Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Модельное уравнение теории солитонов, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 1, 29–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:55:01

© 2007 г.

В. Э. Адлер*, А. Б. Шабат*

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

Рассматривается иерархия интегрируемых $(1+2)$ -мерных уравнений, связанная с алгеброй Ли векторных полей на прямой. Построены решения в квадратурах, содержащие n произвольных функций одного аргумента. Основным интерес представляет простое уравнение для производящей функции иерархии, определяющее динамику по отрицательным временам и имеющее приложения к спектральным задачам второго порядка. Рассмотрение его полиномиальных решений при условии регулярности соответствующего потенциала позволяет развить довольно общую теорию интегрируемых $(1+1)$ -мерных уравнений.

Ключевые слова: иерархия коммутирующих векторных полей, инварианты Римана, уравнения Дубровина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается уравнение

$$D_\tau G(\lambda) = \frac{\langle G(\lambda), G(\mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \quad (1.1)$$

где $G(\lambda) = G(x, \tau, \lambda)$ – искомая функция, локально-аналитическая по λ , и

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} fg_x - gf_x.$$

Предположение об аналитичности является существенным, так как без него решение содержит слишком большой произвол (ср. ниже, пример 1).

Решение задачи Коши с начальными данными $G_0(\lambda) = G_0(x, \lambda)$ можно искать в виде ряда Тейлора

$$G(\lambda) = G_0(x, \lambda) + \tau G_1(x, \lambda) + \tau^2 G_2(x, \lambda) + \dots \quad (1.2)$$

Подстановка его в уравнение приводит к рекуррентной формуле

$$(n+1)G_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{k=0}^n \langle G_k(\lambda), G_{n-k}(\mu) \rangle, \quad n = 0, 1, \dots,$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: adler@itp.ac.ru, shabat@itp.ac.ru

позволяющей вычислить все коэффициенты, если G_0 – гладкая функция переменных x и λ . Заметим, что если G_0 – полином по λ степени m , то из рекуррентной формулы следует, что и все $G_k(\lambda)$ суть полиномы степени не выше m . Нетрудно получить оценку для всех коэффициентов ряда и доказать, что он имеет ненулевой радиус сходимости. Таким образом, динамика по τ сохраняет полиномиальную структуру, что выделяет класс достаточно содержательных решений.

Дифференцирование D_τ зависит, очевидно, от выбора точки μ в уравнении (1.1). Оказывается, что этот произвол приводит к совместным друг с другом динамическим уравнениям. Точнее, имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дифференцирование D_i определяется формулой (1.1) с $\mu = \mu_i$. Тогда $[D_1, D_2] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $g_i = G(\mu_i)$. Из уравнения (1.1) следует, что

$$D_1 g_2 = \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{\langle g_1, g_2 \rangle}{\mu_1 - \mu_2} = D_2 g_1.$$

Легко проверить, что тождество Якоби

$$\langle \langle G, g_1 \rangle, g_2 \rangle + \langle \langle g_2, G \rangle, g_1 \rangle + \langle \langle g_1, g_2 \rangle, G \rangle = 0$$

обеспечивает равенство $[D_1, D_2](G) = 0$. Теорема доказана.

Очевидно, что теорема 1 остается справедливой, если заменить $\langle, \rangle$ на скобку в произвольной алгебре Ли. Исходная скобка отвечает алгебре Ли векторных полей на прямой; другим интересным примером является скобка $\langle f, g \rangle = f_y g_x - f_x g_y$, отвечающая гамильтоновым векторным полям на плоскости. Мы ограничиваемся простейшим случаем, так как и он уже вполне нетривиален и хорошо демонстрирует возникающие здесь задачи.

Приведенное выше уравнение для функций g_1, g_2 можно записать в виде уравнения с частными производными $\partial_{\tau_i} = D_i$ для потенциала u , определенного равенствами $g_i = u_{\tau_i}$:

$$(\mu_i - \mu_j)u_{\tau_i \tau_j} = u_{\tau_i} u_{x \tau_j} - u_{\tau_j} u_{x \tau_i}. \quad (1.3)$$

Это дифференциальное уравнение (ср. с работами [1]) представляет собой рассматриваемую задачу в упрощенном варианте в том смысле, что аналитичность решения по параметру здесь не важна. Частные решения данного уравнения приведены в разделе 4. Очевидно, что введение новой независимой переменной τ_k , отвечающей μ_k , приводит к уравнению, совместному с (1.3). Некоторые обобщения, обладающие аналогичными симметричными свойствами, обсуждаются в приложении Б. Было бы интересно сравнить эти примеры с классификационными результатами, полученными в работах [2] в рамках метода гидродинамических редукций.

Итак, отличительной чертой уравнения (1.1) являются его симметричные свойства. В случае полиномиальных по λ решений достаточный набор симметрий позволяет полностью проинтегрировать уравнение (1.1). Общее решение в случае многочленов n -й степени содержит n произвольных функций одного переменного $\kappa_i(\lambda)$, и

задача сводится к интерполяции многочлена по формулам $G_x|_{\lambda=\gamma_i} = \kappa_i(\gamma_i)$ (см. раздел 3). При этом нули γ_i многочлена $G(\lambda)$ играют роль римановых инвариантов для системы гиперболических уравнений для коэффициентов $G(\lambda)$ (ср. с работой [3]).

В разделе 2 показано, что уравнение (1.1), переписанное в терминах лорановских разложений функции $G(\lambda)$, порождает бесконечную последовательность коммутирующих векторных полей, которую можно интерпретировать как дополнительные симметрии уравнений (1.3).

В приложении A, ориентированном на применение уравнения (1.1) в решении спектральных задач второго порядка

$$\psi_{xx} = U(x, \lambda)\psi,$$

мы обсудим задачу о построении $G(x, \lambda)$ для широкого класса потенциалов $U(x, \lambda)$. Отказываясь от требования полиномиальности по λ как функции $G(x, \lambda)$, так и потенциала $U(x, \lambda)$, удастся установить между ними взаимно однозначное соответствие. В прямой задаче для этого используется уравнение Риккати, а решение обратной задачи определяет потенциал $U(x, \lambda)$ как производную Шварца по x от $1/G(x, \lambda)$.

Уравнение (1.1) допускает не только полиномиальные, но и рациональные по спектральному параметру λ решения. Обобщения уравнений Дубровина на этот случай и исследование возможных приложений этих решений к уравнениям типа Кортевега–де Фриза (КдФ) представляется одной из интересных нерешенных задач.

Мы закончим введение примером, демонстрирующим существенность выбора подходящей аналитической структуры $G(\lambda)$ (многочлены, мероморфные функции).

ПРИМЕР 1. Уравнение (1.1) допускает редукцию

$$G = a(\tau, \lambda)x^2 + 2b(\tau, \lambda)x + c(\tau, \lambda), \quad (1.4)$$

приводящую к системе

$$\frac{da}{d\tau} = 2\{a, b\}, \quad \frac{dc}{d\tau} = 2\{b, c\}, \quad \frac{db}{d\tau} = \{a, c\}, \quad \{f, g\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(\mu)g(\lambda) - g(\mu)f(\lambda)}{\lambda - \mu}.$$

Нетрудно видеть, что дискриминант $b^2 - ac$ не зависит от τ . Уравнение (1.3) переходит в матричное уравнение

$$(\mu_i - \mu_j)S_{\tau_i\tau_j} = [S_{\tau_i}, S_{\tau_j}], \quad S = \begin{pmatrix} b & a \\ -c & -b \end{pmatrix} \in sl_2,$$

обладающее частными интегралами $\partial_{\tau_j}(S_{\tau_i}, S_{\tau_i}) = 0$, где $(S_1, S_2) = \text{tr } S_1 S_2$.

В частности, при $a = 0$ уравнение сводится к линейному:

$$\frac{df(\lambda)}{d\tau} = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad \frac{d}{d\tau} = 2b(\mu)\frac{d}{d\lambda}, \quad G(\tau, \lambda) = 2b(\lambda)(x + f(\tau, \lambda)).$$

2. КОММУТИРУЮЩИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Рассматривая локально-аналитические функции, будем считать, что они не имеют существенно особой точки на бесконечности и регулярны в нуле (что можно обеспечить сдвигом λ), так что можно записать разложения вида

$$G(\lambda) = \begin{cases} A(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \dots, & \lambda \rightarrow \infty, \\ B(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots, & \lambda \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

сходящиеся соответственно при $|\lambda| > \rho_1$ и $|\lambda| < \rho_2$.

Выбрав точку μ в области сходимости одного из степенных рядов (2.1), перепишем уравнение (1.1) в виде

$$(\lambda - \mu)D_\tau A(\lambda) = \langle A(\lambda), G(\mu) \rangle.$$

Приравняв нулю коэффициент при λ^{m+1} , получаем $D_\tau a_0 = 0$. Делая замену вида $\partial_x \rightarrow \phi(x)\partial_x$, $G \rightarrow G/\phi(x)$, можно положить $a_0 = 1$, не теряя общности. Тогда

$$D_\tau a_n = \langle A_n(\mu), G(\mu) \rangle, \quad A_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n. \quad (2.2)$$

Аналогично из уравнения

$$(\lambda - \mu)D_\tau B(\lambda) = \langle B(\lambda), G(\mu) \rangle$$

в окрестности $\lambda = 0$ получаем

$$D_\tau b_n = \langle A_{-n-1}(\mu), G(\mu) \rangle, \quad A_{-1}(\mu) = -\frac{b_0}{\mu}, \quad A_{-2}(\mu) = -\frac{b_0}{\mu^2} - \frac{b_1}{\mu}, \quad \dots$$

Таким образом, разложения (2.1) и уравнение (1.1) приводят к бесконечной последовательности полиномов A_n :

$$A_n(\lambda) = \lambda A_{n-1}(\lambda) + \begin{cases} a_n, & n > 0, \\ b_{-n}, & n < 0, \end{cases} \quad A_0 = 1, \quad A_{-1}(\lambda) = -\frac{b_0}{\lambda}. \quad (2.3)$$

Полиномы A_n , $n \in \mathbb{Z}$, и теорема 1 позволяют переписать исходное уравнение (1.1) в виде системы уравнений для коэффициентов рядов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Для этого, ориентируясь на работы [1], введем последовательность векторных полей $\mathcal{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, в виде дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}_n = D_n - A_n(\lambda)D_0, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Соответствующая иерархия времен обозначается далее $\mathbf{t} = (\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots)$.

Исходя из полученных выше формул для $D_\tau a_n$ и $D_\tau b_n$, можно проверить, что коммутативность дифференцирований из теоремы 1 приводит к коммутационным соотношениям

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_m A_n - D_n A_m = \langle A_m, A_n \rangle \quad (2.5)$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}$. Наконец, эти соотношения для многочленов (2.3) можно переписать как уравнение непосредственно для $G(\lambda)$:

$$D_n G(\lambda) = \langle A_n(\lambda), G(\lambda) \rangle, \quad G(\lambda) = G(\mathbf{t}, \lambda), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Эквивалентность (2.5) и (2.6) доказывается, следуя стандартной схеме [4].

Подставив в уравнение (2.6) разложения (2.1), получаем

$$D_n A(\lambda) = \langle A_n(\lambda), A(\lambda) \rangle, \quad D_n B(\lambda) = \langle A_n(\lambda), B(\lambda) \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

В частности, для первого “отрицательного” времени t_{-1} имеем (ср. с работой [5])

$$D_{-1} A(\lambda) = \frac{b_{0,x}}{\lambda} + \frac{\langle a_1, b_0 \rangle}{\lambda^2} + \frac{\langle a_2, b_0 \rangle}{\lambda^3} + \dots, \quad D_{-1} B(\lambda) = \langle b_1, b_0 \rangle + \langle b_2, b_0 \rangle \lambda + \dots,$$

что приводит к бесконечной автономной системе уравнений для переменных b_i :

$$D_{-1} b_0 = \langle b_1, b_0 \rangle, \quad D_{-1} b_1 = \langle b_2, b_0 \rangle, \quad \dots,$$

соответствующей выбору μ в области сходимости ряда $B(\lambda)$.

Аналогично для первого “положительного” времени $D_1 = \partial_{t_1}$ определяющие уравнения (2.6) дают

$$D_1 A(\lambda) = \left\langle \lambda + a_1, \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{\lambda^3} + \dots \right\rangle, \quad D_1 B(\lambda) = \langle a_1, b_0 \rangle + (b_{0,x} + \langle a_1, b_1 \rangle) \lambda + \dots,$$

что сводится к бесконечной системе уравнений для переменных a_i :

$$D_1 a_1 = a_{2,x}, \quad D_1 a_2 = a_{3,x} + \langle a_1, a_2 \rangle, \quad D_1 a_3 = a_{4,x} + \langle a_1, a_3 \rangle, \quad \dots, \quad (2.8)$$

соответствующей выбору μ в области сходимости ряда $A(\lambda)$.

3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В полиномиальном случае $G = \lambda^n + g_1 \lambda^{n-1} + \dots + g_n$ бесконечная последовательность времен $\mathbf{t}$ и отвечающих им полиномов (2.3) сводится к конечному базису

$$D_i(G) = \langle G_i, G \rangle, \quad G_i = \lambda^i + g_1 \lambda^{i-1} + \dots + g_i. \quad (3.1)$$

Данное дифференцирование, отвечающее произвольному μ , можно разложить по этому базису. В частности, $\partial_x = D_0$, а значению $\mu = 0$ отвечает дифференцирование D_{n-1} . В последнем случае уравнения для коэффициентов имеют вид

$$g_{1,t_{n-1}} = g_{n,x}, \quad g_{2,t_{n-1}} = \langle g_1, g_n \rangle, \quad \dots, \quad g_{n,t_{n-1}} = \langle g_{n-1}, g_n \rangle. \quad (3.2)$$

Эта система имеет довольно много приложений. Например, случай $n = 2$:

$$g_{1,t_1} = g_{2,x}, \quad g_{2,t_1} = \langle g_1, g_2 \rangle \Leftrightarrow u_{t_1 t_1} = \langle u_x, u_{t_1} \rangle,$$

описывает модель Чаплыгина в газовой динамике.

В общем случае, введя в качестве динамических переменных нули $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) = (\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2) \cdots (\lambda - \gamma_n),$$

и полагая $\lambda = \gamma_i$ в (1.1), получаем

$$D_\tau G(\lambda)|_{\lambda=\gamma_i} = \frac{G(\mu)G_x(\lambda)}{\mu - \lambda} \Big|_{\lambda=\gamma_i} \Leftrightarrow D_\tau \gamma_i = \frac{G(\mu)}{\mu - \gamma_i} \gamma_{i,x}, \quad i = 1, \dots, n,$$

или

$$D_\tau \gamma_1 = (\mu - \gamma_2) \cdots (\mu - \gamma_n) \gamma_{1,x}, \quad \dots, \quad D_\tau \gamma_n = (\mu - \gamma_1) \cdots (\mu - \gamma_{n-1}) \gamma_{n,x}. \quad (3.3)$$

Сравнивая эту формулу с (3.1) при $\lambda = \gamma_i$, получаем

$$D_\tau = \mu^{n-1} D_0 + \mu^{n-2} D_1 + \cdots + D_{n-1}. \quad (3.4)$$

Задача интегрирования (3.3) допускает различные постановки, и мы строим общее решение, ориентируясь на работу [3]. В силу теоремы 1 и формулы (3.4) дифференцирования D_i коммутируют. Отождествляя $g_1, \dots, g_n$ с элементарными симметрическими многочленами

$$g_1 = -\sum \gamma_k, \quad g_2 = \sum_{k < l} \gamma_k \gamma_l, \quad g_3 = -\sum_{k < l < m} \gamma_k \gamma_l \gamma_m, \quad \dots$$

и вводя обозначения

$$g_{i,j} = g_i|_{\gamma_j=0} \Rightarrow g_{1,1} = -\gamma_2 - \cdots - \gamma_n, \quad \dots, \quad g_{n-1,n} = (-1)^n \gamma_1 \cdots \gamma_{n-1},$$

приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Интегрирование уравнений (3.3) эквивалентно интегрированию совместной системы из $n(n-1)$ уравнений*

$$D_i(\gamma_j) = g_{i,j} D_0(\gamma_j), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Можно добавить, что уравнение (3.5) с номером (i, j) получается из соответствующего уравнения (3.1) при подстановке $\lambda = \gamma_j$, и

$$g_{i,j} = G_i(\gamma_j) = \gamma_j^i + \gamma_j^{i-1} g_1 + \cdots + g_i = -\gamma_j^{i-n} (\gamma_j^{n-i-1} g_{i+1} + \cdots + g_n), \quad i < n.$$

Заметим, что нули γ_j являются инвариантами Римана, т.е. приводят любую из рассматриваемых $n-1$ квазилинейных систем уравнений первого порядка (3.1) (напомним, что (3.2) отвечает $i = n-1$) к диагональному виду.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $D_i = \partial_{t_i}$, $i = 0, \dots, n-1$. Тогда общее решение переопределенной системы (3.5) задается формулой*

$$\begin{bmatrix} dt_0 \\ dt_1 \\ \vdots \\ dt_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{n-1} & \gamma_2^{n-1} & \cdots & \gamma_n^{n-1} \\ \gamma_1^{n-2} & \gamma_2^{n-2} & \cdots & \gamma_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1^{-1}(\gamma_1) d\gamma_1 \\ \kappa_2^{-1}(\gamma_2) d\gamma_2 \\ \vdots \\ \kappa_n^{-1}(\gamma_n) d\gamma_n \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим в дополнение к (3.5), что динамика нулей по x определена системой

$$\gamma_{1,x} = R_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \dots, \quad \gamma_{n,x} = R_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad (3.7)$$

и найдем вид функций R_i из условий совместности с (3.5), вычисляя перекрестные производные. Например, используя (3.3), находим

$$\begin{aligned} D_0 \gamma_1 &= R_1, & D_\tau \gamma_1 &= (\mu - \gamma_2) \cdots (\mu - \gamma_n) R_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [D_\tau, D_0](\gamma_1) = D_\tau R_1 - D_0(\mu - \gamma_2) \cdots (\mu - \gamma_n) R_1. \end{aligned}$$

Полагая $\mu = \gamma_2, \dots, \gamma_n$ в условии совместности $[D_\tau, D_0](\gamma_1) = 0$, получаем

$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_j} \ln \left(R_1 \prod_{j=2}^n (\gamma_1 - \gamma_j) \right) = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Аналогично остальные условия совместности дают

$$\frac{\partial \ln R_i}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\gamma_i - \gamma_j}, \quad i \neq j, \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{\kappa_i(\gamma_i)}{\prod' (\gamma_i - \gamma_j)},$$

где n функций $\kappa_1(\gamma_1), \dots, \kappa_n(\gamma_n)$ произвольны.

Очевидно, что найденная дополнительная динамическая система

$$\gamma_{1,x} = \frac{\kappa_1(\gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2) \cdots (\gamma_1 - \gamma_n)}, \quad \gamma_{2,x} = \frac{\kappa_2(\gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 - \gamma_3) \cdots (\gamma_2 - \gamma_n)}, \quad \dots \quad (3.8)$$

вместе с (3.5) явно определяет матрицу Якоби размера $n \times n$

$$J = \frac{\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{\partial(t_0, \dots, t_{n-1})} \quad (3.9)$$

из частных производных n нулей по n независимым переменным ($t_0 = x$). Можно непосредственно проверить, что J совпадает с обратной к матрице Вандермонда W из формулы (3.6) с точностью до умножения слева на диагональную матрицу:

$$J = \text{diag}(\kappa_1(\gamma_1), \kappa_2(\gamma_2), \dots, \kappa_n(\gamma_n)) W^{-1}.$$

Остается заметить, что формула (3.6), записанная в виде

$$dt_{n-1} = \frac{d\gamma_1}{\kappa_1(\gamma_1)} + \dots + \frac{d\gamma_n}{\kappa_n(\gamma_n)}, \quad \dots, \quad dx = \frac{\gamma_1^{n-1} d\gamma_1}{\kappa_1(\gamma_1)} + \dots + \frac{\gamma_n^{n-1} d\gamma_n}{\kappa_n(\gamma_n)}, \quad (3.10)$$

сводит задачу определения зависимости $t_0, \dots, t_{n-1}$ от $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ к квадратурам.

Очевидно, что многочлен $G_x(\lambda)$ имеет степень $(n-1)$, и из формул (3.8) и соотношения

$$G_x(\lambda) = -\gamma_{1,x}(\lambda - \gamma_2) \cdots (\lambda - \gamma_n) - \dots - \gamma_{n,x}(\lambda - \gamma_1) \cdots (\lambda - \gamma_{n-1})$$

следует, что для вычисления якобиана (3.9) и интегрирования дифференциальных уравнений (3.1) достаточно задать произвольным образом функции

$$G_x(\lambda)|_{\lambda=\gamma_j} = -\kappa_j(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

СЛЕДСТВИЕ. Теорема 2 позволяет определить все производные $D_i(G)$ в терминах $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ явно, без интегрирования дифференциальных уравнений (3.1). В частности, $D_0(G) = G_x$ определяется при помощи интерполяционной формулы Лагранжа:

$$G_x(\lambda) = -\kappa_1(\gamma_1) \frac{(\lambda - \gamma_2) \cdots (\lambda - \gamma_n)}{(\gamma_1 - \gamma_2) \cdots (\gamma_1 - \gamma_n)} - \cdots - \kappa_n(\gamma_n) \frac{(\lambda - \gamma_1) \cdots (\lambda - \gamma_{n-1})}{(\gamma_n - \gamma_1) \cdots (\gamma_n - \gamma_{n-1})}.$$

Вместо независимой переменной t_{n-1} , соответствующей $\mu = 0$, можно использовать τ . Для перехода от переменных $t_0 = x, t_1, \dots, t_{n-1}$ к переменным $t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \tau$ нужен якобиан

$$\frac{\partial(t_0, \dots, \tau)}{\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} = \frac{\partial(t_0, \dots, \tau)}{\partial(t_0, \dots, t_{n-1})} \frac{\partial(t_0, \dots, t_{n-1})}{\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}.$$

Так как $d\tau = \mu^{n-1} dt_0 + \mu^{n-2} dt_1 + \cdots + dt_{n-1}$, то

$$d\tau = \sum \frac{\kappa(\gamma_i) d\gamma_i}{\kappa_i(\gamma_i)}, \quad \kappa(\gamma) = (\mu\gamma)^{n-1} + (\mu\gamma)^{n-2} + \cdots + 1.$$

Для применения теоремы 2 к уравнению (1.3) достаточно теперь выразить потенциал через нули $\gamma_j(x, \alpha, \beta)$, $j = 1, 2, \dots$:

$$du = \frac{\gamma_1^n d\gamma_1}{\kappa_1(\gamma_1)} + \cdots + \frac{\gamma_n^n d\gamma_n}{\kappa_n(\gamma_n)} \Rightarrow D_j u = g_j.$$

4. ОТОБРАЖЕНИЕ $G \rightarrow U$

Рассмотрим классификацию полиномиальных решений $G(\lambda)$ уравнения (1.1), используя следующее отображение:

$$G \rightarrow U: 4U = \frac{K(\lambda)}{G^2} - \frac{G_x^2}{G^2} + 2\frac{G_{xx}}{G}. \quad (4.1)$$

Отметим, что рассматриваемое отображение $G \rightarrow U$ имеет нетривиальное ядро, состоящее из квадратичных по x полиномов (1.4) (см. пример 1). Действительно, умножение уравнения (4.1) на G^2 дает после дифференцирования линейное уравнение третьего порядка

$$2UG_x + U_x G = \frac{1}{2}G_{xxx}. \quad (4.2)$$

Полагая в этом уравнении $U = 0$, получаем $G_{xxx} = 0$. Заметим еще, что в силу однородности формулы (4.1) замена

$$\tilde{G} = \kappa(\lambda)G, \quad \tilde{K} = \kappa^2 K \Rightarrow \tilde{U} = U$$

не меняет U . Это позволяет рассматривать полиномиальные решения $\tilde{G} = \kappa(\lambda)G$ и G , отличающиеся зависящим только от λ множителем $\kappa(\lambda)$, как эквивалентные.

Использование отображения (4.1) для классификации полиномиальных решений $G(\lambda)$ не в последнюю очередь связано с созданной школой Новикова теорией конечных потенциалов U для спектральных задач второго порядка

$$\psi_{xx} = U(x, \lambda)\psi. \quad (4.3)$$

В связи с этими приложениями в спектральной теории полезно иметь в виду следующее соотношение:

$$f^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_x}{2G} \pm \frac{\sqrt{K(\lambda)}}{2G} \Rightarrow f_x^\pm + (f^\pm)^2 = \frac{K(\lambda)}{4G^2} + \frac{G_{xx}}{2G} - \frac{G_x^2}{4G^2} = U, \quad (4.4)$$

связывающее уравнение (4.1) с уравнением Риккати $f_x + f^2 = U$. Прямая задача о построении при заданном потенциале U двух специальных решений $f = f^\pm$ уравнения Риккати таких, что

$$f^+ - f^- = \frac{\sqrt{K(\lambda)}}{G},$$

обсуждается в приложении А. Это позволяет, в частности, связать функцию $K(\lambda)$ из формулы (4.1) с вронскианом двух решений $\psi^\pm$ спектральной задачи (4.3), соответствующих в силу известного правила $(\ln \psi^\pm)_x = f^\pm$ этим специальным решениям $f = f^\pm$ уравнения Риккати.

Нули $\lambda = \gamma_i$ полиномиальных решений $G(\lambda)$ уравнения (1.1) приводят, вообще говоря, к полюсам потенциала, определенного формулой (4.1), что в приложениях приходит в противоречие с аналитической структурой потенциала $U(\lambda)$, заданной априори. Сформулированная ниже теорема указывает, как можно избавиться от этих нежелательных полюсов за счет специального выбора функций $\kappa_j(\lambda)$ в формуле (3.11).

ТЕОРЕМА 3. *Потенциал $U(\lambda, x)$ как функция от λ не имеет движущихся полюсов $\lambda = \gamma_j(x)$, $\gamma_{j,x} \neq 0$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия регулярности:*

$$\kappa_i(\lambda) = \pm \sqrt{K(\lambda)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства мы выведем уравнения, аналогичные (3.8), непосредственно из определяющего уравнения (4.1), используя только условие регулярности и не обращаясь к утверждению 1. С этой целью подставим

$$\frac{1}{G} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 - \lambda} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\gamma_n - \lambda}, \quad \Gamma = \frac{G_x}{G} = \frac{\gamma_{1,x}}{\gamma_1 - \lambda} + \dots + \frac{\gamma_{n,x}}{\gamma_n - \lambda}, \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \neq i} \frac{1}{\gamma_i - \gamma_j},$$

в формулу

$$4U = \frac{K(\lambda)}{G^2} + 2\Gamma_x + \Gamma^2. \quad (4.6)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при

$$(\lambda - \gamma_1)^{-2}, \quad (\lambda - \gamma_2)^{-2}, \quad \dots, \quad (\lambda - \gamma_n)^{-2},$$

получаем n уравнений Дубровина для $\gamma_1, \dots, \gamma_n$:

$$\gamma_{1,x} = \frac{\sqrt{K(\gamma_1)}}{(\gamma_1 - \gamma_2) \dots (\gamma_1 - \gamma_n)}, \quad \dots, \quad \gamma_{n,x} = \frac{\sqrt{K(\gamma_n)}}{(\gamma_n - \gamma_1) \dots (\gamma_n - \gamma_{n-1})}. \quad (4.7)$$

Сравнив эти уравнения с (3.8), заключаем, что выполняются условия (4.5).

Оказывается, эти условия не только необходимы, но и достаточны для регулярности потенциала U , определенного формулой (4.1) по решению G уравнений (3.8). Действительно, дифференцируя по x уравнения (4.7), получаем

$$\gamma_{i,xx} = \gamma_{i,x}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{K'}{K}(\gamma_i) - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\gamma_i - \gamma_j} \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_{i,x} \gamma_{j,x}}{\gamma_i - \gamma_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

С другой стороны,

$$\frac{K(\lambda)}{G^2(\lambda)} = K_2 + K_1 + K_0, \quad K_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2 K(\gamma_i)}{(\lambda - \gamma_i)^2}, \quad K_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2 K(\gamma_i) K_{1,i}}{\lambda - \gamma_i}, \quad (4.9)$$

где

$$K_{1,i} = \left. \frac{d}{d\lambda} \ln K(\lambda) \right|_{\lambda=\gamma_i} - 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{\gamma_i - \gamma_j},$$

а функция K_0 регулярна. Так как согласно (4.6)

$$4U = \frac{K(\lambda)}{G^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{i,x}^2}{(\gamma_i - \lambda)^2} + 2 \sum_{i < j} \frac{\gamma_{i,x} \gamma_{j,x}}{(\gamma_i - \lambda)(\gamma_j - \lambda)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{i,xx}}{(\gamma_i - \lambda)},$$

то мы получаем, что в силу уравнений Дубровина (4.7) сокращаются полюсы и первого, и второго порядков. Теорема доказана.

В силу вышесказанного, если произвольные априори функции $\kappa_j(\lambda)$ в формуле (3.10), задающие решение G , удовлетворяют условию регулярности (4.5) с аналитической функцией $K(\lambda)$, то потенциал U аналитичен по λ . В силу теоремы Лиувилля функция, аналитическая по λ во всей расширенной плоскости, является постоянной. В частности (см. отображение (4.1)), полиномиальным функциям $K(\lambda)$ соответствуют полиномиальные по λ потенциалы U . Очень простая структура потенциала U в этом случае определяется разложением в окрестности $\lambda = \infty$ функции

$$H(\lambda) = \frac{\lambda^n}{G} = 1 + \frac{h_1}{\lambda} + \frac{h_2}{\lambda^2} + \dots, \quad h_1 = -g_1, \quad h_2 = g_1^2 - g_2, \quad \dots, \quad (4.10)$$

и коэффициентами c_i разложения

$$\lambda^{-m} K(\lambda) = 4 \left(1 + \frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \dots \right),$$

где m обозначает порядок полюса $K(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$. Отметим, что коэффициенты разложения (4.10) определяют законы сохранения уравнений (3.11), так как

$$D_i(H) = D_i \left(\frac{\lambda^n}{G} \right) = \lambda^n \frac{G G_{i,x} - G_x G_i}{G^2} = H G_{i,x} + H_x G_i = D_0(H G_i). \quad (4.11)$$

Итак, в полиномиальном случае вид потенциала U определяется первым слагаемым в формуле (4.1) и, если степень m полинома $K(\lambda)$ превосходит степень $2n$ многочлена $G^2(\lambda)$ на 1 или 2, то

$$\frac{K(\lambda)}{4G^2} = \begin{cases} \lambda + 2h_1 + c_1 + \dots, \\ \lambda^2 + \lambda(2h_1 + c_1) + h_1^2 + 2h_2 + 2c_1 h_1 + c_2 + \dots, \end{cases}$$

соответственно. Так как остальные члены в формуле (4.1) обращаются в нуль при $\lambda = \infty$, то в последнем случае при $m = 2n + 2$ получаем

$$U = \lambda^2 + u_1\lambda + u_2, \quad u_1 = 2h_1 + c_1, \quad u_2 = h_1^2 + 2h_2 + 2c_1h_1 + c_2.$$

Аналогично в случае $m = 2n + 1$

$$U = \lambda + u(x), \quad u(x) = c_1 + 2h_1 = 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) - \sum_{i=1}^{2n+1} e_i, \quad (4.12)$$

где e_i , $i = 1, 2, \dots$, обозначают $2n + 1$ нуль многочлена $K(\lambda)$. Как известно [6], в вещественном случае для регулярности потенциала на всей оси необходимо и достаточно, чтобы начальные условия для γ_i лежали в запрещенных зонах спектра:

$$e_1 < e_2 < g_1 < e_3 < \dots < e_{2n} < \gamma_n < e_{2n+1}.$$

Если, например, в дополнение к полюсу порядка $m = 2n + 1$ на бесконечности функция $K(\lambda)$ имеет полюс первого порядка в точке $\lambda = 0$, то формула (4.1) определяет потенциал в виде

$$U = \lambda + u + \frac{v}{\lambda} = \lambda + 2h_1 + c_1 + \frac{1}{\lambda} \left(h_1^2 + 2h_2 - \frac{1}{2} h_{1,xx} \right). \quad (4.13)$$

В этом случае близкую к изложенной выше схему построения частных решений можно найти в работе [7] (см. также работу [4]).

Дополнительные возможности классификации полиномиальных решений $G(\lambda)$ возникают, если заметить, что отображение (4.1) можно факторизовать. Для этого достаточно ввести промежуточное отображение $G \rightarrow V$, определенное формулой

$$V = \frac{G_x + \kappa(\lambda)}{2G}. \quad (4.14)$$

Тогда в силу формулы (4.4)

$$U = V_x + V^2, \quad K(\lambda) = \kappa^2(\lambda).$$

При этом условие регулярности V эквивалентно в силу формулы (3.11) соотношениям $\kappa_i = -\kappa$, $i = 1, \dots, n$ (ср. с условиями (4.5)). Как и в случае (4.1), условие регулярности гарантирует, что если $\kappa(\lambda)$ – многочлен, то V – тоже многочлен. В частности, выбрав в формуле полином $\kappa(\lambda)$ степени $m = n + 1$ мы, аналогично выражению (4.12), находим

$$V = \lambda + v(x), \quad v = -g_1, \quad U = \lambda^2 + 2v\lambda + v^2 + v_x. \quad (4.15)$$

Для иллюстрации многообразия приложений условий регулярности типа (4.5) и теоремы 2 ниже приводится список скалярных уравнений с частными производными, соответствующих уравнениям (3.1) в случаях (4.12) и (4.15). Так как аналитическая структура U и V в нашем случае существенно проще структуры G , естественно переписать уравнения (3.1) в терминах U и V . Для этого достаточно заметить, что

$$G_t = RG_x - GR_x \quad \Rightarrow \quad V_t = \left(RV - \frac{1}{2} R_x \right)_x \quad (4.16)$$

и аналогично

$$G_t = RG_x - GR_x \Leftrightarrow f_t = \left(Rf - \frac{1}{2}R_x \right)_x \Rightarrow U_t = 2UR_x + U_xR - \frac{1}{2}R_{xx}. \quad (4.17)$$

ПРИМЕР 2. Выбрав $R = G_1 = \lambda + g_1$, очевидным образом получаем в случае (4.15), (4.16) уравнение Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x = [(\lambda + g_1)(\lambda + v) - g_{1,x}]_x, \quad (4.18)$$

а в случае (4.12), (4.17) – уравнение КдФ

$$4u_t = u_{xxx} - 6uu_x + \varepsilon u_x. \quad (4.19)$$

С другой стороны, используя в (4.17) уравнение для f , нетрудно получить модифицированное уравнение КдФ. Действительно, второе из уравнений (4.17) при $R = G_1 = \lambda + g_1$ дает

$$D_1(f) = D_x \left(\lambda f + f g_1 - \frac{1}{2} g_{1,x} \right), \quad f_x + f^2 = U = \lambda - 2g_1 + c_1.$$

Выразив g_1 через f и подставив в первое из рассматриваемых уравнений, мы получаем

$$4f_t = D_x(f_{xx} - 2f^3 + 6\lambda f) + \varepsilon f_x. \quad (4.20)$$

Связь между решениями уравнений (4.19), (4.20) задает зависящее от λ преобразование Миуры $u = f_x + f^2 + \lambda$.

Наконец, как мы сейчас покажем, исходная система уравнений (3.2) приводит в случае $U = \lambda + u$ прямо к sh-уравнению

$$\varphi_{x\tau} = \frac{1}{2}k_1 e^{-\varphi} - 2e^\varphi, \quad e^\varphi = G(0), \quad k_1 = \frac{dK}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad K(0) = 0. \quad (4.21)$$

Действительно, из (3.2), (4.1) мы имеем соответственно

$$g_\tau = \langle \tilde{g}, g \rangle = \tilde{g}g_x - g\tilde{g}_x, \quad 4(\lambda + u)G^2 = K(\lambda) - G_x^2 + 2G_{xx}G, \quad (4.22)$$

где введены обозначения

$$g = G(0), \quad \tilde{g} = \frac{dG}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}.$$

Продифференцировав по λ второе из уравнений (4.22) и исключив после этого u , находим

$$2g^2 - \frac{1}{2}k_1 + k_0 \frac{\tilde{g}}{g} + \langle \tilde{g}, g \rangle_x - (\ln g)_x \langle \tilde{g}, g \rangle = 0, \quad k_0 \stackrel{\text{def}}{=} K(0).$$

Полагая $k_0 = 0$ и заменяя $\langle \tilde{g}, g \rangle$ на g_τ , находим после очевидных преобразований, что последнее уравнение сводится к (4.21).

В заключение мы рассмотрим кратко приложения уравнения (1.1) к вопросу об интегрируемости уравнений (4.17), (4.16) типа рассмотренных в примере 2 при замене полиномиальных решений решениями $G(\lambda)$ вида (2.1). Заметив, что при возрастании степени полиномов $G(\lambda)$ решения, соответствующие степени n , автоматически остаются решениями системы (3.1) при замене n на $n+1$, естественно рассчитывать, что многие формулы предыдущего раздела, включая (4.4)–(4.17), остаются справедливыми и в общем случае (2.1). Что это действительно так, следует из сравнения уравнений (3.1) и (2.6) при замене $G(\lambda) \rightarrow A(\lambda)$, где

$$A = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} a_j = 1 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \dots \quad (4.23)$$

Основное отличие рассматриваемых уравнений

$$D_n A(\lambda) = \langle A_n(\lambda), A(\lambda) \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.24)$$

относительно коэффициентов ряда (4.23) от соответствующих уравнений (3.1) заключается в возникающей здесь проблеме замыкания бесконечной цепочки уравнений вида (2.8)¹⁾. Проблема, возникающим в связи с заменой условий регулярности условиями обрыва рядов

$$U = \lambda^m + \sum_{j \geq 1} \lambda^{m-j} u_j, \quad V = \lambda^{m'} + \sum_{j \geq 1} \lambda^{m'-j} v_j, \quad (4.25)$$

полученных из (4.23) в результате отображений (4.1) и (4.14), посвящен цикл работ [1]. Там же можно найти интересные примеры нестандартных замыканий уравнений (4.24).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнение Риккати

Чтобы установить связь отображения (4.1) и формулы (4.4) с производной Шварца и уравнением Риккати, докажем следующее элементарное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ П.2. Пусть ψ_1, ψ_2 – два линейно независимых решения уравнения второго порядка $\psi_{xx} = U\psi$. Тогда функции

$$A_1 = \psi_1^2, \quad A_2 = \psi_2^2, \quad A_3 = \psi_1 \psi_2$$

образуют базис пространства решений уравнения третьего порядка (ср. с уравнением (4.2))

$$A_{xxx} = 4U A_x + 2U_x A.$$

Более того, функция $\varphi = \psi_1/\psi_2$ удовлетворяет уравнению Шварца

$$\frac{3\varphi_{xx}^2}{4\varphi_x^2} - \frac{\varphi_{xxx}}{2\varphi_x} = U(x), \quad (П.1)$$

¹⁾С алгебраической точки зрения вопрос о замыкании этих систем сводится, по-видимому, к выделению соответствующих подалгебр алгебры (2.5).

а функция $A = \psi_1 \psi_2$ – уравнению

$$4U(x)A^2 + A_x^2 - 2AA_{xx} = w^2, \quad (\text{П.2})$$

где w – вронскиан $w = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \psi_1 \psi_{2,x} - \psi_{1,x} \psi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим вронскиан функций A_1, A_2, A_3 :

$$W = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle = (\psi_1 \psi_{2,x} - \psi_2 \psi_{1,x})^3 = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle^3.$$

Следовательно, $W = \text{const} \neq 0$, и функции A_i линейно независимы. Введя обозначения

$$\varphi = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad f_j = \frac{\psi_{j,x}}{\psi_j},$$

нетрудно получить, что

$$\varphi_x = \frac{\langle \psi_2, \psi_1 \rangle}{\psi_2^2} = \frac{w}{\psi_2^2}, \quad \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} = -2 \frac{\psi_{2x}}{\psi_2} = -2f_2$$

и, таким образом, уравнение (П.1) является следствием уравнения Риккати $f_{2,x} + f_2^2 = U$.

Далее, нетрудно проверить, что

$$\frac{w}{A_3} = f_2 - f_1, \quad \frac{A_{3,x}}{A_3} = f_2 + f_1,$$

откуда следует, что

$$f_1 = \frac{A_{3,x} - w}{2A_3}, \quad f_2 = \frac{A_{3,x} + w}{2A_3}.$$

Подстановка этих выражений для f_j в уравнение Риккати приводит к уравнению (П.2) с $A = A_3$, и последующее дифференцирование по x дает уравнение (4.2). Аналогично доказывается, что A_1, A_2 также удовлетворяют уравнению (4.2); в этих случаях $w = 0$ в (П.2).

Записав уравнение (П.2) в виде

$$4U + \frac{A_x^2}{A^2} - \frac{2A_{xx}}{A} = \frac{w^2}{A^2}$$

и обозначив $H = 1/A$, находим, что

$$U = \frac{3H_x^2}{4H^2} - \frac{H_{xx}}{2H} + w^2 H^2. \quad (\text{П.3})$$

Сравнив это уравнение с уравнением Шварца (П.1), обнаруживаем немедленно, что оно отвечает частному случаю (П.3) с $w = 0$ и $H = \varphi_x$.

Таким образом, мы видим, что замена

$$F \stackrel{\text{def}}{=} f_1 - f_2 = \frac{w}{G}, \quad \frac{3F_x^2}{4F^2} - \frac{F_{xx}}{2F} + \frac{F^2}{4} = U$$

действительно дает уравнение (4.1), использованное для определения отображения $G \rightarrow U$ (см. раздел 4). Учитывая очевидную связь формулы (П.3) с производной Шварца, можно сказать, что этот переход от G к U сводится, в определенном смысле, к вычислению производной Шварца от $F = G^{-1}$.

Переходя к *прямой задаче* о построении G по заданному априори потенциалу U , мы будем считать, что потенциал задан формальным рядом (4.25):

$$U = \lambda^m + \sum_{j \geq 1} \lambda^{m-j} u_j, \quad m > 0.$$

Оказывается, что на уровне формальных рядов типа (4.23) исчезают проблемы, возникающие при попытке явно решить уравнение Риккати. Чтобы не загромождать изложение, мы ограничимся частным случаем $m = 2$.

ЛЕММА. *Уравнение Риккати с потенциалом вида*

$$U(x, k) = \lambda^2 + \lambda u_1(x) + u_2(x) + \lambda^{-1} u_3 + \dots \quad (\text{П.4})$$

имеет ровно два решения $f = f^\pm$ в виде формальных степенных рядов по λ :

$$f^+ = \lambda + \frac{1}{2} u_1 + f_1^+ \lambda^{-1} + \dots, \quad f^- = -\lambda - \frac{1}{2} u_1 + f_1^- \lambda^{-1} + \dots. \quad (\text{П.5})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя ряд $f = \sum_{j=j_0}^{\infty} \lambda^{-j} f_j$ в уравнение $f_x + f^2 = U(x, \lambda)$ и собирая коэффициенты при степенях λ , получаем $(f_{-1}^\pm)^2 = 1$, $j_0 = -1$ и формулы для коэффициентов $f_{\pm 0}$. Последующие коэффициенты f_j^+ и f_j^- вычисляются по рекуррентным формулам

$$2f_{j+1}^+ + f_{j,x}^+ + \sum_{j'+j''=j} f_{j'}^+ f_{j''}^+ = u_j, \quad 2f_{j+1}^- = f_{j,x}^- + \sum_{j'+j''=j} f_{j'}^- f_{j''}^- - u_j, \quad j > 1.$$

Следовательно, коэффициенты рядов $f_j^\pm$ являются корректно определенными дифференциальными полиномами от u_j .

Важно, что коэффициенты $f_j^\pm$ построенных в лемме степенных рядов (П.5) определены однозначно и явно выражаются через коэффициенты потенциала $U = U(x, k)$ и его производных по x .

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Совместные тройки уравнений

Уравнение (1.3) представляет собой пример совместной тройки вида

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= f(u, u_{\xi}, u_{\eta}, u_x, u_{x\xi}, u_{x\eta}), \\ u_{\xi\zeta} &= g(u, u_{\xi}, u_{\zeta}, u_x, u_{x\xi}, u_{x\zeta}), \\ u_{\eta\zeta} &= h(u, u_{\eta}, u_{\zeta}, u_x, u_{x\eta}, u_{x\zeta}), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

здесь и далее $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (\xi, \eta, \zeta)$. Более симметричный пример дает тройка

$$(\mu_j - \mu_i) u_x u_{\tau_i \tau_j} - \mu_j u_{\tau_i} u_{x \tau_j} + \mu_i u_{\tau_j} u_{x \tau_i} = 0, \quad (\text{П.7})$$

в которой переменная x фактически равноправна с остальными. Отметим, что это уравнение инвариантно относительно замен $u = a(\tilde{u})$, $x = b(\tilde{x})$, $\tau_i = c_i(\tilde{\tau}_i)$ с произвольными функциями, что дает частное решение $u = a(b(x)c(\tau_i)d(\tau_j))$.

Уравнения (1.3) и (П.7) тесно связаны. Действительно, (П.7) получается из (1.3) при исключении производных $u_{x\tau_i}$ и выборе одного из τ_i в качестве нового x . Кроме того, уравнение (П.7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{u_{\tau_i}}{\mu_i u_x} \right)_{\tau_j} = \left(\frac{u_{\tau_j}}{\mu_j u_x} \right)_{\tau_i},$$

и подстановка $v_{\tau_i} = u_{\tau_i}/(\mu_i u_x)$ снова приводит к уравнению (1.3):

$$(\mu_i^{-1} - \mu_j^{-1})v_{\tau_i\tau_j} = v_{\tau_i}v_{x\tau_j} - v_{\tau_j}v_{x\tau_i}.$$

Классификация совместных систем вида (П.6) представляется преждевременной задачей, пока не поняты как следует методы их интегрирования. Тем не менее несложный предварительный анализ показывает, что класс таких систем может быть довольно богатым. Допустим, что правые части квазилинейны и не содержат u явно. Тогда имеется семейство совместных троек, определенное следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ П.3. Пусть $(X, \tilde{X})$, $(A, \tilde{A})$, $(B, \tilde{B})$, $(C, \tilde{C})$ – решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$X' = k_1 X^2 + k_2 X \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2, \quad \tilde{X}' = k_4 X^2 + k_5 X \tilde{X} + k_6 \tilde{X}^2, \quad (\text{П.8})$$

причем следующие функции не равны тождественно нулю:

$$\begin{aligned} a(u_\eta, u_\zeta) &= B(u_\eta)\tilde{C}(u_\zeta) - \tilde{B}(u_\eta)C(u_\zeta), & p(u_\xi, u_x) &= A(u_\xi)\tilde{X}(u_x) - \tilde{A}(u_\xi)X(u_x), \\ b(u_\zeta, u_\xi) &= C(u_\zeta)\tilde{A}(u_\xi) - \tilde{C}(u_\zeta)A(u_\xi), & q(u_\eta, u_x) &= B(u_\eta)\tilde{X}(u_x) - \tilde{B}(u_\eta)X(u_x), \\ c(u_\xi, u_\eta) &= A(u_\xi)\tilde{B}(u_\eta) - \tilde{A}(u_\xi)B(u_\eta), & r(u_\zeta, u_x) &= C(u_\zeta)\tilde{X}(u_x) - \tilde{C}(u_\zeta)X(u_x). \end{aligned}$$

Тогда совместны следующие уравнения:

$$\begin{aligned} c(u_\xi, u_\eta)u_{\xi\eta} &= p(u_\xi, u_x)u_{x\xi} - q(u_\eta, u_x)u_{x\eta}, \\ a(u_\eta, u_\zeta)u_{\eta\zeta} &= q(u_\eta, u_x)u_{x\eta} - r(u_\zeta, u_x)u_{x\zeta}, \\ b(u_\zeta, u_\xi)u_{\zeta\xi} &= r(u_\zeta, u_x)u_{x\zeta} - p(u_\xi, u_x)u_{x\xi}. \end{aligned}$$

Линейные преобразования приводят второе уравнение системы (П.8) к виду $\tilde{X}' = kX\tilde{X}$ или $\tilde{X}' = k\tilde{X}^2$, после чего нетрудно показать, что решение находится в элементарных функциях. В частности, система (П.7) отвечает функциям $A_i = \mu_i/u_{\tau_i}$, $\tilde{A}_i = 1/u_{\tau_i}$, $X = \delta/u_x$, $\tilde{X} = 1/u_x$, которые решают систему $X' = -X\tilde{X}$, $\tilde{X}' = -\tilde{X}^2$. Здесь одной из постоянных интегрирования можно пренебречь, не теряя общности, тогда как вторая играет роль параметра в получающейся системе. В примерах

$$\begin{aligned} (u_{\tau_i} - u_{\tau_j})u_{\tau_i\tau_j} + (u_{\tau_j} - u_x)u_{x\tau_j} + (u_x - u_{\tau_i})u_{x\tau_i} &= 0, \\ u_{\tau_i\tau_j} &= \frac{u_{x\tau_i} - u_{x\tau_j}}{e^{u_{\tau_i}} - e^{u_{\tau_j}}} \end{aligned}$$

обе постоянных интегрирования, по-видимому, несущественны.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00403, 06-01-92051-КЭ_а).

Список литературы

- [1] L. Martínez Alonso, A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **300**:1 (2002), 58–64; *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:2 (2003), 229–242; Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229; A. B. Shabat, L. Martínez Alonso, “On the prolongation of a hierarchy of hydrodynamic chains”, *New Trends in Integrability and Partial Solvability* (Cadiz, Spain, 2002), NATO Sci. Ser. II. Math. Phys. Chem., **132**, eds. A. B. Shabat et al., Kluwer, Dordrecht, 2004, 263–280.
- [2] Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 35–43; E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, S. P. Tsarev, *Commun. Math. Phys.*, **261**:1 (2006), 225–243.
- [3] E. V. Ferapontov, *Phys. Lett. A*, **158**:3–4 (1991), 112–118.
- [4] A. B. Shabat, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**: Suppl. 1 (2005), 614–624.
- [5] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат, *ДАН СССР*, **244**:1 (1979), 57–61.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] A. Hone, V. S. Novikov, C. Verhoeven, *Inverse Problems*, **22**:6 (2006), 2001–2020.

Поступила в редакцию 29.01.2007