Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Мествиришвили, К. А. Модестов, Ю. В. Чугреев,
Скалярное поле квинтэссенции в релятивистской теории
гравитации, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 3, 551–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:33:17

© 2007 г.

М. А. Мествиришвили*,
К. А. Модестов†, Ю. В. Чугреев†

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ КВИНТЭССЕНЦИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Предлагается вариант теории квинтэссенции, который приводит к ускоренному расширению фридмановской Вселенной в релятивистской теории гравитации. Вещество квинтэссенции создается скалярным полем темной энергии. Показано, что факторизующая лагранжиан скалярного поля Φ функция $V(\Phi)$ не влияет на развитие Вселенной. Получены соотношения, позволяющие найти явную зависимость Φ от времени, если только выбрана функция $V(\Phi)$.

Ключевые слова: релятивистская теория гравитации, фридмановская вселенная, квинтэссенция, скалярное поле.

1. ВВЕДЕНИЕ

На рубеже XXI в. было сделано выдающееся открытие [1] – оказалось, что расширение Вселенной в настоящее время происходит с ускорением. Для объяснения этого явления достаточно предположить, что в однородной и изотропной Вселенной (Вселенной Фридмана) присутствует вещество с необычным уравнением состояния

$$P_Q = -(1 - \nu)\rho_Q, \quad (1.1)$$

где P_Q – изотропное давление, ρ_Q – плотность массы, а для параметра ν из общих положений релятивистской теории гравитации (РТГ) [2] следует ограничение вида [3], [4]

$$0 < \nu < \frac{2}{3}. \quad (1.2)$$

Вещество с таким уравнением состояния было названо “квинтэссенцией”.

В данной работе мы предполагаем, что вещество “квинтэссенции” создается скалярным полем. Неудивительно, что моделирование идеальной жидкости с отрицательным давлением обеспечивается довольно необычным лагранжианом скалярного поля.

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: ikt@polikvart.ru

Обозначим скалярное поле квинтэссенции как $\Phi(x^\alpha)$ и постулируем, что его плотность лагранжиана имеет вид

$$L = -\sqrt{-g} V(\Phi)(I^2)^q, \quad (1.3)$$

где $g = \det g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор эффективного риманова пространства [2], q – число, $V(\Phi) > 0$ – некоторая функция от Φ и

$$I = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi. \quad (1.4)$$

Здесь ∇_α – ковариантная производная относительно метрики $g_{\alpha\beta}$.

Плотность лагранжиана вида

$$L = -\sqrt{-g} V(\Phi) F(I), \quad (1.5)$$

где $F(I)$ – произвольная функция от I , рассматривалась и раньше [5]¹⁾. Наш выбор $F(I) = (I^2)^q$ продиктован стремлением получить из полевой теории квинтэссенции уравнение состояния (1.1), которое в рамках РТГ [3], [4] позволяет объяснить ускоренное расширение фридмановской Вселенной.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ $\Phi(x^\alpha)$

Согласно вариационному принципу уравнение движения Эйлера–Лагранжа для поля Φ есть

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = 0. \quad (2.1)$$

После подстановки плотности лагранжиана (1.3) в (2.1) получим

$$(4q-1) \frac{d \ln V(\Phi)}{d\Phi} I^2 - 8q(2q-1) g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \Phi (\Gamma_{\mu\tau}^\lambda g^{\tau\beta} \partial_\lambda \partial_\beta \Phi - g^{\lambda\beta} \partial_\beta \Phi \partial_\lambda \partial_\mu \Phi) - 4q(g^{\mu\tau} \Gamma_{\mu\tau}^\alpha \partial_\alpha \Phi - g^{\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\mu \Phi) I = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Gamma_{\mu\tau}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\tau} + \partial_\tau g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\tau}).$$

В терминах ковариантных производных ∇_α уравнение (2.2) запишется в форме

$$(4q-1) \frac{d \ln V(\Phi)}{d\Phi} I^2 + 8q(2q-1) g^{\alpha\mu} g^{\lambda\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi \nabla_\lambda \nabla_\mu \Phi + 4q g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \Phi I = 0. \quad (2.3)$$

Из плотности лагранжиана (1.3) можно найти симметричную плотность тензора энергии-импульса для поля $\Phi(x^\alpha)$. Согласно Гильберту

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Так как L не зависит от производных метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, получим

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} V(\Phi) (I^2)^{q-1} [g_{\mu\nu} I^2 - 4q I \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi]. \quad (2.4)$$

¹⁾Ссылки на более ранние работы по этой тематике можно найти в работах [5], где для поля $\Phi(x^\alpha)$ с лагранжианом (1.5) употребляется термин “к-эссенция”. Мы же сохраним термин “полевая теория квинтэссенции” для любой полевой теории, приводящей к (1.1), поскольку термин “квинтэссенция” по своему происхождению был связан именно с уравнением состояния (1.1).

3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ Φ И ЕГО ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Для однородной и изотропной Вселенной метрические тензоры $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ имеют вид [2]

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a_{\max}^4 a^2; \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (3.1a)$$

$$g^{00} = 1; \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{a_{\max}^4 a^2}; \quad g^{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.1б)$$

Здесь $a(\tau)$ – масштабный фактор и $a_{\max} < \infty$ – его максимальное значение. Величина $\sqrt{-g}$ равна

$$\sqrt{-g} = a_{\max}^6 a^3. \quad (3.2)$$

Для того чтобы поле $\Phi(x^\alpha)$ не нарушало однородности и изотропии Вселенной, необходимо предположить, что $\Phi(x^\alpha)$ зависит только от τ . Тогда согласно (1.4) и (3.16)

$$I = (\partial_0 \Phi)^2,$$

и для $T_{\mu\nu}$ из формулы (2.4) с учетом (3.1) получим выражения

$$T_{00} = (1 - 4q)a_{\max}^6 a^3 V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{2q}; \quad (3.3)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -a_{\max}^{10} a^5 V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{2q}; \quad T_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (3.4)$$

Обычно предполагается, что во фридмановской Вселенной вещество описывается плотностью тензора энергии-импульса идеальной жидкости:

$$T_{\mu\nu} = \sqrt{-g} [(\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} p]. \quad (3.5)$$

Так как для однородной и изотропной Вселенной 4-скорость U_μ имеет вид

$$U_0 = 1, \quad U_k = 0,$$

из выражения (3.5) с учетом (3.1) находим

$$T_{00} = a_{\max}^6 a^3 \rho, \quad (3.6)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = a_{\max}^{10} a^5 p; \quad T_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (3.7)$$

Распространяя гипотезу о представлении плотности тензора энергии-импульса поля вещества в виде плотности энергии-импульса идеальной жидкости на квинтэссенцию, после сравнения (3.3) и (3.4) с (3.6) и (3.7), соответственно, получим

$$\rho_Q = (1 - 4q)V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{2q}, \quad (3.8)$$

$$P_Q = -V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{2q}. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$P_Q = -\frac{1}{(1 - 4q)} \rho_Q. \quad (3.10)$$

Полагая

$$1 - 4q = \frac{1}{1 - \nu}, \quad (3.11)$$

мы видим, что выражение (3.10) переходит в (1.1). Это дает основание считать поле Φ с плотностью лагранжиана (1.3) полем квинтэссенции, если только

$$q = -\frac{\nu}{4(1 - \nu)}. \quad (3.12)$$

Учитывая ограничение (1.2) для параметра ν , из (3.12) находим

$$-\frac{1}{2} < q < 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, плотность лагранжиана для квинтэссенции примет вид

$$L = -\sqrt{-g} V(\Phi) (I^2)^{\nu/(4(1-\nu))}, \quad (3.14)$$

а плотность и давление для этого поля в однородной и изотропной Вселенной будут равны

$$\rho_Q = \frac{1}{1 - \nu} V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{\nu/(2(1-\nu))}, \quad (3.15)$$

$$P_Q = -V(\Phi) [(\partial_0 \Phi)^2]^{\nu/(2(1-\nu))}. \quad (3.16)$$

Чтобы найти явный вид (3.15) и (3.16), необходимо решить уравнение движения (2.2). Так как для метрики (3.1a), (3.16) коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{ik}^0 = a_{\max}^4 a \partial_0 a \delta_{ik}; \quad g^{\mu\tau} \Gamma_{\mu\tau}^0 = -\frac{3}{a} \partial_0 a,$$

то из (2.2) с учетом (3.12) найдем

$$-\frac{1}{1 - \nu} \frac{d \ln V(\Phi)}{d\Phi} (\partial_0 \Phi)^4 - \frac{3\nu}{(1 - \nu)} \frac{1}{a} \partial_0 a (\partial_0 \Phi)^3 + \frac{\nu}{(1 - \nu)^2} (\partial_0 \Phi)^2 \partial_0^2 \Phi = 0.$$

Поделив это выражение на $-(\partial_0 \Phi)^3/(1 - \nu)^2$ и принимая во внимание тождество

$$\frac{d \ln V(\Phi)}{d\Phi} \partial_0 \Phi \equiv \partial_0 \ln V(\Phi),$$

получим

$$\partial_0 \ln [(V(\Phi))^{1-\nu} |\partial_0 \Phi|^{-\nu} a^{3\nu(1-\nu)}] = 0,$$

т.е.

$$V(\Phi) |\partial_0 \Phi|^{\nu/(1-\nu)} = \frac{\Lambda}{a^{3\nu}}, \quad \Lambda = \text{const} > 0. \quad (3.17)$$

Подставляя это выражение в (3.15) и (3.16), окончательно находим

$$\rho_Q = \frac{\Lambda}{1 - \nu} \frac{1}{a^{3\nu}}, \quad (3.18)$$

$$P_Q = -\frac{\Lambda}{a^{3\nu}}. \quad (3.19)$$

Хорошо известно [2], [4], что для уравнения состояния (1.1) ковариантный закон сохранения $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, где $T^{\mu\nu}$ задается соотношением (3.5), во фридмановской Вселенной приводит к формулам

$$\rho_Q = \frac{B}{a^{3\nu}}, \quad P_Q = -(1 - \nu) \frac{B}{a^{3\nu}}, \quad (3.20)$$

где $B = \text{const} > 0$.

После переопределения постоянной Λ

$$\Lambda = (1 - \nu)B$$

мы видим, что выражения (3.18), (3.19) переходят в (3.20), что означает эквивалентность уравнения движения (2.2) и ковариантного закона сохранения $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, дополненного соотношением (1.1).

Важно отметить, что для получения основных формул (3.18) и (3.19), определяющих эволюцию однородной и изотропной Вселенной, не требуется конкретизации функции $V(\Phi)$.

Обозначим через $a_{\min}$ и $\Phi(0)$ значения масштабного фактора $a(\tau)$ и поля $\Phi(\tau)$ в момент начала цикла расширения Вселенной $\tau = 0$. Тогда формулу (3.17) можно переписать в виде

$$\int_{\Phi(0)}^{\Phi(\tau)} \frac{d\Phi}{V(\Phi)^{(1-\nu)/\nu}} = \Lambda^{(1-\nu)/\nu} \int_0^\tau a^{3(1-\nu)} d\tau. \quad (3.21)$$

Фридмановская Вселенная в РТГ развивается во времени циклически – ее масштабный фактор $a(\tau)$ меняется в области

$$0 < a_{\min} \leq a(\tau) \leq a_{\max} < \infty. \quad (3.22)$$

Поэтому интеграл

$$J(\tau) = \int_0^\tau a^{3(1-\nu)} d\tau \quad (3.23)$$

конечен. Следовательно, и левая часть уравнения (3.21) должна быть конечной. Это налагает некоторое, хотя и очень слабое, ограничение на функцию $V(\Phi)$.

Используя известные в РТГ результаты, интеграл (3.23) можно выразить через наблюдаемые параметры, что облегчит дальнейший анализ. С этой целью перепишем (3.23) в виде

$$J(\tau) = \int_0^{a(\tau)} a^{2-3\nu} \left(a \frac{d\tau}{da} \right) da. \quad (3.24)$$

Для стадии расширения Вселенной согласно РТГ [2], [4]

$$a \frac{d\tau}{da} = \left[\frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{m^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a^2} + \frac{1}{2a^6} \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.25)$$

где $\beta = a_{\max}$, $m^2 = (m_g c^2 / \hbar)^2$, m_g – масса гравитона ($m_g \cong 3.6 \cdot 10^{-66}$ г [4]), а ρ – полная плотность массы во Вселенной:

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_Q. \quad (3.26)$$

Здесь ρ_r – плотность массы радиационной фазы, ρ_m – плотность массы барионно-доминантной фазы и ρ_Q – плотность массы фазы квинтэссенции.

Введем следующие обозначения:

1) $x = a(\tau)/a_0$, где a_0 – значение масштабного фактора $a(\tau)$ в настоящий момент времени $\tau = \tau_{\text{pres}}$. По порядку величины $a_0 \approx 5 \cdot 10^9$ [4];

2) постоянную Хаббла

$$H = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_{\text{pres}}}$$

и связанную с ней критическую плотность ρ_n^0 :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_n^0;$$

3) относительные плотности

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0}, \quad \Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{\rho_c^0}, \quad \Omega_Q^0 = \frac{\rho_Q^0}{\rho_c^0},$$

где ρ_r^0 , ρ_m^0 и ρ_Q^0 – плотности масс радиационной и барионной фаз и фазы квинтэссенции, соответственно, в момент $\tau = \tau_{\text{pres}}$.

Так как [2], [4]

$$\rho_r = \frac{A_r^0}{a^4}, \quad \rho_m = \frac{A_m^0}{a^3}, \quad \rho_Q = \frac{A_Q^0}{a^{3\nu}},$$

где A_r , A_m и A_Q – некоторые постоянные, то в терминах переменной x имеем

$$\rho_r = \frac{\rho_r^0}{x^4}, \quad \rho_m = \frac{\rho_m^0}{x^3}, \quad \rho_Q = \frac{\rho_Q^0}{x^{3\nu}},$$

поэтому

$$\frac{8\pi G}{3} \rho = H^2 \left(\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}} \right). \quad (3.27)$$

С учетом выражений (3.25) и (3.27) для интеграла $J(\tau)$ получим

$$J(\tau) = \frac{a_0^{3(1-\nu)}}{H} \int_{x_{\min}}^{x(\tau)} x^{2-3\nu} \left[\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a_0^2 x^2} + \frac{1}{2a_0^6 x^6} \right) \right]^{-1/2} dx, \quad (3.28)$$

где

$$f = \frac{m}{H} = \frac{m_g c^2}{\hbar H}, \quad x_{\min} = \frac{a_{\min}}{a_0}. \quad (3.29)$$

Выражение (3.28) содержит параметры, значения которых могут быть установлены экспериментально [4]. Например, современные наблюдательные данные приводят к следующим значениям для относительных плотностей [6]:

$$\Omega_r^0 \approx 0.6 \cdot 10^{-4}, \quad \Omega_m^0 \approx 0.3, \quad \Omega_Q^0 \approx 0.7. \quad (3.30)$$

В радиационно-доминирующей области

$$a_{\min} \leq a(\tau) \leq a_r,$$

где a_r – значение масштабного фактора, при котором в квадратном корне под интегралом (3.28) ведущими членами становятся Ω_r^0 и $f^2/(12a_0^6x^6)$, а остальными можно пренебречь; для $J(\tau)$ можно использовать следующее приближенное выражение:

$$J_r(\tau) \cong \frac{a_0^{3(1-\nu)}}{H\sqrt{\Omega_r^0}} \int_{x_{\min}}^{x(\tau)} \frac{x^{5-3\nu} dx}{\sqrt{x^2 - x_{\min}^2}}. \quad (3.31)$$

Здесь

$$x_{\min} \equiv \frac{a_{\min}}{a_0} = \left(\frac{f^2}{12a_0^6\Omega_r^0} \right)^{1/2}, \quad (3.32)$$

а $x(\tau) \leq x_r = (a_r/a_0)$.

После интегрирования из выражения (3.31) в радиационно-доминирующей области получим

$$J(\tau) \cong \frac{a_{\min}^{3(1-\nu)}}{H\sqrt{\Omega_r^0}} x_{\min}^2 \left[\left(\frac{a}{a_{\min}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} F \left(-2 + \frac{3\nu}{2}; 1; \frac{3}{2}; 1 - \left(\frac{a}{a_{\min}} \right)^2 \right). \quad (3.33)$$

В малой окрестности $a_{\min}$ отсюда находим

$$J_r(\tau) \cong \frac{a_{\min}^{3(1-\nu)}}{H\sqrt{\Omega_r^0}} x_{\min}^2 \left[\left(\frac{a}{a_{\min}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Вычислим теперь выражение для $J(\tau)$ на стадии квинтэссенции. Введем обозначение $x_Q = a_Q/a_0$ где a_Q – значение масштабного фактора, начиная с которого во Вселенной доминирует квинтэссенция.

Из условий

$$\frac{\Omega_r^0}{x^4} \ll \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}}, \quad \frac{\Omega_m^0}{x^3} \ll \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}}$$

с учетом (3.30) легко найти оценку

$$\left(\frac{3}{7} \right)^{1/(3(1-\nu))} < 1 \ll x_Q \leq x_{\max}. \quad (3.35)$$

Перепишем (3.28) в виде

$$J(\tau) \approx J_1 + \frac{a_0^{3(1-\nu)}\sqrt{6}}{Hf} \int_{x_Q}^{x(\tau)} \frac{x^{2-3\nu/2} dx}{\sqrt{\Omega_Q^0 6/f^2 - x^{3\nu}}}, \quad (3.36)$$

где

$$J_1 = \frac{a_0^{3(1-\nu)}}{H} \int_{x_{\min}}^{x_Q} x^{2-3\nu} \left[\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a_0^2 x^2} + \frac{1}{2a_0^6 x^6} \right) \right]^{-1/2} dx. \quad (3.37)$$

Входящий в выражение (3.36) интеграл

$$I = \int_{x_Q}^{x(\tau)} \frac{x^{2-3\nu/2} dx}{\sqrt{\Omega_Q^0 6/f^2 - x^{3\nu}}}$$

приближенно равен

$$I \approx \frac{2}{3(2-\nu)} \left(\frac{a(\tau)}{a_0} \right)^{3(1-\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{t_{\max}}} \left[F \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}; \frac{a^{3\nu}}{a_0^{3\nu} t_{\max}} \right) - \left(\frac{a_Q}{a(\tau)} \right)^{3(1-\nu/2)} \right], \quad (3.38)$$

где

$$t_{\max} \equiv \left(\frac{a_{\max}}{a_0} \right)^{3\nu} = \frac{\Omega_Q^0 6}{f^2}. \quad (3.39)$$

Подставляя (3.38) в (3.36), получим приближенное выражение $J(\tau)$ для стадии квинтэссенции:

$$J(\tau) \approx J_1 + \frac{2}{3(2-\nu)H\sqrt{\Omega_Q^0}} \left(\frac{a(\tau)}{a_0} \right)^{3(1-\nu/2)} \times \\ \times \left[F \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}; \frac{a^{3\nu}}{a_0^{3\nu} t_{\max}} \right) - \left(\frac{a_Q}{a(\tau)} \right)^{3(1-\nu/2)} \right]. \quad (3.40)$$

Чтобы выразить J в терминах τ , необходимо найти a как функцию τ , т.е. разрешить уравнение (3.25). Следуя работе [4], запишем его в обозначениях, введенных в п. 1–3 после равенства (3.26). Тогда решение можно представить в виде

$$\tau = \frac{1}{H} \int_{x_{\min}}^{x(\tau)} \frac{1}{x} \left[\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a_0^2 x^2} + \frac{1}{2a_0^6 x^6} \right) \right]^{-1/2} dx. \quad (3.41)$$

Анализ этого выражения проведен в работе [4], где показано, что в окрестности $\tau \approx 0$

$$a(\tau) \approx a_{\min} \left(1 + \frac{4\pi G}{3} \rho_{\max} \tau^2 \right). \quad (3.42)$$

В той области развития Вселенной, где массовыми членами (т.е. пропорциональными f членами под знаком интеграла (3.41)) можно пренебречь, зависимость $a = a(\tau)$ известна, и она такая же, как в общей теории относительности. Поэтому мы ее здесь не приводим.

При больших $a(\tau)$, когда во Вселенной доминирует квинтэссенция, выражение (3.41) можно представить в виде

$$\tau \approx \tau_1 + \frac{\sqrt{6}}{Hf} \int_{x_Q}^{x(\tau)} \frac{x^{3\nu/2-1} dx}{\sqrt{\Omega_Q^0 6/f^2 - x^{3\nu}}}, \quad (3.43)$$

где временной интервал

$$\tau_1 = \frac{1}{H} \int_{x_{\min}}^{x_Q} \frac{1}{x} \left[\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_Q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a_0^2 x^2} + \frac{1}{2a_0^6 x^6} \right) \right]^{1/2} dx \quad (3.44)$$

равен времени от начала расширения до момента τ_1 – времени наступления преобладания квинтэссенции во Вселенной, причем $\tau_1 \leq \tau_{\text{pres}}$. Так как

$$\int_{x_Q}^{x(\tau)} \frac{x^{3\nu/2-1} dx}{\sqrt{\Omega_Q^0 6/f^2 - x^{3\nu}}} \approx \frac{1}{3\nu} \arccos \left(1 - 2 \frac{x^{3\nu}}{t_{\max}} \right) - \frac{2}{3\nu} \frac{x_Q^{3\nu}}{\sqrt{t_{\max}}},$$

то после подстановки этого выражения в (3.43) можно найти

$$\left(\frac{a(\tau)}{a_0}\right)^{3\nu} \approx \frac{3\Omega_Q^0}{f^2} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{3}{2}} f \left(H\nu(\tau - \tau_1) + \frac{2}{3} \left(\frac{a_Q}{a_0} \right)^{3\nu} \frac{1}{\sqrt{\Omega_Q^0}} \right) \right) \right]. \quad (3.45)$$

Так как $x_{\max}^{3\nu} \equiv (a_{\max}/a_0)^{3\nu} = 6\Omega_Q^0/f^2$ и $\tau = \tau_{\max} \gg \tau_1$ при $a = a_{\max}$, из (3.45) получаем

$$\sqrt{\frac{3}{2}} f H\nu \tau_{\max} \approx \pi, \quad (3.46)$$

откуда можно найти $\tau_{\max}$. В окрестности $\tau \approx \tau_{\max}$ с помощью (3.45) нетрудно установить, что

$$a(\tau) \approx a_{\max} \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^2 \right]^{1/3\nu}. \quad (3.47)$$

Подставляя (3.42) в (3.34), получим значение $J(\tau)$ в окрестности $\tau \approx 0$:

$$J_{\text{r}}(\tau) \approx \frac{a_{\min}^{3(1-\nu)}}{H\sqrt{\Omega_{\text{r}}^0}} x_{\min}^2 \left(\frac{8\pi G\rho_{\max}}{3} \right)^{1/2} \tau. \quad (3.48)$$

Согласно теореме о среднем, для J_1 (см. выражение (3.37)) имеем

$$J_1 = (x_0 x_1)^{3(1-\nu)} \tau_1, \quad (3.49)$$

где x_1 – некоторое число из интервала $(x_{\min}, x_Q)$, а τ_1 задано формулой (3.44).

Принимая во внимание определение $t_{\max}$ (3.39), а также (3.47), находим

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\nu} \frac{1}{t_{\max}} = \left(\frac{a}{a_{\max}}\right)^{3\nu} \approx 1 - \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^2. \quad (3.50)$$

Учитывая (3.47), (3.49) и (3.50) в выражении (3.40), для $J(\tau)$ в окрестности $\tau \approx \tau_{\max}$ получим

$$\begin{aligned} J(\tau) \approx & (x_0 x_1)^{3(1-\nu)} \tau_1 + \frac{2}{3(2-\nu)H\sqrt{\Omega_Q^0}} \left(\frac{a_{\max}}{a_0} \right)^{3(1-\nu/2)} \times \\ & \times \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^2 \right]^{(2-\nu)/2\nu} F \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}; \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}; 1 - \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Явное выражение для поля $\Phi(\tau)$ может быть найдено из (3.21), если задать вид функции $V(\Phi)$, но сама фридмановская модель на него ограничений не налагает. Другими словами, различные теории квинтэссенции с различными лагранжианами (1.3), отвечающими различным $V(\Phi)$, приводят к одинаковым значениям для ρ_Q и P_Q . Следовательно, все они одинаково влияют на развитие Вселенной во времени.

В ряде работ в качестве $V(\Phi)$ выбирают степенную функцию $V(\Phi) \sim \Phi^{-\alpha}$, где α – некоторое положительное число. Очевидно, что в этом случае из интеграла (3.21) можно найти явное выражение $\Phi(\tau)$ через $J(\tau)$.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения. М. А. Мествиришвили благодарит также сотрудников ОТФ ИФВЭ Ю. М. Зиновьева, В. В. Киселева, А. В. Разумова, А. П. Самохина, В. О. Соловьева и Ю. Г. Строганова за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. G. Ries, A. V. Filippenko, P. Challis et al., *Astron. J. Suppl. Ser.*, **116** (1988), 1009–1038; S. Perlmutter, G. Aldering, M. della Valle et al., *Nature*, **391** (1988), 51–54; S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al., *Astrophys. J.*, **517** (1999), 565–586; C. L. Bennett, A. J. Banday, K. M. Gorski et al., *Astrophys. J.*, **64** (1996), L1–L4; S. Hanany, P. Ade, A. Balbi et al., *Astrophys. J.*, **545** (2000), L5–L9; P. Bernardis, P. A. R. Ade, J. J. Bock et al., *Nature*, **404** (2000), 955–959; A. Benoit, P. Ade, A. Amblard et al., *Astron. Astrophys.*, **399** (2003), L19–L23; L25–L30; C. L. Bennet, M. Halpern, G. Hinshaw et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148** (2003), 1–27; D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148** (2003), 175–194; W. J. Percival, C. M. Baugh, J. Bland-Hawthorn et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **327** (2001), 1297–1306; L. Verde, A. F. Heavens, W. J. Percival et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **335** (2002), 432–440; L. Verde, H. V. Peiris, D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148** (2003), 195–212; D. G. York, J. Adelman, J. E. Anderson et al., *Astron. J.*, **120** (2000), 1579–1587; C. Stroughton, R. H. Lupton, M. Bernardi et al., *Astron. J.*, **123** (2002), 485–548; K. Abazajian, J. K. Adelman-McCarthy, M. A. Agueros et al., *Astron. J.*, **126** (2000), 2081–2086.
- [2] А. А. Логунов, *Теория гравитационного поля*, Наука, М., 2000.
- [3] V. L. Kalashnikov, *X-matter induced cosmological scenarios in the relativistic theory of gravity*, [gr-qc/0109060](#); *Constraints on the cosmological parameters in the relativistic theory of gravitation*, [gr-qc/0202084](#).
- [4] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Н. П. Ткаченко, *ЭЧАЯ*, **36**:5 (2005), 1003–1050.
- [5] L. P. Chimento, A. Feinstein, *Mod. Phys. Lett. A*, **19** (2004), 761–768; R. J. Scherrer, *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004), 011301; R. Das, T. W. Kephart, R. J. Scherrer, *Tracking quintessence and k-essence in a general cosmological background*, [gr-qc/0609014](#).
- [6] M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton et al., *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 103501.

Поступила в редакцию 31.10.2006