Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Алгебры пробных функций со звездочным произведением, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:59:43

© 2007 г.

М. А. Соловьев*

АЛГЕБРЫ ПРОБНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗВЕЗДОЧНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Доказано, что пространства S_α^β Гельфанда–Шилова являются топологическими алгебрами относительно $\star$ -произведения Мойала при условии $\alpha \geq \beta$. Эти пространства пробных функций можно использовать при построении некоммутативной теории поля. Зависимость звездочного произведения от параметра некоммутативности непрерывна по их топологии. Доказано также, что определяющие произведение Мойала ряды абсолютно суммируемы в S_α^β в том и только том случае, если $\beta < 1/2$.

Ключевые слова: некоммутативная теория поля, произведение Мойала, топологические $\star$ -алгебры, пространства Гельфанда–Шилова.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы заметный интерес вызывают некоммутативные теории поля, которые занимают промежуточное положение между обычной квантовой теорией полей и теорией струн (см. обзор [1]). Члены взаимодействия в лагранжианах этих теорий записываются не через обычное поточечное произведение полей, а через звездочное произведение, которое является его некоммутативной и нелокальной деформацией. Деформация приводит к потере коммутативности пространственно-временных координат и к коммутационному соотношению вида

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $\theta^{\mu\nu}$ – вещественнозначная антисимметричная матрица, в простейшем случае постоянная.

К настоящему времени концептуальные основы квантовой физики на некоммутативном пространстве-времени не установлены окончательно, и значительные усилия направлены на выяснение вопросов причинности наблюдаемых, реализации симметрий, а также условий унитарности теории. Наряду с рассмотрением конкретных моделей имеются попытки [2]–[4] распространить на некоммутативную теорию поля

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: soloviev@lpi.ru

аксиоматический подход [5], [6]. Одним из краеугольных камней аксиоматического подхода является интерпретация квантового поля как операторнозначного распределения. Поэтому возникает вопрос о выборе пробных функций, адекватном некоммутативной теории. Важность этого вопроса при поиске решений квантовой теории поля обсуждается в работе [7]. Есть основания считать, что пространство Шварца S , используемое в обычном формализме [5], [6], не вполне годится для этой цели. В работе [2] подчеркивалось, что умеренный рост распределений Шварца может оказаться несовместимым с сильными сингулярностями, возникающими из-за ультрафиолетово-инфракрасного смешивания, характерного для некоммутативных теорий. На это же указывает экспоненциальный рост корреляционных функций калибровочно-инвариантных операторов в импульсном представлении, обнаруженный в работах [8], [9]. Кроме того, сама структура звездочного произведения, определяемая дифференциальным оператором бесконечного порядка, наводит на мысль о том, что подходящими являются аналитические пробные функции. Тонкости вывода теорем о СРТ-симметрии и связи спина со статистикой в такой расширенной формулировке обсуждались в работе [10]. Здесь мы рассмотрим вопрос с другой стороны, взяв в качестве критерия отбора подходящего пространства пробных функций требование, чтобы оно являлось алгеброй относительно звездочного произведения. Анализ будет выполнен в рамках пространств S_α^β Гельфанда–Шилова, которые являются подалгебрами пространства Шварца относительно обычного умножения. Индекс α определяет поведение пробных функций на бесконечности, а индекс β – их гладкость. Чем меньше эти индексы, тем уже пространство S_α^β и тем шире сопряженное ему пространство обобщенных функций. Пространство Шварца S является формальным пределом S_α^β при $\alpha, \beta \rightarrow +\infty$.

В разделе 2 настоящей работы предложен простой способ анализа двух хорошо известных ассоциативных некоммутативных произведений на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^d)$, порождаемых пуассоновой структурой на $\mathbb{R}^d$. Первое является некоммутативной деформацией обычного поточечного произведения функций, и его формальное разложение по параметру некоммутативности воспроизводит $\star$ -произведение Вейля–Гренивольда–Мойала (которое в дальнейшем называется произведением Мойала, как и в большинстве статей на эту тему). Дан наглядный пример, показывающий, что это разложение, вообще говоря, не сходится по топологии пространства Шварца. Второе звездочное произведение, называемое скрученной сверткой, получается из первого преобразованием Фурье. В разделе 3 показано, что предложенный подход применим и к другим пространствам пробных функций. В частности, он позволяет установить, что при некоммутативной деформации поточечного произведения подпространства $S_\alpha^\beta \subset S$ остаются подалгебрами пространства Шварца в том и только том случае, если $\alpha \geq \beta$. В разделе 4 исследованы условия сходимости рядов, определяющих $\star$ -произведение Мойала, и показано, что они приводят к дополнительным ограничениям на индекс β . В разделе 5 доказано, что в любой алгебре S_α^β со звездочным произведением зависимость этого произведения от параметра некоммутативности θ является непрерывной (т.е. оно действительно является деформацией обычного произведения). Раздел 6 содержит краткое обсуждение результатов.

В приложении доказана элементарная лемма относительно запаса функций в рассматриваемых пространствах, полезная при анализе их замкнутости относительно звездочного произведения и сходимости разложения этого произведения в ряд по степеням θ .

2. СТРУКТУРА ЗВЕЗДОЧНОЙ АЛГЕБРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА

Пусть f и g – гладкие комплекснозначные функции на $\mathbb{R}^d$, $\theta^{\mu\nu}$ – постоянная антисимметричная (возможно, вырожденная) $(d \times d)$ -матрица. Тогда мойаловское $\star_\theta$ -произведение функций f и g определяется формулой

$$\begin{aligned} (f \star_\theta g)(x) &= f(x) e^{(i \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu)/2} g(x) = \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x) \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь подразумевается суммирование по индексам $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n$), которая обычно рассматривается как формальный степенной ряд по θ . При $\theta \rightarrow 0$ произведение (2) сводится к обычному поточечному умножению функций. Член первого порядка по θ совпадает с $(i/2)\{f, g\}$, где скобка Пуассона $\{, \}$ задается матрицей $\theta^{\mu\nu}$. В частности,

$$x^\mu \star_\theta x^\nu - x^\nu \star_\theta x^\mu = i\theta^{\mu\nu},$$

и мы получаем коммутационное соотношение (1). Таким образом, θ играет роль параметра некоммутативности. Поскольку этот параметр один и тот же на протяжении всей статьи, в дальнейшем мы будем писать $\star$ вместо $\star_\theta$.

Предположим теперь, что функции f и g быстро убывают на бесконечности и принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^d)$. Тогда каждый член разложения (2) имеет преобразование Фурье¹⁾, которое без труда вычисляется с помощью формул $(\widehat{\partial_\mu f})(p) = ip_\mu \hat{f}(p)$ и $(\widehat{fg})(p) = (2\pi)^{-d} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p-q) dq$. Выполняя затем суммирование по n , мы получаем функцию

$$(2\pi)^{-d} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p-q) e^{-(i/2)\theta^{\mu\nu} q_\mu (p_\nu - q_\nu)} dq = (2\pi)^{-d} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p-q) e^{(i/2)\theta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu} dq. \quad (3)$$

Далее будем использовать (где возможно) безиндексные обозначения. Пуассонов тензор $\theta^{\mu\nu}$ определяет антисимметричную билинейную форму $\theta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$ на $\mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{d'}$ и может быть отождествлен с оператором $\theta: \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}^d$, отображающим элемент $p \in \mathbb{R}^{d'}$ с координатами p_ν в вектор с координатами $(1/2)\theta^{\mu\nu} p_\nu$ (коэффициент $1/2$ включен сюда для упрощения дальнейших формул). Функцию

$$(\hat{f} \circledast \hat{g})(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p-q) e^{i\langle p, \theta q \rangle} dq \quad (4)$$

¹⁾Мы используем следующее определение оператора Фурье: $(\mathcal{F}f)(p) = \hat{f}(p) = \int f(x) e^{-i\langle p, x \rangle} dx$. Скобки $\langle, \rangle$, обозначающие спаривание между $\mathbb{R}^d$ и дуальным ему пространством $\mathbb{R}^{d'}$, будем отождествлять со стандартной евклидовой структурой на $\mathbb{R}^d$.

называют скрученной сверткой функций $\hat{f}$ и $\hat{g}$. Если обозначить через τ_p оператор сдвига $\hat{f}(q) \rightarrow \hat{f}(q - p)$ и через τ_- отражение $\hat{f}(q) \rightarrow \hat{f}(-q)$, то скрученная свертка получается из обычной свертки $\int \hat{f}(q)(\tau_p \tau_- \hat{g})(q) dq$ путем замены τ_p операторами $e^{i\langle p, \theta q \rangle} \tau_p$, которые реализуют проективное представление группы трансляций. Поскольку $\hat{f}, \hat{g} \in S = \mathcal{F}[S]$, функция (4), как легко видеть, является гладкой и быстроубывающей, т.е. также принадлежит пространству Шварца. Бинарная операция $(\hat{f}, \hat{g}) \rightarrow \hat{f} \circledast \hat{g}$ ассоциативна. Действительно,

$$\begin{aligned} ((\hat{f} \circledast \hat{g}) \circledast \hat{h})(p) &= \int \left\{ \int \hat{f}(k) \hat{g}(q - k) e^{i\langle q, \theta k \rangle} dk \right\} \hat{h}(p - q) e^{i\langle p, \theta q \rangle} dq = \\ &= \int \hat{f}(k) \left\{ \int \hat{g}(q) \hat{h}(p - k - q) e^{i\langle p - k, \theta q \rangle} dq \right\} e^{i\langle p, \theta k \rangle} dk = (\hat{f} \circledast (\hat{g} \circledast \hat{h}))(p). \end{aligned}$$

Ясно также, что $(\hat{f} \circledast \hat{g})^* = \hat{g}^* \circledast \hat{f}^*$. Таким образом, $(S, \circledast)$ является инволютивной алгеброй с комплексным сопряжением в качестве инволюции.

Обозначим через $f \times g$ тот элемент пространства S , который оператор Фурье переводит в функцию (3), т.е.

$$\widehat{f \times g} = (2\pi)^{-d} \hat{f} \circledast \hat{g}, \quad f, g \in S(\mathbb{R}^d). \quad (5)$$

В более явной записи

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \iint \hat{f}(q) \hat{g}(p) e^{i\langle q, x \rangle + i\langle p, x \rangle - i\langle q, \theta p \rangle} dq dp. \quad (6)$$

Эта функция называется скрученным произведением f и g . Если матрица θ обратима и пуассонова структура является симплектической, то

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d |\det \theta|} \iint f(y) g(z) e^{i\langle \theta^{-1}(x-y), x-z \rangle} dy dz. \quad (7)$$

Легко убедиться, что нелокальное произведение (7) сохраняет свойства трансляционной и симплектической эквивариантности, которыми обладает обычное поточечное произведение функций²⁾. Обратный фурье-образ разложения функции $(2\pi)^{-d} \hat{f} \circledast \hat{g}$ по степеням θ есть в точности исходный ряд (2), однако нельзя утверждать, что он сходится к функции $f \times g$ по нормам пространства Шварца³⁾:

$$\|f\|_N = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\kappa| \leq N} (1 + |x|)^N |\partial^\kappa f(x)|. \quad (8)$$

В этом легко убедиться на простейшем примере гауссовых функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $d = 2$ и $\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $f(x) = e^{-\gamma|x|^2}$, где $\gamma > 1$. Тогда задающий произведение $f \star f$ ряд (2) не сходится по топологии пространства $S(\mathbb{R}^2)$.

²⁾Формулу (7) можно вывести, предполагая эти свойства, а также ассоциативность и нелокальность.

³⁾В формуле (8) $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и использованы обозначения $|\kappa| = \kappa_1 + \dots + \kappa_d$, $\partial^\kappa = \partial^{|\kappa|} / (\partial x_1^{\kappa_1} \dots \partial x_d^{\kappa_d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – линейный функционал на $S(\mathbb{R}^2)$, определяемый формулой $u(f) = \int f(0, x_2) dx_2$. Очевидно, что он непрерывен по топологии $S(\mathbb{R}^2)$, поскольку $|u(f)| \leq C \|f\|_2$, где $C = \int (1 + |x_2|)^{-2} dx_2$. Обозначим через h_n общий член ряда (2). Тогда

$$u(h_n) = \int h_n(0, x_2) dx_2 = \frac{1}{2\pi} \int \hat{h}_n(p_1, 0) dp_1,$$

где

$$\hat{h}_n(p) = \frac{i^n}{(2\pi)^{2n} n!} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p - q) \langle p, \theta q \rangle^n dq.$$

Покажем, что $u(h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $\hat{f}(p) = \hat{g}(p) = (\pi/\gamma) e^{-|p|^2/(4\gamma)}$ и $\gamma > 1$. Учитывая, что в данном случае $\langle p, \theta q \rangle = (p_1 q_2 - p_2 q_1)/2$, получаем

$$u(h_n) = \frac{1}{8\pi\gamma^2} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int \left\{ \int e^{-(q_1^2 + (p_1 - q_1)^2)/(4\gamma)} dq_1 \right\} p_1^n dp_1 \int e^{-q_2^2/(2\gamma)} q_2^n dq_2. \quad (9)$$

Пусть n – четное число. Элементарное вычисление дает

$$|u(h_n)| = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \frac{\gamma^n}{n!} [1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)]^2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \frac{\gamma^n}{n}.$$

Тем самым предложение доказано.

Поскольку оператор Фурье изоморфно отображает пространство Шварца на себя, оно является инволютивной алгеброй и относительно операции $\times$. Более того, обе алгебры $(S, \otimes)$ и $(S, \times)$ являются топологическими. Это нетрудно проверить прямой оценкой по нормам (8) (см., например, работу [11]). Другой способ основан на использовании формулы (6), которая показывает, что отображение $(f, g) \rightarrow f \times g$ представляет собой композицию следующих пяти отображений:

$$S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\otimes} S(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{e^{-i\langle q, \theta p \rangle}} S(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} S(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\hat{m}} S(\mathbb{R}^d), \quad (10)$$

где через $\hat{m}$ обозначено сужение на диагональ $h(x, y) \rightarrow h(x, x)$. Согласно теореме Шварца о ядре пространство $S(\mathbb{R}^{2d})$ совпадает с пополнением тензорного произведения $S(\mathbb{R}^d) \otimes_\pi S(\mathbb{R}^d)$, снабженного проективной топологией. Отображение $(f, g) \rightarrow f \otimes g$ непрерывно в этой топологии. Кроме того, каждому билинейному непрерывному отображению $S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$ однозначно соответствует линейное непрерывное отображение $S(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$. В частности, линейное отображение $\hat{m}$ ассоциировано с обычным умножением $m: (f, g) \rightarrow f \cdot g$, и его непрерывность вытекает из того (и равносильна тому), что $S(\mathbb{R}^d)$ является топологической алгеброй по обычному умножению. Преобразование Фурье является не только линейным, но и топологическим автоморфизмом пространства S , а функция $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$, очевидно, является для него мультипликатором, т.е. операция умножения на эту функцию непрерывно отображает S в себя. Таким образом, все участвующие в композиции (10) отображения непрерывны, и тем самым алгебры $(S, \otimes)$ и $(S, \times)$ действительно являются топологическими.

Представление (10) позволяет также найти подалгебры алгебр $(S, \otimes)$ и $(S, \times)$, которые становятся полными топологическими алгебрами при наделении их подходящей топологией.

3. АЛГЕБРЫ $(S_\alpha^\beta, \times)$ И $(S_\beta^\alpha, \otimes)$

Напомним определение и основные свойства пространств типа S , введенных Гельфандом и Шиловым [12]. Пространство $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, состоит из тех функций $f \in S$, которые удовлетворяют неравенствам⁴⁾

$$|\partial^\kappa f(x)| \leq CB^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} e^{-|x/A|^{1/\alpha}}, \quad (11)$$

где константы C , A и B зависят от f и использованы обычные мультииндексные обозначения, в частности $\kappa^{\beta\kappa} = \kappa_1^{\beta\kappa_1} \dots \kappa_d^{\beta\kappa_d}$ (при $\kappa_i = 0$ выражение $\kappa_i^{\beta\kappa_i}$ считается равным 1). Мы будем также использовать для этого пространства краткое обозначение S_α^β в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям. Оно является объединением банаховых пространств $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ с нормами

$$\|f\|_{A,B} = \sup_{x,\kappa} e^{|x/A|^{1/\alpha}} \left| \frac{\partial^\kappa f(x)}{B^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa}} \right| \quad (12)$$

и снабжается топологией индуктивного предела относительно естественных отображений $S_{\alpha,A}^{\beta,B} \rightarrow S_\alpha^\beta$. Пространство S_α^β нетривиально, если $\alpha + \beta \geq 1$, исключая случаи $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, когда условием нетривиальности служат строгие неравенства $\beta > 1$ и $\alpha > 1$, соответственно. Как показано в книге [12], связующие отображения $S_{\alpha,A}^{\beta,B} \rightarrow S_{\alpha,A'}^{\beta,B'}$, $A' > A$, $B' > B$, компактны. Отсюда следует, что пространство S_α^β является полным и монтелевским (совершенным). Преобразование Фурье устанавливает линейный и топологический изоморфизм между S_α^β и S_β^α . Каждое нетривиальное пространство типа S является топологической алгеброй относительно обычного умножения и обычной свертки.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\alpha \geq \beta$, то пространство $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$ является топологической алгеброй относительно скрученного произведения (7), а пространство $S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^d) = \mathcal{F}[S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)]$ – топологической алгеброй относительно скрученной свертки (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (5) второе утверждение теоремы равносильно первому. Как показано Митягиным [13], пространства типа S ядерны, и справедливо соотношение

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) \widehat{\otimes}_\pi S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) = S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^{2d}),$$

где $\widehat{}$ означает пополнение. Поэтому достаточно доказать, что функция $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$ является мультипликатором в $S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^{2d})$ при указанном ограничении на индексы α , β . Тогда операция $(f, g) \rightarrow f \times g$ может быть представлена как суперпозиция цепочки непрерывных отображений

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) \times S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\otimes} S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\cdot e^{-i\langle q, \theta p \rangle}} S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^{2d}) \xrightarrow{\hat{m}} S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) \quad (13)$$

в полной аналогии с рассмотренным в предыдущем разделе случаем пространства Шварца.

⁴⁾При $\alpha = 0$ экспоненту в неравенствах (11) следует заменить характеристической функцией множества $|x| \leq A$.

Согласно книге [12] функция $\chi(s)$ является мультипликатором в S_β^α , если при любом $\epsilon > 0$ она удовлетворяет оценке

$$|\partial^\kappa \chi(s)| \leq C_\epsilon A_\epsilon^{|\kappa|} \kappa^{\alpha \kappa} e^{|\epsilon s|^{1/\beta}}. \quad (14)$$

В нашем случае речь идет о целой функции $2d$ переменных, и требуемая оценка легко выводится из неравенства Коши

$$|\partial^\kappa \chi(s)| \leq \kappa! r^{-|\kappa|} \sup_{w \in D_r} |\chi(s - w)|, \quad (15)$$

где $D_r = \{w \in \mathbb{C}^{2d}: |w_j| < r \forall j\}$. Полагаем $s = (p, q)$, $w = (u, v)$ и вводим обозначение $|\theta| = \sum_{j,k} |\theta^{jk}|$. Тогда $|\operatorname{Im}\langle q - v, \theta(p - u) \rangle| \leq r|\theta|(|q| + |p| + 2r)$, и мы получаем

$$|\partial^\kappa e^{-i\langle q, \theta p \rangle}| \leq \kappa! r^{-|\kappa|} e^{r|\theta|(|s| + 2r)}, \quad (16)$$

где $|s| = |p| + |q|$. Поскольку $\kappa! \leq \kappa^\kappa$ и радиус поликруга r можно взять сколь угодно малым, мы немедленно заключаем, что функция $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$ является мультипликатором для S_1^1 и для любого пространства S_β^α с индексами $\alpha \geq 1$, $\beta \leq 1$, в частности для всех пространств S_0^α , так как они нетривиальны лишь при $\alpha > 1$.

Если $\beta > 1$, мы берем

$$r = \frac{1}{|\theta||s|} |\epsilon s|^{1/\beta}. \quad (17)$$

Это выражение стремится к нулю при $|s| \rightarrow \infty$, и при таком выборе r экспонента в правой части неравенства (16) не превосходит $C e^{|\epsilon s|^{1/\beta}}$ всюду в области $|s| \geq 1$. Далее,

$$\frac{\kappa!}{r^\kappa} \leq A^{|\kappa|} \kappa^{\beta \kappa} \sup_{\kappa} \frac{1}{(Ar)^{|\kappa|} \kappa^{(\beta-1)\kappa}} \leq A^{|\kappa|} \kappa^{\beta \kappa} e^{(2d\beta/\epsilon)|Ar|^{-1/(\beta-1)}}.$$

Подставляя сюда (17), мы видим, что при достаточно большом A последняя экспонента также не превосходит $e^{|\epsilon s|^{1/\beta}}$. Следовательно, рассматриваемая функция является мультипликатором для S_β^β , $\beta > 1$, и для всех пространств S_β^α с индексами, удовлетворяющими неравенствам $1 < \beta \leq \alpha$.

Пусть теперь $1/2 \leq \beta < 1$. Воспользуемся неравенством Юнга

$$ab \leq \beta a^{1/\beta} + (1 - \beta) b^{1/(1-\beta)}, \quad a, b \geq 0, \quad (18)$$

полагая в нем $a = |\epsilon s|$, $b = r|\theta|/\epsilon$. Взяв $r = |\kappa|^{1-\beta}$, находим, что правая часть неравенства (16) мажорируется выражением $A_\epsilon^{|\kappa|} \kappa^{\beta \kappa} e^{|\epsilon s|^{1/\beta}}$. Следовательно, и в этом случае $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$ является мультипликатором для S_β^β и для S_β^α с индексом $\alpha > \beta$. Наконец, если $0 < \beta < 1/2$, мы снова используем (18), но теперь берем $r = |\kappa|^\beta$ и заключаем, что $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$ является мультипликатором для $S_\beta^{1-\beta}$. Этим доказательство завершается, поскольку при $\alpha < 1 - \beta$ пространства S_β^α тривиальны.

Отметим, что фурье-симметричные пространства S_β^β являются топологическими алгебрами относительно обеих операций $\times$ и $\otimes$. Пространство $S_{1/2}^{1/2}$ минимально среди них и играет выделенную роль.

Покажем теперь, что наложенные в теореме 1 условия на индексы пространств типа S являются необходимыми для того, чтобы они образовывали звездочные алгебры.

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица $\theta^{\mu\nu}$, задающая $\times$ -произведение, является невырожденной. Если $\alpha < \beta$ и пространство $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$ нетривиально, то в нем найдутся функции f и g такие, что $f \times g \notin S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что матрица $\theta^{\mu\nu}$ антисимметрична, определение (7) можно переписать следующим образом:

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d |\det \theta|} \iint f(y)g(z) e^{i\langle \theta^{-1}(z-y), x \rangle + i\langle \theta^{-1}y, z \rangle} dy dz. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала простейший случай $\alpha = 0$. Элементы S_0^β имеют компактный носитель, и из формулы (19) сразу видно, что их $\times$ -произведение допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^d$. Поскольку нетривиальная аналитическая функция не может иметь компактного носителя, мы заключаем, что произведение $f \times g$ двух элементов пространства S_0^β принадлежит этому же пространству лишь в том случае, если $(f \times g)(x) \equiv 0$. Однако легко указать функции $f, g \in S_0^\beta$, для которых $(f \times g)(0) > 0$. Действительно,

$$(f \times g)(0) = \frac{1}{|\det \theta|} \int f(y) \hat{g}(-\theta^{-1}y) dy. \quad (20)$$

Поскольку пространства S_0^β и S_β^0 являются алгебрами по обычному умножению, из любых их нетривиальных элементов можно построить неотрицательные функции $f \in S_0^\beta$ и $\hat{g} \in S_\beta^0$, а поскольку S_0^β инвариантно относительно трансляций, можно добиться того, чтобы подынтегральная функция в формуле (20) была ненулевой. Тогда $f \times g \notin S_0^\beta$.

Пусть теперь $0 < \alpha < \beta < 1$. Возьмем функции $f, g \in S_{1-\beta}^\beta$, для которых $(f \times g)(0) > 0$. Они убывают не хуже, чем экспоненциально с порядком $1/(1-\beta)$ и конечным типом. Используя неравенство Юнга (18) с $b = |\theta^{-1}(z-y)|/B$ и $a = B|\operatorname{Im} x|$, где B достаточно велико, мы видим, что $(f \times g)(x)$ допускает продолжение до целой функции в $\mathbb{C}^d$ с порядком роста $\leq 1/\beta$. Рассмотрим аналитическое продолжение по переменной x^1 при $x^2 = \dots = x^d = 0$. Известно, что целая функция конечного порядка роста не может иметь экспоненциального убывания более высокого порядка ни в одном из направлений комплексной плоскости (это является прямым следствием более общей теоремы 2.5.4 из монографии [14]). Значит, из неравенства $1/\alpha > 1/\beta$ следует, что $f \times g \notin S_\alpha^\beta$. Если $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 1$, мы приходим к тому же заключению, взяв функции f, g из пространства $S_{1-\beta'}^{\beta'}$, где $\alpha < \beta' < 1$.

Пусть $\alpha = 1$ и $\beta > 1$. Снова возьмем функции f и g из пространства S_0^β , для которых $f \times g \neq 0$. Заметим, что аналитическое продолжение произведения $f \times g$ таких функций имеет порядок роста 1 с конечным типом. Согласно теореме Пэли–Винера носитель функции $\widehat{f \times g}$ должен быть компактным. Впрочем, в этом легко убедиться непосредственно, производя сдвиг плоскости интегрирования в представлении (4), что согласно теореме Коши–Пуанкаре не меняет интеграла ввиду аналитичности и быстрого убывания элементов S_β^0 на бесконечности. А именно, при любом $u \in \mathbb{R}^d$ справедливы оценки

$$|\hat{f}(q + iu)| \leq C e^{-|q/B|^{1/\beta} + r|u|}, \quad |\hat{g}(p - q - iu)| \leq C' e^{r'|u|}$$

и соблюдается равенство

$$(\hat{f} \circledast \hat{g})(p) = \int \hat{f}(q + iu) \hat{g}(p - q - iu) e^{i\langle p, \theta q \rangle - \langle p, \theta u \rangle} dq.$$

Считая для простоты, что $d = 2$ и $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$|(\hat{f} \circledast \hat{g})(p)| \leq C'' e^{(r+r')|u| - p_1 u_2 + p_2 u_1}. \quad (21)$$

Значит, носитель этой свертки содержится в квадрате $\max\{|p_1|, |p_2|\} \leq r + r'$. Действительно, пусть, например, $p_1 > r + r'$. Полагая $u_1 = 0$, $u_2 \rightarrow +\infty$, мы видим, что правая часть неравенства (21) исчезает. Поскольку элементы пространства S_β^1 аналитичны, мы заключаем, что $f \times g \notin S_1^\beta$.

Рассматривая оставшийся случай $\alpha > 1$, мы снова будем для наглядности считать, что $d = 2$ и $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Это не ограничивает общности, поскольку пространства S_α^β инвариантны относительно линейных преобразований координат, и мы можем перейти к симплектическому базису в $\mathbb{R}^d$. Пусть $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ и $g(x) = g_1(x_1)g_2(x_2)$, где $f_i, g_i \in S_\alpha^\beta(\mathbb{R})$. Несложное вычисление показывает, что

$$(f \times g)(x_1, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}_1(z_2) g_2(-z_2) e^{ix_1 z_2} dz_2 \int f_2(y_2) \hat{g}_1(y_2) e^{ix_1 y_2} dy_2. \quad (22)$$

Положим $g_1(\xi) = f_1(\xi)$ и $g_2(\xi) = f_2(-\xi)$. Тогда

$$(f \times g)(x_1, 0) = h^2(x_1),$$

где $h = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_1 f_2)$. Поскольку $\alpha > 1$, функцию f_1 можно выбрать так, чтобы ее преобразование Фурье $\hat{f}_1$ тождественно равнялось 1 в окрестности нуля. В приложении показано, что в пространстве $S_\alpha^\beta(\mathbb{R})$ имеется функция, модули последовательных производных которой не меньше, чем $n^{\beta n}$. Пусть f_2 – такая функция. Тогда

$$|\partial^n (\hat{f}_1 f_2)(0)| = |\partial^n \hat{h}(0)| \geq n^{\beta n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Отсюда следует, что $f \times g \notin S_\alpha^\beta$. Действительно, в противном случае функция h удовлетворяла бы неравенству

$$|h(\xi)| \leq C e^{-|\xi/A|^{1/\alpha}} \quad (24)$$

с некоторыми константами $C, A > 0$, и тогда выполнялось бы

$$\begin{aligned} |\partial^n \hat{h}(0)| &\leq C \int |\xi|^n e^{-|\xi/A|^{1/\alpha}} d\xi = 2CA^{n+1} \int_0^\infty t^n e^{-t^{1/\alpha}} dt \leq \\ &\leq C' A^n \max_{t>0} (t^n e^{-(1/2)t^{1/\alpha}}) = C' A^n (2\alpha n/e)^{\alpha n}, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (23) при $\beta > \alpha$. Теорема доказана.

Имеет место следующий аналог предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $d = 2$, $\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\alpha > \beta$. Если $\beta \geq 1/2$, то существует функция $f \in S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^2)$ такая, что задающий произведение $f \star f$ ряд (2) не сходится по топологии $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тот же линейный функционал $u(f)$, что и при доказательстве предложения 1. Ясно, что он непрерывен по топологии $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^2)$. Используя доказанную в приложении лемму и учитывая инвариантность пространства $S_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ относительно дилатаций, можно утверждать, что при условии $\beta \geq 1/2$ оно содержит положительную четную функцию, которая не меньше гауссовой функции $e^{-|s|^2/(4\gamma)}$, причем γ здесь можно взять сколь угодно большим. Пусть $\hat{f}(p_1, p_2)$ – тензорное произведение таких функций. Тогда

$$\hat{f}(p) \geq e^{-|p|^2/(4\gamma)}.$$

Далее рассуждаем так же, как и при доказательстве предложения 1, с той лишь разницей, что равенство (9) заменяется оценкой

$$|u(h_n)| \geq \frac{c}{2^n n!} \int \left\{ \int e^{-(q_1^2 + (p_1 - q_1)^2)/(4\gamma)} dq_1 \right\} p_1^n dp_1 \int e^{-2q_2^2/(2\gamma)} q_2^n dq_2,$$

которая справедлива при любом четном n .

4. СХОДИМОСТЬ $\star$ -ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Следующая теорема устанавливает простое достаточное условие поточечной сходимости ряда функций, получающегося из ряда (2) преобразованием Фурье.

ТЕОРЕМА 3. Если $f, g \in S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, где $\beta < 1$, то ряд

$$\sum_n \frac{i^n}{n!} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p - q) \langle p, \theta q \rangle^n dq \quad (25)$$

сходится к функции $(\hat{f} \otimes \hat{g})(p)$ равномерно на любом компактном множестве $Q \subset \mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\beta < 1$ следует, что

$$|\hat{f}(q)| \leq C_a e^{-a|q|}, \quad |\hat{g}(q)| \leq C'_a e^{-a|q|} \quad (26)$$

при любом $a > 0$. Пусть r настолько велико, что Q содержится в шаре $|p| < r$, и пусть $a > 2r|\theta|$. Тогда при любых $N = 0, 1, \dots$ и $R > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \int_{|q|>R} \hat{f}(q) \hat{g}(p - q) \langle p, \theta q \rangle^n dq - \int_{|q|>R} \hat{f}(q) \hat{g}(p - q) e^{i\langle p, \theta q \rangle} dq \right| \leq \\ & \leq C'_a \int_{|q|>R} |\hat{f}(q)| (e^{|\langle p, \theta q \rangle|} + 1) dq \leq C_a C'_a \int_{|q|>R} e^{-2r|\theta||q|} (e^{r|\theta||q|} + 1) dq, \quad p \in Q. \end{aligned} \quad (27)$$

Возьмем R настолько большим, чтобы правая часть неравенства (27) не превосходила $\epsilon/2$. Затем выберем N_ϵ так, чтобы при $N > N_\epsilon$ выполнялось неравенство

$$\sup_{|p| \leq r; |q| \leq R} \left| \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \langle p, \theta q \rangle^n - e^{i\langle p, \theta q \rangle} \right| < \frac{\epsilon}{2v_R C_a C'_a},$$

где v_R – объем шара $|q| < R$. Тогда при любом $N > N_\epsilon$

$$\sup_{p \in Q} \left| \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \int \hat{f}(q) \hat{g}(p - q) \langle p, \theta q \rangle^n dq - (\hat{f} \circledast \hat{g})(p) \right| < \epsilon,$$

что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 4. Если $f, g \in S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, где $\beta < 1/2$, то ряд (2) абсолютно сходится в пространстве $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$ к функции $f \times g$, определяемой формулой (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для любого нетривиального пространства S_α^β с индексом $\beta < 1/2$ выполняется неравенство $\alpha > \beta$. Как и прежде, обозначаем n -й член ряда (2) через h_n . Достаточно показать, что этот ряд абсолютно сходится в банаховом пространстве $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, если A и B достаточно велики, т.е. что сходится числовой ряд $\sum_n \|h_n\|_{A,B}$. Пусть $f \in S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ и $g \in S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$. Тогда

$$|\partial^\kappa f(x)| \leq \|f\|_{A_1,B_1} B_1^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} e^{-|x/A_1|^{1/\alpha}}, \quad |\partial^\kappa g(x)| \leq \|g\|_{A_2,B_2} B_2^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} e^{-|x/A_2|^{1/\alpha}}. \quad (28)$$

Обозначим через μ, ν мультииндексы в $\mathbb{Z}_+^d$, соответствующие участвующим в формуле (2) наборам $(\mu_1, \dots, \mu_n), (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Эти мультииндексы определяются равенствами $\partial^\mu = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n}$, $\partial^\nu = \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n}$. Ясно, что $|\mu| = |\nu| = n$. Пусть A настолько велико, что $A^{-1/\alpha} \leq A_1^{-1/\alpha} + A_2^{-1/\alpha}$, и пусть $C = \|f\|_{A_1,B_1} \|g\|_{A_2,B_2}$. Применяя формулу Лейбница и используя элементарные неравенства $(l+m)^{l+m} \leq e^{l+m} l^l m^m$, $l^l m^m \leq (l+m)^{l+m}$, получаем

$$\begin{aligned} e^{|x/A|^{1/\alpha}} |\partial^\kappa (\partial^\mu f \partial^\nu g)(x)| &\leq \\ &\leq C \sum_\lambda \binom{\kappa}{\lambda} B_1^{|\kappa-\lambda+\mu|} B_2^{|\lambda+\nu|} (\kappa - \lambda + \mu)^{\beta(\kappa-\lambda+\mu)} (\lambda + \nu)^{\beta(\lambda+\nu)} \leq \\ &\leq C B_1^{|\mu|} B_2^{|\nu|} e^{\beta|\kappa+\mu+\nu|} \mu^{\beta\mu} \nu^{\beta\nu} \sum_\lambda \binom{\kappa}{\lambda} B_1^{|\kappa-\lambda|} B_2^{|\lambda|} (\kappa - \lambda)^{\beta(\kappa-\lambda)} \lambda^{\beta\lambda} \leq \\ &\leq C (B_1 B_2 e^{2\beta})^n n^{2\beta n} [e^\beta (B_1 + B_2)]^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa}. \end{aligned}$$

Взяв $B \geq e^\beta (B_1 + B_2)$, получаем оценку

$$\|h_n\|_{A,B} \leq C (B_1 B_2 e^{2\beta} |\theta|)^n \frac{n^{2\beta n}}{n!}. \quad (29)$$

Применяя неравенство $n! \geq n^n / e^n$, мы видим, что при условии $\beta < 1/2$ ряд $\sum_n \|h_n\|_{A,B}$ действительно сходится. Учитывая теперь, что преобразование Фурье является топологическим изоморфизмом между $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$ и $S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^d)$, и используя теорему 3, заключаем, что пределом абсолютно сходящегося ряда (2) является функция $f \times g$. Тем самым теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Произведение $\times$ на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ (и на любом пространстве $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, где $\alpha \geq \beta \geq 1/2$) является продолжением по непрерывности $\star$ -произведения (2) топологических алгебр $S_\alpha^{\beta'}(\mathbb{R}^d)$, $\beta' < 1/2$, для которых произведение (2) корректно определено.

Действительно, любое нетривиальное пространство $S_\alpha^{\beta'}(\mathbb{R}^d)$ плотно в $S(\mathbb{R}^d)$ (и в $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, где $\beta > \beta'$). Поэтому $(f, g) \rightarrow f \times g$ является единственным непрерывным отображением $S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$ (и $S_\alpha^{\beta'}(\mathbb{R}^d) \times S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d) \rightarrow S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$), совпадающим с отображением $(f, g) \rightarrow f \star g$ на $S_\alpha^{\beta'}(\mathbb{R}^d) \times S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

Покажем теперь, что если $\theta \rightarrow 0$, то произведение $f \times_\theta g$ стремится к обычному произведению $f \cdot g$ по топологии тех алгебр, которые содержат эти функции.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f, g \in S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^d)$, где $\alpha \geq \beta$. Зависимость произведения $f \times_\theta g$ от параметра некоммутативности θ является непрерывной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение (13) сводит задачу к проверке того, что действующий в пространстве $S_\beta^\alpha(\mathbb{R}^{2d})$ оператор умножения на функцию $e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$ является непрерывным по параметру θ . Достаточно убедиться в этом при $\theta = 0$. Будем использовать обозначения $s = (p, q)$, $e_\theta(s) = e^{-i\langle q, \theta p \rangle}$. Выполненный в разделе 3 анализ показывает, что при любом $\epsilon > 0$ имеют место неравенства

$$|\partial^\kappa(1 - e_\theta(s))| \leq C_\epsilon A_\epsilon^{|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa} e^{|\epsilon s|^{1/\beta}}, \quad (30)$$

причем эта оценка равномерна по θ при $|\theta| \leq 1$ (если θ ограничено этим условием, то можно положить $|\theta| = 1$ в формуле (17)). Кроме того, используя разложение в ряд Тейлора, мы видим, что $1 - e_\theta(s) = |\theta| \chi_\theta(s)$, где $|\chi_\theta(s)| \leq e^{|s|^2}$ при $|\theta| \leq 1$. Для оценки производных целой функции χ_θ воспользуемся формулой (15), но теперь будем считать радиусы r_j полидиска D_r равными $\sqrt{\kappa_j}$. Тогда получаем

$$|\partial^\kappa \chi_\theta(s)| \leq \frac{\kappa!}{r^\kappa} e^{2r^2 + 2|s|^2} \leq e^{2|\kappa|} \kappa^{\kappa/2} e^{2|s|^2}$$

(на последнем шаге использовано неравенство $k! \leq e^d \kappa^k / 2^{|\kappa|}$). Поскольку S_β^α нетривиально лишь при $\alpha + \beta \geq 1$, из условия $\alpha \geq \beta$ следует, что $\alpha \geq 1/2$. Таким образом, наряду с неравенствами (30) имеют место неравенства

$$|\partial^\kappa(1 - e_\theta(s))| \leq |\theta| e^{2|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa} e^{2|s|^2}. \quad (31)$$

Пусть $h \in S_{\beta, B}^{\alpha, A}(\mathbb{R}^{2d})$. Покажем, что существуют $A' \geq A, B' \geq B$ такие, что $\|(1 - e_\theta)h\|_{A', B'} \rightarrow 0$ при $|\theta| \rightarrow 0$. Для упрощения последующих формул положим $B = 1/3^\beta$, что не ограничивает общности, поскольку S_β^α инвариантно относительно растяжений и $e_\theta(\lambda s) = e_{\lambda^2 \theta}(s)$. Тогда

$$|\partial^\kappa h(s)| \leq \|h\|_{A, B} A^{|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa} e^{-3|s|^{1/\beta}}. \quad (32)$$

Применяя формулу Лейбница и используя неравенства (30) с $\epsilon = 1$ и неравенства (31), (32), получаем две оценки:

$$|\partial^\kappa [(1 - e_\theta(s))h(s)]| \leq \begin{cases} C_h(A + A_1)^{|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa} e^{-2|s|^{1/\beta}}, \\ |\theta| C'_h(A + e^2)^{|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa} e^{2|s|^2}. \end{cases}$$

Пусть $A' = A + \max(A_1, e^2)$, $B' = 1$. Тогда

$$\sup_\kappa e^{|s/B'|^{1/\beta}} \frac{|\partial^\kappa [(1 - e_\theta(s))h(s)]|}{A'^{|\kappa|} \kappa^{\alpha\kappa}} \leq \begin{cases} C_h e^{-|R|^{1/\beta}}, & |s| \geq R, \\ |\theta| C'_h e^{2|R|^2 + |R|^{1/\beta}}, & |s| < R. \end{cases}$$

По заданному $\delta > 0$ выберем R настолько большим, чтобы $C_h e^{-|R|^{1/\beta}} \leq \delta$. Тогда $\|(1 - e_\theta)h\|_{A', B'} \leq \delta$ при $|\theta| \leq (\delta/C'_h) e^{-2|R|^2 - |R|^{1/\beta}}$. Теорема доказана.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный анализ показывает, что пространства аналитических пробных функций, использовавшиеся ранее при построении квантовой теории нелокальных взаимодействий [15]–[17], являются топологическими алгебрами относительно звездочного произведения. Это означает, что их можно использовать и в теории поля на некоммутативном пространстве-времени наряду с функционально-аналитическими методами, развитыми при распространении вайтмановского аксиоматического подхода на нелокальные поля.

В ряде работ (см., например, [3], [4], [18]) рассматривалось $\star$ -произведение полевых операторов $\phi(x)$ в разных пространственно-временных точках, определяемое следующим образом:

$$\phi(x_1) \star \phi(x_2) = e^{(i/2)\theta^{\mu\nu}(\partial/\partial x_1^\mu)(\partial/\partial x_2^\nu)} \phi(x_1)\phi(x_2). \quad (33)$$

Это определение очевидным образом распространяется на конечное число операторов в несовпадающих точках (формула (2.24) в работе [1]). Предложенная в работе [3] аксиоматическая формулировка некоммутативной теории поля исходит из соответствующей модификации вайтмановских функций, определяя их как вакуумные средние:

$$\langle 0 | \phi(x_1) \star \phi(x_2) \star \cdots \star \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (34)$$

Единственная возможность придания формальным определениям (33), (34) строго математического смысла состоит в том, чтобы рассматривать участвующий в определении (33) дифференциальный оператор бесконечного порядка как дуальный действующему на подходящих пробных функциях оператору $e^{(i/2)\theta^{\mu\nu}(\partial/\partial x_1^\mu)(\partial/\partial x_2^\nu)}$. Ясно, что последний оператор является фурье-образом мультипликатора $e^{-i\langle p_1, \theta p_2 \rangle}$ и корректно определен на пространствах $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^{2d})$ с индексами, удовлетворяющими ограничению $\alpha \geq \beta$, заданному теоремой 1. Аргументация теоремы 4 показывает, что при более сильном условии $\beta < 1/2$ разложение этого оператора в ряд сходится на каждой пробной функции. Такие пространства можно использовать как его естественную исходную область определения с возможным последующим расширением, зависящим от рассматриваемой модели.

Отметим в заключение, что при развитии подхода Вейля–Вигнера–Гренивольда–Мойала к квантовой механике значительное внимание уделялось распространению скрученного произведения на тот случай, когда оба сомножителя являются распределениями умеренного роста (см. работу [11]). Мотивация этого очевидна, поскольку желательно включить в формализм как можно больше физических наблюдаемых. Выполненный здесь анализ позволяет построить более широкие $\star$ -алгебры обобщенных функций, включающие ультрараспределения и гиперфункции.

Подробнее этот круг вопросов будет рассмотрен в следующей статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При изучении произведения (6) и сходимости ряда (2) в пространствах S_α^β полезна следующая простая лемма.

ЛЕММА. *Если пространство $S_\alpha^\beta(\mathbb{R})$ нетривиально, то в нем существует функция f такая, что*

$$|\partial^n f(0)| \geq n^{\beta n} \quad (\text{П.1})$$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, а пространство $S_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ содержит четную неотрицательную функцию $\hat{g}$, удовлетворяющую неравенству

$$\hat{g}(s) \geq e^{-|s|^{1/\beta}}. \quad (\text{П.2})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что первое утверждение леммы вытекает из второго. Действительно, пусть $g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})$. Ясно, что $\partial^n g(0) = 0$ при нечетных n , а для всех четных n имеем

$$|\partial^n g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int s^n \hat{g}(s) ds \geq \frac{1}{2\pi} \int s^n e^{-|s|^{1/\beta}} ds.$$

Максимум подынтегрального выражения в последнем интеграле достигается при $s = (\beta n)^\beta$. Обозначим это число s_n . Если $\beta > 1$, то функция $|s|^{1/\beta}$ субаддитивна, и мы имеем неравенства

$$\int_{s_n}^{s_n+1} s^n e^{-|s|^{1/\beta}} ds \geq (s_n + 1)^n e^{-(s_n+1)^{1/\beta}} \geq (\beta n)^{\beta n} e^{-\beta n - 1}.$$

Применяя теперь к сумме $g(t) + g'(t)$ должное масштабное преобразование, получаем функцию $f(t)$ со свойством (П.1). При $0 < \beta < 1$ вместо субаддитивности можно воспользоваться неравенством $|s + \sigma|^{1/\beta} \leq 2^{1/\beta}(|s|^{1/\beta} + |\sigma|^{1/\beta})$, что приводит к тому же результату с некоторым усложнением формул.

Докажем теперь существование функции $\hat{g} \in S_\beta^\alpha$, удовлетворяющей условию (П.2), снова считая $\beta > 1$ для простоты формул. Поскольку S_β^α является алгеброй по (обычному) умножению и инвариантно относительно трансляций и дилатаций, из любого нетривиального элемента этого пространства можно построить принадлежащую ему четную неотрицательную функцию ω со свойствами

$$|\partial^\kappa \omega(s)| \leq C A^\kappa \kappa^{\alpha \kappa} e^{-2|s|^{1/\beta}}, \quad \int_{-1}^{+1} \omega(s) ds = e,$$

где константы $C, A > 0$ достаточно велики. Положим

$$\hat{g}(s) = \int e^{-|s-\sigma|^{1/\beta}} \omega(\sigma) d\sigma.$$

Очевидно, что $\hat{g}$ – также четная неотрицательная функция, принадлежащая пространству S_β^α . Действительно, используя субаддитивность $|s|^{1/\beta}$, получаем

$$|\partial^\kappa \hat{g}(s)| \leq \int e^{-|\sigma|^{1/\beta}} |\partial^\kappa \omega(s - \sigma)| d\sigma \leq C' A^\kappa \kappa^{\alpha\kappa} e^{-|s|^{1/\beta}},$$

где $C' = C \int e^{-|\sigma|^{1/\beta}} d\sigma$. Кроме того, для $\hat{g}(s)$ справедлива оценка снизу

$$\hat{g}(s) \geq e^{-(|s|+1)^{1/\beta}} \int_{-1}^{+1} \omega(\sigma) d\sigma \geq e^{-|s|^{1/\beta}},$$

что завершает доказательство.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 05-01-01049) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4401.2006.2).

Список литературы

- [1] R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378** (2003), 207–299.
- [2] L. Álvarez-Gaumé, M. A. Vázquez-Mozo, *Nucl. Phys. B*, **668** (2003), 293–321.
- [3] M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, K. Nishijima, A. Tureanu, Yu. A. Vernov, *Towards an axiomatic formulation of noncommutative field theories*, [hep-th/0402212](#).
- [4] G. Fiore, J. Wess, *Phys. Rev. D*, **15** (2007), 105022; [hep-th/0701078](#).
- [5] Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *РСТ, спин и статистика и все такое*, Наука, М., 1966.
- [6] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [7] A. S. Wightman, “The choice of test functions in quantum field theory”, *Mathematical Analysis and Applications*, Part B, Adv. Math. Suppl. Stud., **7b**, ed. L. Nachbin, Academic Press, New York–London, 1981, 769–791.
- [8] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, *Nucl. Phys. B*, **573** (2000), 573–593.
- [9] D. J. Gross, A. Hashimoto, N. Itzhaki, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **4** (2000), 893–928.
- [10] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **147** (2006), 257–269.
- [11] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly, *J. Math. Phys.*, **29** (1988), 869–879.
- [12] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.
- [13] Б. С. Митягин, *Тр. ММО*, **9** (1960), 317–328..
- [14] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, Физматгиз, М., 1962.
- [15] V. Ya. Fainberg, M. A. Soloviev, *Ann. Phys.*, **113** (1978), 421–447.
- [16] Г. В. Ефимов, *Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий*, Наука, М., 1985.
- [17] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **121** (1999), 139–164.
- [18] J. W. Moffat, *Phys. Lett. B*, **506** (2001), 193–199.

Поступила в редакцию 12.12.2006