, \dots, C_k\},$$

для которого

$$\inf H_n = \inf H_n(\tilde{D}_{k-1+t_i}) = \sum_{j, j \neq i}^{1, k} \inf H[C_j] + \sum_{t=1}^{t_i} \inf H[C_{it}].$$

Если разбиение $\tilde{D}_{k-1+t_i}$ содержит неустойчивые кластеры (C_j или C_{it}), то каждый из них можно заменить некоторым набором составляющих его кластеров подобно тому, как мы поступили с кластером C_i . Продолжая этот процесс, мы придем в итоге к такому разбиению, в котором нет неустойчивых кластеров. Поэтому можно считать, что с самого начала взято именно такое разбиение D_k , в котором все кластеры устойчивы.

Согласно предположению (*) число $|C|$ элементов устойчивого кластера C не превышает N . Поэтому, если положить

$$d = \min_{C, |C| \leq N} \inf H[C], \quad C \subset Z_n,$$

и $d_1 = |d|$, то в силу (2.3)

$$\inf H_n \geq -d_1 n.$$

Неравенство (2.1) доказано.

2.3. Переходим к доказательству неравенства (2.2). Пусть число $A > 0$ выбрано так, что выполняется неравенство (1.8). Для любого целого $\omega > 0$ определим нормированные функции

$$f_p(x_1) = \begin{cases} A^{-1/2} \sin\left(\frac{2\pi p\omega}{A} x_1\right) & \text{при } |x_1| \leq A, \\ 0 & \text{при } |x_1| > A \end{cases}$$

и

$$f_{ijk}(r_s) = f_i(x_s) f_j(y_s) f_k(z_s), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Для фиксированного n укажем целое число n_0 так, что $n_0^3 \leq n < (n_0 + 1)^3$ и положим

$$\varphi_t(r_t) = f_{i_t j_t k_t}(r_t), \quad \psi_n(r) = \prod_{t=1}^n \varphi_t(r_t),$$

где i_t, j_t, k_t – натуральные числа, $1 \leq i_t, j_t, k_t \leq n_0 + 1$, $(i_t, j_t, k_t) \neq (i_s, j_s, k_s)$ при $t \neq s$.

Покажем, что для функций $\psi(r)$ выполняется неравенство (2.2). Сначала оценим формы $(K_n(r)\psi_n, \psi_n) = (\bar{K}_n(p)\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_n)$,

$$(K_n(r)\psi_n, \psi_n) = \sum_{t=1}^n (K(r_t)\psi_n, \psi_n), \quad (2.5)$$

где в силу ортонормированности функций $\varphi_s(r_s)$

$$\begin{aligned} (K(r_t)\psi_n, \psi_n) &\equiv \left(\sqrt{-\Delta_t + m^2} \psi_n, \psi_n \right) = \left(\sqrt{-\Delta_t + m^2} \varphi_t(r_t), \varphi_t(r_t) \right)_{\mathbb{R}^3(r_t)} = \\ &= \left(\sqrt{p_t^2 + m^2} \bar{\varphi}_t(p_t), \bar{\varphi}_t(p_t) \right)_{\mathbb{R}^3(p_t)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\bar{\varphi}_t(p_t)$ – фурье-образ функции $\varphi_t(r_t)$.

Очевидно, $\sqrt{p_t^2 + m^2} \leq m + p_t^2 + 1$, следовательно,

$$(K(r_t)\psi_n, \psi_n) \leq m + 1 + \| |p_t| \bar{\varphi}_t(p_t) \|^2 = m + 1 + \| |\nabla_t \varphi_t(r_t)| \|^2_{\mathbb{R}^3(r_t)}. \quad (2.7)$$

Легко видеть, что

$$m + 1 + \| |\nabla_t \varphi_t(r_t)| \|^2 \leq c_1(n_0 + 1)^2 \leq c_2 n^{2/3}, \quad (2.8)$$

где c_1, c_2 – некоторые константы, зависящие от A, ω , но не от n . В силу (2.5)–(2.8)

$$(K_n(r)\psi_n, \psi_n) \leq c_2 n^{5/3}. \quad (2.9)$$

2.4. Оценим теперь форму

$$J(\omega) = (V_n \psi_n, \psi_n) = \sum_{\substack{s, t=1 \\ s < t}}^n (V(|r_{st}|)\psi_n, \psi_n). \quad (2.10)$$

Докажем, что для некоторой константы $b > 0$ и больших n

$$J_{st}(\omega) = (V(|r_{st}|)\psi_n, \psi_n) < -b, \quad s, t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

если число ω взять достаточно большим.

Из (2.10), (2.11) будет следовать, что

$$(V_n \psi_n, \psi_n) \leq -\frac{(n-1)n}{2}b \leq -\frac{n^2}{4}b. \quad (2.12)$$

Тогда соотношения (2.9), (2.12) приводят к требуемой оценке (2.2), и, тем самым, первое утверждение теоремы 1 доказано.

Очевидно, что

$$J_{st}(\omega) = \int_{r_s, r_t \in K(A)} V(|r_{st}|) f_{i_s j_s k_s}^2(r_s) f_{i_t j_t k_t}^2(r_t) dr_t dr_s. \quad (2.13)$$

Так как $f_p^2(x) = (2A)^{-1} (1 - \cos(\frac{4\pi\omega p}{A}x))$, то мы можем записать $J_{st}(\omega)$ в виде

$$J_{st}(\omega) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}^{0,1} B_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}(\omega), \quad (2.14)$$

где

$$B_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}(\omega) = (2A)^{-6} \int_{\xi, \xi' \in K(A)} V(|\xi - \xi'|) \prod_{p=1}^6 (-1)^{\sigma_p} \cos^{\sigma_p} \left(\frac{4\pi\omega}{A} m_p \xi_p \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_6, \quad (2.15)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi' = (\xi_4, \xi_5, \xi_6) \in \mathbb{R}^3$, m_p – целое число, зависящее от s, t и n , но не от ω .

2.5. Оценим величины $B_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}(\omega)$. Фиксируем произвольный набор $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ и положим для него

$$l = \#\{\sigma_j, 1 \leq j \leq 6 \mid \sigma_j = 1\}.$$

При $l = 0$ выполняется $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_6 = 0$ и по условию теоремы 1

$$B_{0,0,\dots,0}(\omega) = (2A)^{-6} \delta < 0. \quad (2.16)$$

Рассмотрим случай $l \geq 1$ и покажем, что в этом случае

$$B_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Только чтобы упростить обозначения считаем, что в наборе $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ индексы j , для которых $\sigma_j = 1$, суть $j = 1, 2, \dots, l$.

Положим

$$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_l) = (2A)^{-6} \begin{cases} \int_{\substack{|\xi_j| \leq A \\ j=l+1, \dots, 6}} V(|\xi - \xi'|) d\xi_{l+1} \dots d\xi_6, & \text{если } 1 \leq l \leq 5, \\ V(|\xi - \xi'|), & \text{если } l = 6. \end{cases}$$

Тогда числа $B_{\sigma_1, \dots, \sigma_6}(\omega)$ (см. (2.15)) можно рассматривать как фурье-коэффициенты функции $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_l)$. Функция $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_l) \in \mathcal{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^l)$ (ибо $V(|\xi|) \in \mathcal{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$), поэтому (2.17) верно.

Из (2.16) и (2.17) следует, что при больших ω выполняется неравенство (2.11). Таким образом, второе утверждение теоремы 1 доказано.

2.6. Из доказанного утверждения следует существование бесконечной серии таких значений n_s , $s = 1, 2, \dots$, $n_s \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow \infty$, что система Z_n устойчива при $n = n_s$, $s = 1, 2, \dots$.

Оценим отношение n_{s+1}/n_s . Пусть $k = n_{s+1} - 1$. Не ограничивая общности, считаем, что $n_s < n_{s+1} - 1$, следовательно, система Z_k неустойчива. Рассуждая так же, как в п. 2.2, убеждаемся, что найдется такое разбиение $\tilde{D} = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_p\}$ на устойчивые кластеры $\tilde{C}_j$, $|\tilde{C}_j| \leq n_s^4$, что

$$\inf H_k = \inf H_k(\tilde{D}) = \sum_{j=1}^p \inf H[\tilde{C}_j].$$

Поскольку потенциалы $V(|r_1|)$ ограничены снизу, то, очевидно,

$$\inf H[\tilde{C}_j] \geq -d_0 |\tilde{C}_j|^2,$$

откуда

$$\inf H_k \geq -d_0 \sum_{j=1}^p |\tilde{C}_j|^2, \quad (2.18)$$

⁴⁾ Напоминаем, что $|\tilde{C}_j|$ – число элементов кластера $\tilde{C}_j$.

где

$$\sum_{j=1}^p |\tilde{C}_j| = k, \quad 1 \leq |\tilde{C}_j| \leq n_s, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.19)$$

и константа $d_0 > 0$ не зависит от k и n_s .

Минимизируя правую часть (2.18) с учетом условий (2.19) и неравенства $d_0 > 0$, убеждаемся, что $\inf H_k \geq -kn_s d_0$. С другой стороны, в силу (2.2) $\inf H_k \leq -d_2 k^2$, следовательно, $-d_2 n_{s+1} \geq -n_s d_0$, т.е. $n_{s+1} n_s^{-1} < d_0 d_2^{-1}$ при любых s .

Теорема 1 доказана полностью.

2.7. Доказательство теоремы 2. Пусть $D_s = \{C_1, \dots, C_s\}$ – произвольное разбиение исходной системы Z_n на непересекающиеся непустые кластеры C_j , $j = 1, 2, \dots, s$, и $H_n(P; D_s)$ есть оператор $H_n(D_s)$ (см. п. 1.2) после введения относительных координат (см. п. 1.4) и фиксации значения P полного момента системы Z_n ($H_n(P; D_s)$ получается из $H_n(D_s)$ так же, как $H_n(P)$ получался из H_n ⁵⁾). Пусть

$$\mu_n(P) = \min_{D_s} \inf H_n(P; D_s), \quad s \geq 2.$$

Согласно релятивистской теореме ХВЖ [4] $\mu_n(P)$ есть нижняя грань существенного спектра оператора $H_n(P)$. Поэтому, чтобы доказать теорему 2, достаточно установить существование такого $P_0 \in \mathbb{R}^3$, для которого

$$\inf H_n(P_0) < \mu_n(P_0). \quad (2.20)$$

Легко видеть, что

$$\inf H_n = \inf_P H_n(P). \quad (2.21)$$

Так как $\inf H_n(P)$ есть непрерывная функция от P и

$$\inf H_n(P) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |P| \rightarrow \infty,$$

то в силу (2.21) существует по крайней мере одна точка $P_0 \in \mathbb{R}^3$, для которой

$$\inf H_n = \inf H_n(P_0). \quad (2.22)$$

Так как система Z_n устойчива, то

$$\inf H_n = \inf H_n(P_0) < \min_{D_s} \inf H_n(D_s),$$

следовательно, для любого разбиения D_s

$$\inf H_n(P_0) < \inf H_n(D_s). \quad (2.23)$$

Так же, как в случае оператора H_n , имеем

$$\inf H_n(D_s) = \min_P \inf H_n(P; D_s), \quad (2.24)$$

⁵⁾ Фактически $H_n(P; D_s)$ – это оператор $H_n(P)$ после удаления из него всех членов взаимодействия между собой частиц из разных кластеров системы D_s .

и в силу (2.23), (2.24)

$$\inf H_n(P_0) < \inf H_n(P; D_s) \quad (2.25)$$

для любых P и D_s . Из неравенства (2.25) следует (2.20), и значит, дискретный спектр $s_d(H_n(P))$ оператора $H_n(P)$ не пуст при $P = P_0$. Далее, так как оператор $H_n(P)$ зависит от P непрерывно, то из (2.25) следует существование такой открытой области $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$, что $s_d(H_0(P)) \neq \emptyset$ при $P \in \gamma_0$.

Кроме того, если наряду с точкой P_0 существуют какие-либо точки P_α с тем же свойством (2.22), что и P_0 , т.е.

$$\inf H_n = \inf H_n(P_\alpha),$$

то для каждой из них, очевидно, найдется такое открытое множество γ_α , что

$$s_d(H_n(P)) \neq \emptyset, \quad P \in \gamma_\alpha.$$

Теорема 2 доказана.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 05-01-00299).

Список литературы

- [1] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *ТМФ*, **76** (1988), 132.
- [2] Г. М. Жислин, *ДАН СССР*, **128** (1959), 231.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [4] R. T. Lewis, H. Siedentop, S. A. Vugalter, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **67** (1997), 1.
- [5] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *ТМФ*, **121** (1999), 297.
- [6] S. A. Vugalter, T. Weidl, *Ann. Henri Poincaré*, **4** (2003), 301.

Поступила в редакцию 16.11.2006