Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Широков, Координаты Дарбу на K -орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 3, 407–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:43:54

© 2000 г.

И. В. Широков*

КООРДИНАТЫ ДАРБУ НА K -ОРБИТАХ И СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ КАЗИМИРА НА ГРУППАХ ЛИ

Предложен алгоритм получения спектров операторов Казимира (Лапласа) на группе Ли. Доказано, что существование нормальной поляризации для линейного функционала на алгебре Ли является необходимым и достаточным условием для линейного по “импульсам” перехода к локальным каноническим координатам Дарбу (p, q) на орбите коприсоединенного представления. Показано, что λ -представление алгебры Ли, которое используется, в частности, в методах интегрирования дифференциальных уравнений, есть результат квантования скобки Пуассона на коалгебре Ли в канонических координатах.

ВВЕДЕНИЕ

Метод орбит, открытый в пионерских работах Кириллова [1, 2] (см. также [3, 4]), является универсальной базой для проведения гармонического анализа на однородных пространствах и построения на этой основе новых методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Предварительный вариант этой программы приведен в работе [5].

Основным результатом настоящей статьи является алгоритм получения методами линейной алгебры спектров операторов Казимира (Лапласа) на группе Ли по известным структурным константам и информации о компактности определенных подгрупп. Показано, что существование нормальной поляризации для линейного функционала λ – необходимое и достаточное условие для линейного по “импульсам” перехода к локальным каноническим координатам Дарбу (p, q) на K -орбите O_λ . (Автором разработана компьютерная программа в системе аналитических вычислений “Maple-V”, строящая по заданному функционалу и его нормальной поляризации канонические координаты Дарбу.) Последующее “квантование” приводит к понятию λ -представления алгебры Ли – сопоставление K -орбите специального представления алгебры Ли дифференциальными операторами. Впервые λ -представление появилось в методе некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [6] как “квантовый” аналог метода некоммутативного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем Ми-

* Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: shirokov@univer.omsk.su

щенко и Фоменко [7]. Операторы λ -представления присутствуют также неявным образом как генераторы неприводимых представлений групп Ли.

1. ОПИСАНИЕ K -ОРБИТ

Пусть G – вещественная связная n -мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли. Действие присоединенного представления Ad^* группы Ли на дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$ расщепляет последнее на четномерные орбиты (K -орбиты). Максимальная размерность K -орбит равна $n - r$, где число r называется *индексом* ($\text{ind } \mathcal{G}$) алгебры Ли и определяется как размерность аннулятора ковектора общего положения. Будем говорить, что линейный функционал (ковектор) λ имеет *степень вырождения* s , если он принадлежит K -орбите O_λ размерности $\dim O_\lambda = n - r - 2s$ ($s = 0, \dots, (n - r)/2$).

Разложим пространство $\mathcal{G}^*$ в сумму непересекающихся инвариантных алгебраических поверхностей M_s , состоящих из K -орбит одинаковой размерности. Это можно сделать следующим образом. Обозначим через f_i координаты ковектора f в дуальном базисе: $f = f_i e^i$, $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$ (здесь $\{e_j\}$ – базис алгебры $\mathcal{G}$). Векторные поля на $\mathcal{G}^*$

$$Y_i(f) \equiv C_{ij}(f) \frac{\partial}{\partial f_j}, \quad C_{ij}(f) \equiv C_{ij}^k f_k,$$

являются генераторами группы преобразований G , действующей на пространстве $\mathcal{G}^*$, и поэтому их линейная оболочка образует касательное пространство $T_f O_\lambda$ к орбите O_λ , содержащей точку f . Таким образом, размерность орбиты O_λ определяется рангом матрицы C_{ij} :

$$\dim O_\lambda = \text{rank } C_{ij}(\lambda).$$

Нетрудно проверить, что ранг матрицы C_{ij} постоянен на орбите. Таким образом, приравнявая к нулю соответствующие миноры матрицы $C_{ij}(f)$ и “не разрешая” обращаться в нуль минорам меньшего порядка, мы получим полиномиальные уравнения, определяющие поверхности M_s :

$$M_0 = \{f \in \mathcal{G}^* \mid \neg(F^1(f) = 0)\},$$

$$M_s = \{f \in \mathcal{G}^* \mid F^s(f) = 0, \neg(F^{s+1}(f) = 0)\}, \quad s = 1, \dots, \frac{n-r}{2} - 1,$$

$$M_{\frac{n-r}{2}} = \{f \in \mathcal{G}^* \mid F^{\frac{n-r}{2}}(f) = 0\}.$$

Здесь через $F^s(f)$ обозначена совокупность всех миноров матрицы $C_{ij}(f)$ размера $n - r - 2s + 2$, условие $F^s(f) = 0$ означает, что все миноры матрицы $C_{ij}(f)$ размера $n - r - 2s + 2$ в точке f обращаются в нуль; $\neg(F^s(f) = 0)$ означает, что в точке f соответствующие миноры не обращаются в нуль одновременно.

Пространства M_s можно также определить как множество точек f , в которых все поливекторы степени $n - r - 2s + 1$ вида $Y_{i_1}(f) \wedge \dots \wedge Y_{i_{n-r-2s+1}}(f)$ обращаются в нуль, но не все поливекторы степени $n - r - 2s - 1$ равны нулю.

Отметим, что в общем случае поверхность M_s состоит из нескольких непересекающихся инвариантных компонент, которые мы будем различать буквенными индексами

$M_s = M_{sa} \cup M_{sb} \dots$ (Чтобы каждый раз отдельно не оговаривать случай, когда пространство M_s несвязно, примем следующее соглашение: число s в круглых скобках (s) будет обозначать конкретный тип для орбиты со степенью вырождения s .) Каждая компонента $M_{(s)}$ определяется своим набором однородных полиномов $F_\alpha^{(s)}(f)$, удовлетворяющих условиям

$$Y_i F_\alpha^{(s)}(f) \Big|_{F^{(s)}(f)=0} = 0. \quad (1.1)$$

Инвариантные алгебраические поверхности $M_{(s)}$ не являются линейными пространствами, но тем не менее являются звездными множествами, т.е. если $f \in M_{(s)}$, то $tf \in M_{(s)}$, $t \in \mathbb{R}^1$.

ПРИМЕР 1 (Группа Пуанкаре $P^{1,3}$). Группа Пуанкаре $P^{1,3} = T^4 \rtimes SO(1, 3)$ является группой движений пространства Минковского и представляет собой полупрямое произведение полупростой группы вращений Лоренца $SO(1, 3)$ и четырехмерной коммутативной группы сдвигов T^4 . Коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}^{1,3} = \{e_{ab}, e_a\}$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} [e_{ab}, e_{cd}] &= g_{ad}e_{bc} - g_{ac}e_{bd} + g_{bc}e_{ad} - g_{bd}e_{ac}, & [e_a, e_{bc}] &= g_{ab}e_c - g_{ac}e_b, \\ [e_a, e_b] &= 0, \quad a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, & g_{ab} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

В этом примере $n = 10$, $r = 2$. Обозначая через $\{l_{ab}, p_a\}$ координаты ковектора f в дуальном базисе, приведем явный вид поверхностей $M_{(s)}$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{1,3})^* &= M_0 \cup M_{1a} \cup M_{1b} \cup M_2 \cup M_4, \\ M_0 &= \{f \in \mathbb{R}^{10} \mid \neg(W_a p_b - W_b p_a = 0)\}, \quad \dim M_0 = 10, \\ M_{1a} &= \{f \in \mathbb{R}^{10} \mid W_a = 0, \neg(p_a = 0)\}, \quad \dim M_{1a} = 7, \\ M_{1b} &= \{f \in \mathbb{R}^{10} \mid W_a p_0 = W_0 p_a, \neg(W_a = 0)\}, \quad \dim M_{1b} = 7, \\ M_2 &= \{f \in \mathbb{R}^{10} \mid p_a = 0, \neg(f = 0)\}, \quad \dim M_2 = 6, \\ M_3 &= \emptyset, \quad M_4 = \{f = 0\}, \quad \dim M_4 = 0. \end{aligned}$$

(Здесь введено обозначение $W^a \equiv (1/2)\varepsilon^{abcd}l_{bc}p_d$, а поднятие и опускание индекса осуществляется с помощью диагональной матрицы g_{ab} .) Отметим, что в силу тождества $W^a p_a = 0$ из четырех функций W^a лишь три являются независимыми.

На дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$ определена вырожденная линейная скобка Пуассона

$$\{\varphi, \psi\}(f) \equiv \langle f, [\nabla\varphi(f), \nabla\psi(f)] \rangle, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*). \quad (1.2)$$

Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K_\mu^{(s)}(f)$ называются *функциями Казимира (s) -типа*, если они коммутируют с любой функцией на $M_{(s)}$.

Функции Казимира (s) -типа находятся из уравнений

$$C_{ij}(f) \frac{\partial K_\mu^{(s)}(f)}{\partial f_j} \Big|_{f \in M_{(s)}} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Очевидно, что число $r_{(s)}$ независимых функций Казимира (s) -типа связано с размерностью пространства $M_{(s)}$: $r_{(s)} = \dim M_{(s)} + 2s + r - n$. Так как пространства $M_{(s)}$ звездные, то без потери общности можно считать, что функции Казимира $K_{\mu}^{(s)}(f)$ однородны:

$$\frac{\partial K_{\mu}^{(s)}(f)}{\partial f_i} f_i = m_{\mu}^{(s)} K_{\mu}^{(s)}(f) \iff K_{\mu}^{(s)}(tf) = t^{m_{\mu}^{(s)}} K_{\mu}^{(s)}(f), \quad \mu = 1, \dots, r_{(s)}.$$

В общем случае функции Казимира являются многозначными (например, если пространство орбит $\mathcal{G}^*/G$ не полутделимо, то функции Казимира бесконечнозначные). В дальнейшем под функцией Казимира мы будем понимать некоторую фиксированную ветвь многозначной функции $K_{\mu}^{(s)}$. При этом функции Казимира $K_{\mu}^{(s)}$ в общем случае будут лишь локальными инвариантами коприсоединенного представления, т.е. равенство $K_{\mu}^{(s)}(Ad_g^* f) = K_{\mu}^{(s)}(f)$ имеет место для элементов g , принадлежащих некоторой окрестности единицы группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Не вдаваясь в детали, отметим, что пространства $M_{(s)}$ являются критическими поверхностями для некоторых полиномиальных функций Казимира типа $(s-1)$. Это замечание дает простой и конструктивный способ построения функций $F^{(s)}$.

Обозначим через $\Omega^{(s)} \subset R^{r_{(s)}}$ множество значений отображения $K^{(s)}: M_{(s)} \rightarrow R^{r_{(s)}}$ и введем локально-инвариантное подмножество $O_{\omega}^{(s)}$ — поверхность уровня

$$O_{\omega}^{(s)} = \{f \in M_{(s)} \mid K_{\mu}^{(s)}(f) = \omega_{\mu}^{(s)}, \quad \mu = 1, \dots, r_{(s)}; \quad \omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}\}.$$

Размерность множества $O_{\omega}^{(s)}$ совпадает с размерностью орбиты $O_{\lambda} \in M_{(s)}$, где $\omega^{(s)} = K^{(s)}(\lambda)$. Если функции Казимира однозначны, то пространство орбит отделимо и в этом случае множество $O_{\omega}^{(s)}$ состоит из счетного (как правило, конечного) числа орбит, вследствие этого поверхность уровня мы будем называть *классом орбит*.

Таким образом, пространство $\mathcal{G}^*$ состоит из объединения связных инвариантных непересекающихся алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, которые, в свою очередь, представляют собой объединение классов орбит $O_{\omega}^{(s)}$:

$$\mathcal{G}^* = \bigcup_{(s)} M_{(s)} = \bigcup_{(s)} \bigcup_{\omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}} O_{\omega}^{(s)}. \quad (1.4)$$

ПРИМЕР 2 (Группа Пуанкаре $P^{1,3}$, продолжение примера 1). Приведем для этого случая разложение (1.4) ($\Delta_{1,3} \equiv p_a p^a$):

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{1,3})^* &= \left(\bigcup_{\omega \in R^2} O_{\omega}^0 \right) \cup \left(\bigcup_{\omega \in R^1} O_{\omega}^{1a} \right) \cup \left(\bigcup_{\omega \in R^1 \setminus \{0\}} O_{\omega}^{1b} \right) \cup \left(\bigcup_{\omega \in R^2} O_{\omega}^2 \right) \cup \{0\}, \\ O_{\omega}^0 &= \{f \in M_0 \mid W^a W_a = \omega_1^0, \quad \Delta_{1,3} = \omega_2^0\}, \quad \Omega^0 = R^2, \\ O_{\omega}^{1a} &= \{f \in M_{1a} \mid \Delta_{1,3} = \omega_1^{1a}\}, \quad \Omega^{1a} = R^1, \\ O_{\omega}^{1b} &= \left\{ f \in M_{1b} \mid \frac{W_0}{p_0} = \omega_1^{1b} \right\}, \quad \Omega^{1b} = R^1 \setminus \{0\}, \\ O_{\omega}^2 &= \{f \in M_2 \mid l_{ab} l^{ab} = \omega_1^2, \quad \varepsilon^{abcd} l_{ab} l_{cd} = \omega_2^2\}, \quad \Omega^2 = R^2. \end{aligned}$$

В этом примере каждый класс состоит из нескольких K -орбит (от одной до четырех в зависимости от знаков параметров $\omega^{(s)}$).

Рассмотрим фактор-пространство $B_{(s)} = M_{(s)}/G$, точками которого являются орбиты $O_\lambda \in M_{(s)}$. Очевидно, что $\dim B_{(s)} = r_{(s)}$. Введем локальные координаты j на $B_{(s)}$. Для этого параметризуем (s) -ковектор $\lambda \in M_{(s)}$ вещественными параметрами $j = (j_1, \dots, j_{r_{(s)}})$, полагая, что λ зависит от j линейным образом (это можно сделать в силу звездности поверхности $M_{(s)}$):

$$\lambda = \lambda(j),$$

причем

$$F_\alpha^{(s)}(\lambda(j)) \equiv 0, \quad K_\mu^{(s)}(\lambda(j)) = \omega_\mu^{(s)}(j), \quad \det \frac{\partial \omega_\mu^{(s)}(j)}{\partial j_\nu} \neq 0.$$

Иначе говоря, $\lambda(j)$ – локальное сечение расслоения $M_{(s)} \rightarrow B_{(s)}$. Определим прообраз $\Theta_{(s)} \equiv (\omega^{(s)})^{-1}(\Omega^{(s)}) \subset R^{(s)}$ и дискретную группу $\Gamma^{(s)}$ преобразований множества $\Theta_{(s)}$: $j \rightarrow \hat{j}$ так, что $\omega_\mu^{(s)}(\hat{j}) = \omega_\mu^{(s)}(j)$. Тогда каждой точке j из области $J^{(s)} \equiv \Theta_{(s)}/\Gamma^{(s)} \subset R^{r_{(s)}}$ соответствует один класс $O_\omega^{(s)}$.

Простейшие примеры показывают, что глобальной параметризации на всем пространстве $M_{(s)}$ в общем случае не существует, т.е. многообразие $B_{(s)}$ не покрывается одной картой. В этом случае определим атлас карт на $B_{(s)}$ и введем параметризацию на соответствующих связных инвариантных непересекающихся подмножествах $M_{(s)}^A, M_{(s)}^B, \dots$, имеющих в $M_{(s)}$ ненулевую меру, следующим образом:

$$M_{(s)} = M_{(s)}^A \cup M_{(s)}^B \cup \dots \quad (1.5)$$

При этом соответствующие области значений $J^A, J^B, \dots$ параметров j удовлетворяют соотношению $\Omega^{(s)} = \omega^{(s)}(J^A) \cup \omega^{(s)}(J^B) \cup \dots$.

Ниже будет показано, что каждому пространству $M_{(s)}^A$ соответствует свой тип спектра операторов Казимира на группе Ли. Поэтому мы можем говорить, что разложение (1.5) – это разложение по *спектральному типу* и (s) -орбита O_λ принадлежит спектральному типу A , если $O_\lambda \in M_{(s)}^A$. Проиллюстрируем разложение (1.5) на простом примере.

ПРИМЕР 3 (Группа $SO(2, 1)$). В этом случае $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_2, e_3] = 2e_1$, $[e_3, e_1] = e_3$. Разложение (1.4) имеет вид

$$O_\omega^0 = \{f_1^2 + f_2 f_3 = \omega, \neg(f = 0)\}, \quad O^1 = \{f = 0\}.$$

При $\omega > 0$ класс O_ω^0 состоит из двух орбит. Для невырожденных орбит $\Omega = R^1$. Единой параметризации в этом случае не существует. Действительно, самый общий вид параметризации $\lambda(j) = (a_1 j, a_2 j, a_3 j)$ (здесь a_i – некоторые числа) приводит к равенству $\omega(j) = a j^2$, где $a = a_1^2 + a_2 a_3$, и поэтому (в зависимости от знака числа a) $\omega(j)$

всегда либо больше нуля, либо меньше, либо равно нулю, т.е. $\omega(R^1) \neq \Omega$. Введем два спектральных типа:

$$\begin{aligned} \text{тип А: } \lambda(j) &= (0, j, j), \quad J^A = [0, \infty), \quad O_{\omega(j)}^{0A} = \{f_1^2 + f_2 f_3 = j^2, f \neq 0\}, \\ \text{тип В: } \lambda(j) &= (0, j, -j), \quad J^B = (0, \infty), \quad O_{\omega(j)}^{0B} = \{f_1^2 + f_2 f_3 = -j^2, f \neq 0\}. \end{aligned}$$

Позже мы вернемся к этому примеру и покажем, что тип А соответствует непрерывному, а тип В – дискретному спектрам оператора Лапласа (Казимира) на группе $SO(2, 1)$.

Полученная выше классификация K -орбит позволяет более детально описать структуру аннулятора $\mathcal{G}_\lambda$ произвольного, в общем случае вырожденного, ковектора λ .

Пусть λ – некоторый ковектор (s) -типа. Из определения аннулятора следует $\dim \mathcal{G}_\lambda = \text{corank } C_{ij}(\lambda) = \text{codim } O_\lambda = 2s + r$.

Можно проверить, что функции $\Phi_a^{(s)}(f) = (F_\alpha^{(s)}(f), K_\mu^{(s)}(f))$ ($a = 1, \dots, 2s + r$) коммутируют между собой относительно скобки Пуассона следующим образом:

$$\begin{aligned} \{F_\alpha^{(s)}, F_\beta^{(s)}\}(f) &= C_{\alpha\beta}^\gamma(f) F_\gamma^{(s)}(f), \\ \{F_\alpha^{(s)}, K_\mu^{(s)}\}(f) &= C_{\alpha\mu}^\beta(f) F_\beta^{(s)}(f), \\ \{K_\mu^{(s)}, K_\nu^{(s)}\}(f) &= C_{\mu\nu}^\alpha(f) F_\alpha^{(s)}(f). \end{aligned}$$

Из независимости функций $\Phi_a^{(s)}(f)$, а также определения пространства $M_{(s)}$ следует, что градиенты $\nabla \Phi^{(s)}(\lambda)$ линейно независимы и составляют базис $(2s + r)$ -мерной алгебры Ли $\mathcal{G}_\lambda$ с коммутационными соотношениями (для краткости записи мы индекс (s) опускаем):

$$\begin{aligned} [\nabla F_\alpha(\lambda), \nabla F_\beta(\lambda)] &= C_{\alpha\beta}^\gamma(\lambda) \nabla F_\gamma(\lambda), \\ [\nabla F_\alpha(\lambda), \nabla K_\mu(\lambda)] &= C_{\alpha\mu}^\beta(\lambda) \nabla F_\beta(\lambda), \\ [\nabla K_\mu(\lambda), \nabla K_\nu(\lambda)] &= C_{\mu\nu}^\alpha(\lambda) \nabla F_\alpha(\lambda). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из коммутационных соотношений (1.6) следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Аннулятор $\mathcal{G}_\lambda$ произвольного (s) -ковектора λ содержит идеал $\mathcal{N}_\lambda = \{\nabla F_\alpha^{(s)}(\lambda)\}$, а фактор-алгебра $\mathcal{K}_\lambda = \mathcal{G}_\lambda / \mathcal{N}_\lambda = \{\nabla K_\mu^{(s)}(\lambda) + \mathcal{N}_\lambda\}$ коммутативна и $r_{(s)}$ -мерна.*

Замкнутые подгруппы группы G с алгебрами Ли $\mathcal{G}_\lambda$, $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{K}_\lambda$ мы будем обозначать соответственно через G_λ , N_λ и $K_\lambda = G_\lambda / N_\lambda$.

2. КООРДИНАТЫ ДАРБУ, λ -ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР ЛИ

Обозначим через ω_λ форму Кириллова, которая определяет на орбите O_λ симплектическую структуру и на касательных векторах a, b к орбите действует следующим образом:

$$\omega_\lambda(a, b) = \langle \lambda, [\alpha, \beta] \rangle, \quad \text{где } a = ad_\alpha^* \lambda, \quad b = ad_\beta^* \lambda.$$

Ограничение скобки Пуассона (1.2) на орбиту совпадает со скобкой Пуассона, порожденной симплектической формой ω_λ . Согласно известной теореме Дарбу на орбите O_λ существуют локальные канонические координаты (координаты Дарбу), в которых форма ω_λ имеет вид

$$\omega_\lambda = dp_a \wedge dq^a, \quad a = 1, \dots, \frac{1}{2} \dim O_\lambda = \frac{n-r}{2} - s,$$

где s – степень вырождения орбиты.

Пусть λ – некоторый ковектор (s) -типа и $f \in O_\lambda$. Нетрудно видеть, что переход к каноническим координатам Дарбу $(f_i) \rightarrow (p_a, q^a)$ состоит в построении аналитических функций $f_i = f_i(q, p, \lambda)$ от переменных (p, q) , удовлетворяющих следующим условиям:

$$f_i(0, 0, \lambda) = \lambda_i, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f_i(q, p, \lambda)}{\partial p_a} \frac{\partial f_j(q, p, \lambda)}{\partial q^a} - \frac{\partial f_j(q, p, \lambda)}{\partial p_a} \frac{\partial f_i(q, p, \lambda)}{\partial q^a} = C_{ij}^k f_k(q, p, \lambda), \quad (2.2)$$

$$F_\alpha^{(s)}(f(q, p, \lambda)) = 0, \quad K_\mu^{(s)}(f(q, p, \lambda)) = K_\mu^{(s)}(\lambda). \quad (2.3)$$

Потребуем, чтобы переход к каноническим координатам (или иначе qp -переход) был линейным по переменным p_a :

$$f_i(q, p, \lambda) = \alpha_i^a(q) p_a + \chi_i(q, \lambda), \quad \text{rank } \alpha_i^a(q) = \frac{1}{2} \dim O_\lambda. \quad (2.4)$$

Конечно, в общем случае перехода (2.4) не существует, но если допустить, что $\alpha_i^a(q)$ и $\chi_i(q, \lambda)$ являются голоморфными функциями от комплексных переменных q , то тем самым мы значительно расширим класс алгебр Ли и K -орбит, для которых этот переход существует. (Считаем, что функционалы из $\mathcal{G}^*$ продолжаются на $\mathcal{G}^c$ по линейности.) По-видимому, для произвольной алгебры Ли и любой ее невырожденной орбиты переход (2.4) существует.

ТЕОРЕМА 1. *Линейный переход к каноническим координатам на орбите O_λ существует тогда и только тогда, когда для линейного функционала λ существует нормальная, в общем случае комплексная, поляризация, т.е. подалгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^c$ такая, что*

$$\dim \mathcal{H} = n - \frac{1}{2} \dim O_\lambda, \quad \langle \lambda, [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \rangle = 0, \quad \lambda + \mathcal{H}^\perp \subset O_\lambda.$$

Прежде чем переходить к обсуждению и доказательству этой теоремы, сделаем отступление, имеющее, на наш взгляд, и самостоятельную ценность.

Пусть $X_i(x) = X_i^a(x) \partial_{x^a}$ – генераторы группы преобразований, образующие n -мерную алгебру Ли $\mathcal{G}$ векторных полей на однородном пространстве $M = G/H$: $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ (здесь и далее x^a ($a = 1, \dots, m = \dim M$) – локальные координаты точки $x \in M$); H – группа изотропии отмеченной точки x_0 , $\mathcal{H}$ – ее алгебра Ли. Неоднородные операторы первого порядка $\tilde{X}_i = X_i + \chi_i(x)$ будем называть *продолжением* генераторов

X_i , если они по-прежнему удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $\mathcal{G}$ ($\chi_i(x)$ – гладкие функции на M).

По определению n -компонентная функция $\chi(x)$ находится из системы уравнений

$$X_i^a(x) \frac{\partial \chi_j(x)}{\partial x^a} - X_j^a(x) \frac{\partial \chi_i(x)}{\partial x^a} = C_{ij}^k \chi_k(x). \quad (2.5)$$

Решения этой системы составляют линейное пространство, в котором можно выделить модуль тривиальных решений вида

$$\chi^0 = \left\{ \chi_i^0(x) = X_i^a(x) \frac{\partial S(x)}{\partial x^a} \right\},$$

где $S(x)$ – произвольная гладкая функция. Построение тривиальных продолжений $\tilde{X}_i = e^{-S} X_i e^S$ эквивалентно “калибровочному” преобразованию $\partial_{x^a} \rightarrow \partial_{x^a} + \partial_{x^a} S(x)$. В дальнейшем нас будут интересовать лишь нетривиальные продолжения, образующие фактор-пространство всех решений системы (2.5) по модулю тривиальных решений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пространство нетривиальных продолжений конечномерно и изоморфно фактор-пространству $\mathcal{H}^* / [\mathcal{H}, \mathcal{H}]^*$.*

Здесь мы не будем приводить полного доказательства этого утверждения, однако приведем явный вид всех нетривиальных решений системы (2.5), откуда и будет видна справедливость утверждения 2.

Произведем перенумерацию и замену базиса в алгебре $\mathcal{G}$:

$$X_a(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_{x_0}, \quad a = 1, \dots, m, \quad X_\alpha(x_0) = 0, \quad \alpha = m+1, \dots, n.$$

Будем считать, что действие группы G на M правое. Произвольный элемент $g \in G$ представляется в виде $g = hs(x)$, где $h \in H$, $s(x)$ – гладкое борелевское отображение $M \rightarrow G$, сопоставляющее каждой точке x пространства M правый смежный класс $hs(x) \subset G$. В координатах $g = (h^\alpha, x^a)$ (считаем, что $e = (0, x_0)$) левоинвариантные векторные поля $\xi_i(g)$ имеют вид $\xi_i(g) = X_i^a(x) \partial_{x^a} + \xi_i^\alpha(h, x) \partial_{h^\alpha}$. Прямым вычислением можно проверить, что операторы

$$\tilde{X}_i = X_i + \xi_i^\alpha(0, x) \lambda_\alpha, \quad \lambda \in \mathcal{H}^*, \quad \langle \lambda, [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \rangle = 0,$$

являются нетривиальными продолжениями, и можно показать, что других нетривиальных продолжений не существует.

Изложим теперь основные моменты доказательства теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Распишем подробнее с учетом (2.4) формулу (2.2):

$$\begin{aligned}\alpha_i^a(q)\partial_{q^a}\alpha_j^b(q) - \alpha_j^a(q)\partial_{q^a}\alpha_i^b(q) &= C_{ij}^k\alpha_k^b(q), \\ \alpha_i^a(q)\partial_{q^a}\chi_j(q, \lambda) - \alpha_j^a(q)\partial_{q^a}\chi_i(q, \lambda) &= C_{ij}^k\chi_k(q, \lambda).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Формула (2.6) эквивалентна выражению $[a_i, a_j] = C_{ij}^k a_k$, где $a_i = \alpha_i^a(q)\partial_{q^a}$, и поэтому операторы a_i являются генераторами группы преобразований, действующей в области Q ($Q = G/H$ для вещественной поляризации и $Q = G^c/H$ для комплексной поляризации, здесь H – группа Ли алгебры $\mathcal{H}$). Так как $\text{rank } \alpha_i^a(q) = (1/2) \dim O_\lambda = \dim Q$, справедливо утверждение: если существуют решения системы (2.6), то существует алгебра изотропии $\mathcal{H}$ точки $q = 0$ размерности $n - (1/2) \dim O_\lambda$. Очевидно, что верно и обратное: наличие $n - \dim Q$ -мерной подалгебры $\mathcal{H}$ достаточно для существования решений системы (2.6).

Как следует из утверждения 2, существование решений системы (2.7) с начальными условиями (2.1) (или иначе нетривиальных продолжений операторов a_i) эквивалентно условию подчиненности алгебры $\mathcal{H}$ линейному функционалу λ . Таким образом, существование поляризации $\mathcal{H}$ для ковектора λ является необходимым и достаточным условием для выполнения соотношений (2.1) и (2.2).

Покажем теперь, что свойство нормальности поляризации, или иначе выполнение условия Пуканского $\lambda + \mathcal{H}^\perp \subset O_\lambda$, необходимо и достаточно для выполнения соотношения (2.3).

Обозначим через $\{e_A\}$ базис алгебры изотропии $\mathcal{H}$, $\{e_a\}$ дополнительные базисные векторы в $\mathcal{G}^c$: $e_i = \{e_A, e_a\}$. По определению алгебры изотропии $\alpha_A^a(0) = 0$, тогда $\det \alpha_a^b(0) \neq 0$. Совершая линейную замену координат q и базиса в $\mathcal{G}^c$, без потери общности мы можем считать $\alpha_a^b(0) = \delta_a^b$. В принятых нами обозначениях $\mathcal{H}^\perp = \{(0, p_a)\}$, где p_a – произвольные числа, условие Пуканского принимает вид $(\lambda_A, p_a + \lambda_a) \in O_\lambda$.

Пусть справедливы соотношения (2.3). Положим в (2.3) $q = 0$, тогда

$$\Phi(\lambda_A, \lambda_a) = \Phi(f_A(q, p, \lambda), f_a(q, p, \lambda))\Big|_{q=0} = \Phi(\lambda_A, p_a + \lambda_a).$$

(Напоминаем обозначения: $\Phi = (F^{(s)}, K^{(s)})$.) Из этого равенства следует, что при любом значении величин p_a точка $(\lambda_A, p_a + \lambda_a)$ принадлежит тому же классу орбит, что и точка (λ_A, λ_a) , а т.к. класс орбит состоит из счетного числа K -орбит, то можно утверждать, что указанные выше две точки принадлежат одной орбите.

Обратно, пусть выполнено условие Пуканского, что означает $f(0, p, \lambda) = (\lambda_A, p_a + \lambda_a) \in O_\lambda$ и $\Phi(\lambda_A, p_a + \lambda_a) = \Phi(\lambda_A, \lambda_a)$. Покажем, что тогда имеет место формула (2.3). Поскольку функции $\Phi(f)$ удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.3), имеем

$$\left(\alpha_b^a(q) \frac{\partial \Phi(f(q, p, \lambda))}{\partial q^a} - \frac{\partial f_b(q, p, \lambda)}{\partial q^a} \frac{\partial \Phi(f(q, p, \lambda))}{\partial p_a} \right) \Big|_{q=0} = \frac{\partial \Phi(f(q, p, \lambda))}{\partial q^b} \Big|_{q=0} = 0.$$

Таким образом, $\Phi(f(q, p, \lambda)) = \Phi(f(0, p, \lambda)) = \Phi(\lambda)$. Теорема 1 доказана.

Известно, что для произвольной алгебры Ли и любого невырожденного ковектора существует разрешимая поляризация. С другой стороны, если алгебра $\mathcal{G}$ разрешима, то каждый функционал обладает поляризацией $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^c$.

В классическом методе орбит поляризация появляется как $n - (1/2) \dim O_\lambda$ -мерная подалгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^c$, для которой функционал λ задает ее одномерное представление. В нашем случае нормальная поляризация определяет линейный переход (2.4) к каноническим координатам.

Нетрудно видеть, что замена функционала λ на другой ковектор, принадлежащий той же орбите, приводит к замене поляризации $\mathcal{H}$ на сопряженную $\tilde{\mathcal{H}}$, при этом соответствующие этим двум поляризациям координаты Дарбу связаны точечным преобразованием: $\tilde{q}^a = \tilde{q}^a(q)$, $\tilde{p}_a = (\partial q^b / \partial \tilde{q}^a) p_b$. Таким образом, выбор конкретного представителя на орбите несуществен. Если же поляризации не сопряжены, то соответствующие координаты Дарбу связаны более общим каноническим преобразованием. Если удастся определить “квантовое” каноническое преобразование (где q, p – операторы, см. ниже), то тем самым будет построен сплетающий оператор для двух представлений, полученных методом орбит с участием двух поляризаций.

Наконец, если для данного функционала не существует поляризации, то все равно можно построить переход к координатам Дарбу (нелинейный по переменным p) и определить понятие λ -представления алгебры $\mathcal{G}$ (см. ниже), которое является основой для гармонического анализа на группах Ли и однородных пространствах (применение метода орбит к гармоническому анализу выходит за рамки настоящей статьи и здесь не рассматривается). Иначе говоря, наличие поляризации – полезное свойство, но вовсе не обязательное для применения метода орбит.

Как уже говорилось, функционал λ может иметь несколько различных поляризаций, однако легко проверить, что имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть для данного $\lambda \in \mathcal{G}^*$ существует нормальная поляризация $\mathcal{H}$, тогда $\mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{H}$.

ПРИМЕР 4 (Группа $SO(2, 1)$, продолжение примера 3). Форма Кириллова на невырожденных орбитах имеет вид $\omega_\lambda = df_2 \wedge df_3 / 2f_1$. Для различных спектральных типов получаем:

$$\begin{aligned} \text{тип А: } f_1 &= p, \quad f_2 = e^q(-p + j), \quad f_3 = e^{-q}(p + j), \\ \lambda &= (0, j, j), \quad \mathcal{H} = \{e_2 + e_3, e_1 + e_2\}, \quad (p, q) \in R^2; \\ \text{тип В: } f_1 &= p, \quad f_2 = e^q(-ip + j), \quad f_3 = -e^{-q}(ip + j), \\ \lambda &= (0, j, -j), \quad \mathcal{H} = \{e_2 - e_3, e_1 - ie_2\}. \end{aligned}$$

Чтобы выяснить область определения переменных (p, q) для орбит типа В, разложим комплексную переменную q на вещественную и мнимую компоненты: $q = \alpha + i\beta$. Используя свойство вещественности переменных f_i , получаем

$$p = j \operatorname{tg} \beta, \quad f_1 = j \operatorname{tg} \beta, \quad f_2 = \frac{je^\alpha}{\cos \beta}, \quad f_3 = -\frac{e^{-\alpha}}{\cos \beta},$$

откуда следует, что p – переменная, принимающая любое вещественное значение, q – комплексная переменная, вещественная часть которой принадлежит R^1 , а мнимая S^1 , т.е. $q \approx q + 2\pi i$. Таким образом, функции на K -орбите типа В – это аналитические функции от вещественной переменной p и комплексной переменной q , причем по q эти функции $2\pi i$ -периодичны.

Определим понятие квантования K -орбит. Подобное квантование проводится отдельно для каждого спектрального типа орбит и заключается в сопоставлении спектральному типу орбит специального представления алгебры Ли (λ -представления), а на орбиты при этом накладывается условие *целочисленности*, которому будет посвящен следующий раздел.

Будем рассматривать функции перехода $f_i(q, p, \lambda(j))$ к локальным каноническим координатам как символы операторов. Последние определяются следующим образом: переменные p_a заменяются операторами дифференцирования $p_a \rightarrow \hat{p}_a \equiv -i\hbar \partial / \partial q^a$, тогда координаты ковектора f_i переходят в линейные операторы

$$f_i(q, p, \lambda(j)) \rightarrow \hat{f}_i\left(q, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \lambda(\tilde{j})\right)$$

(здесь $\hbar$ – некоторый вещественный положительный параметр). Разумеется, указанная выше процедура квантования неоднозначна. Эта неоднозначность исчезает, если мы потребуем, чтобы операторы $\hat{f}_i$ удовлетворяли коммутационным соотношениям

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{f}_i, \hat{f}_j] = C_{ij}^k \hat{f}_k. \quad (2.8)$$

Если переход к каноническим координатам линейный, т.е. для орбит этого типа существует нормальная поляризация, то очевидно, что

$$\hat{f}_i = -i\hbar \alpha_i^a(q) \frac{\partial}{\partial q^a} + \chi_i(q, \lambda(\tilde{j}))$$

и соотношение (2.8) полностью эквивалентно условиям (2.6), (2.7).

Произвольной аналитической функции на коалгебре $\varphi(f)$ при квантовании сопоставляется симметризованная операторная функция $\varphi(\hat{f})$ от операторов $\hat{f}_i$. Параметры $\tilde{j}$ связаны с параметрами орбиты j следующим образом: $\tilde{j} = j + i\hbar\beta$, где β является $r_{(s)}$ -мерным вещественным вектором, определяемым из условия вещественности функций

$$\kappa_{\mu}^{(s)}(j) = K_{\mu}^{(s)}(\hat{f}). \quad (2.9)$$

Отметим, что в “классическом” пределе $\hbar \rightarrow 0$ мы имеем $\kappa_{\mu}^{(s)}(j) \rightarrow \omega_{\mu}^{(s)}(j)$ и коммутатор линейных операторов переходит в скобку Пуассона на коалгебре

$$\frac{i}{\hbar} [\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}.$$

Так как функции $\kappa_\mu^{(s)}(j)$ при $\hbar \neq 0$ в общем случае отличаются от функций $\omega_\mu^{(s)}(j)$, то мы должны переопределить области определения $J^{(s)}$ параметров j так, чтобы каждой точке $j \in J^{(s)}$ взаимно однозначно соответствовали бы значения функций $\kappa^{(s)}(j)$, т.е. при ограничении на $J^{(s)}$ функции $(\kappa^{(s)})^{-1}$ были бы однозначны. При этом должно выполняться условие

$$\kappa^{(s)}(J^{(s)}) = \Omega^{(s)}. \quad (2.10)$$

Введем операторы

$$l_k(q, \partial_q, j) \equiv \frac{i}{\hbar} \hat{f}_k(q, \hat{p}, \lambda(\tilde{j})).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} [l_i, l_j] &= C_{ij}^k l_k, \quad F_\alpha^{(s)}(-i\hbar l(q, \partial_q, j)) \equiv 0, \quad K_\mu^{(s)}(-i\hbar l(q, \partial_q, j)) \equiv \kappa_\mu^{(s)}(j), \\ \kappa_\mu^{(s)}(j) &= \overline{\kappa_\mu^{(s)}(j)}, \quad \det \frac{\partial \kappa_\mu^{(s)}(j)}{\partial j_\nu} \neq 0, \quad j \in J, \quad q \in Q. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f_i = f_i(q, p, \lambda(j))$ – переход к каноническим координатам на орбите $O_{\lambda(j)}$, $\lambda(j)$ – параметризованный ковектор. Реализацию алгебры Ли $\mathcal{G}$ соответствующими операторами $l_i(q, \partial_q, j)$ будем называть λ -представлением.

Ниже мы покажем, что величины $\kappa_\mu^0(j)$ образуют спектр операторов Казимира на группе Ли $\hat{K}_\mu \equiv K_\mu(i\hbar\xi(g))$ (здесь $\xi_i(g)$ – левоинвариантные векторные поля на группе G). Соответственно $\kappa_\mu^{(s)}(j)$ – собственные значения операторов Казимира $\hat{K}_\mu^{(s)} \equiv K_\mu^{(s)}(i\hbar X)$ (здесь X_i – генераторы группы преобразований) на однородном пространстве (s) -типа [5].

ПРИМЕР 5 (Группа $SO(2, 1)$, продолжение примера 3)¹⁾.

$$\begin{aligned} \text{Тип А: } \hat{f}_1 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{f}_2 = e^q \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial q} + j + i\hbar\beta \right), \quad \hat{f}_3 = e^{-q} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} + j + i\hbar\beta \right), \\ \kappa(j) &= K(\hat{f}) = \hat{f}_1^2 + \hat{f}_2 \circ \hat{f}_3 = j^2 + \hbar^2\beta(1 - \beta) + i\hbar j(2\beta - 1). \end{aligned}$$

Из условия вещественности $\kappa(j)$ получаем $\beta = 1/2$. Тогда λ -представление спектрального типа А выглядит следующим образом:

$$l_1 = \frac{\partial}{\partial q}, \quad l_2 = e^q \left(-\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{\hbar}j - \frac{1}{2} \right), \quad l_3 = e^{-q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{\hbar}j - \frac{1}{2} \right), \quad \kappa(j) = j^2 + \frac{\hbar^2}{4},$$

причем $j \in J^A = [0, \infty)$, $\Omega^A \equiv \kappa(J^A) = [\hbar^2/4, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Тип В: } \hat{f}_1 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{f}_2 = e^q \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial q} + j + i\hbar\beta \right), \quad \hat{f}_3 = e^{-q} \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial q} - j - i\hbar\beta \right), \\ \kappa(j) &= K(\hat{f}) = \hat{f}_1^2 + \hat{f}_2 \circ \hat{f}_3 = -j^2 + \hbar^2\beta^2 - \hbar j - i\hbar\beta(2j + \hbar). \end{aligned}$$

¹⁾Здесь и ниже знак “ $\circ$ ” означает симметризованное произведение операторов $A \circ B \equiv (AB + BA)/2$.

Из условия вещественности $\kappa(j)$ получаем $\beta = 0$; λ -представление спектрального типа В имеет вид

$$l_1 = \frac{\partial}{\partial q}, \quad l_2 = e^q \left(-i \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{\hbar} j \right), \quad l_3 = e^{-q} \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \frac{i}{\hbar} j \right), \quad \kappa(j) = -j(j + \hbar).$$

Здесь $j \in J^B = [-\hbar/2, \infty)$, $\Omega^B \equiv \kappa(J^B) = (-\infty, \hbar^2/4)$. Условие (2.10) выполняется: $\Omega^A \cup \Omega^B = \Omega = R^1$.

ПРИМЕР 6 (Группа $St(1, R)$). Эта группа приведена Кирилловым в [3, с. 261] в качестве примера, иллюстрирующего отсутствие поляризации для произвольного ковектора. Опишем структуру K -орбит этой группы.

Алгебра Ли этой группы может быть реализована матрицами

$$X(a, \xi, c) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & c \\ 0 & a_1 & a_2 & \xi_2 \\ 0 & a_3 & -a_1 & -\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \xi_1 e_4 + \xi_2 e_5 + c e_6.$$

Базисные элементы e_i имеют следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 2e_2, & [e_1, e_3] &= -2e_3, & [e_1, e_4] &= -e_4, & [e_1, e_5] &= e_5, \\ [e_2, e_3] &= e_1, & [e_2, e_4] &= -e_5, & [e_3, e_5] &= -e_4, & [e_4, e_5] &= 2e_6. \end{aligned}$$

Приведем описание орбит (1.4) для данной группы:

$$\begin{aligned} O_\omega^0 &= \{K_1(f) = \omega_1^0, \quad K_2(f) \equiv f_6 = \omega_2^0, \quad \neg(F^1(f) = 0)\}, \\ O_\omega^{1a} &= \{F_1^{1a}(f) = F_2^{1a}(f) = F_3^{1a}(f) = 0, \quad f_6 = \omega^{1a} \neq 0\}, \\ O_\omega^{1b} &= \left\{ f \neq 0, \quad f_4 = f_5 = f_6 = 0, \quad \frac{f_2 f_3 + f_1^2}{4} = \omega^{1b} \right\}, \\ O^2 &= \{f = 0, \quad K_1(f) \equiv f_1^2 f_6 - f_1 f_4 f_5 + f_4^2 f_2 - f_5^2 f_3 + 4f_2 f_3 f_6\}, \\ F_1^{1a}(f) &\equiv 2f_1 f_6 - f_4 f_5, \quad F_2^{1a}(f) \equiv 4f_2 f_6 - f_5^2, \quad F_3^{1a}(f) \equiv 4f_3 f_6 + f_4^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для вырожденных орбит O_ω^{1a} поляризации не существует. Форма Кириллова на орбитах этого типа выглядит следующим образом: $\omega_\lambda = df_4 \wedge df_5 / 2f_6$. Пространство M_{1a} является пространством одного спектрального типа, и можно ввести глобальные координаты на B_{1a} , т.е. параметризацию $\lambda(j) = (0, 0, 0, 0, j)$. Для этого функционала имеем $\mathcal{G}_\lambda = \{e_1, e_2, e_3, e_6\}$, $\mathcal{N}_\lambda = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{K}_\lambda = \{e_6\}$. Для рассматриваемых орбит вместо линейного перехода (2.4) существует квадратичный по переменным p переход к каноническим координатам

$$f_1 = qp, \quad f_2 = q^2 j, \quad f_3 = -\frac{p^2}{4j}, \quad f_4 = p, \quad f_5 = 2qj, \quad f_6 = j, \quad (p, q) \in R^2.$$

Построим соответствующее λ -представление. Проблемы с упорядочиванием операторов $\hat{p} = -i\hbar \partial_q$ и $\hat{q} = q$ в операторах $\hat{f}_2 = q^2 j$, $\hat{f}_3 = -\hat{p}^2 / 4j$, $\hat{f}_4 = \hat{p}$, $\hat{f}_5 = 2qj$, $\hat{f}_6 = j$ не возникает. Оператор $\hat{f}_1$ однозначно находится из коммутационных соотношений $\hat{f}_1 = q\hat{p} - i\hbar/2$. Итак, λ -представление для орбит этого типа имеет вид

$$l_1 = q\partial_q + \frac{1}{2}, \quad l_2 = \frac{i}{\hbar} q^2 j, \quad l_3 = \frac{i\hbar}{4j} \partial_q^2, \quad l_4 = \partial_q, \quad l_5 = \frac{i}{\hbar} 2qj, \quad l_6 = \frac{i}{\hbar} j, \quad \kappa^{1a}(j) = j \in R^1.$$

3. УСЛОВИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ ОРБИТ. СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ КАЗИМИРА

В этом разделе описан первый этап явного построения гармонического анализа на однородных пространствах. Однако эта сложная тема заслуживает отдельного исследования, и здесь мы ее практически не затрагиваем. В данном разделе мы покажем, что введенные выше функции $\kappa(j)$ являются собственными значениями операторов Казимира, где на параметры j наложены условия целочисленности.

Введем на связной и односвязной вещественной группе Ли G квазиинвариантную меру $dg = \sqrt{d_l g d_r g}$, где $d_l g, d_r g$ – левая и правая меры Хаара соответственно. Определим в пространстве $L_2(G, dg)$ унитарное представление группы $G \times G$:

$$T_{(g_1, g_2)} u(g) = \sqrt{\frac{d(g_1^{-1} g g_2)}{dg}} u(g_1^{-1} g g_2), \quad u(g) \in L_2(G, dg). \quad (3.1)$$

Инфинитезимальными генераторами представления (3.1) являются лево- (ξ_i) и правоинвариантные (η_i) операторы:

$$\xi_i(g) = \xi_i^j(g) \partial_{g^j} + C_i, \quad \eta_i(g) = \eta_i^j(g) \partial_{g^j} + C_i, \quad C_i \equiv -\frac{1}{4} C_{ij}^j.$$

Генераторы ξ_i, η_i отличаются на аддитивные постоянные от соответствующих лево- и правоинвариантных векторных полей на группе G (а в случае унимодулярной группы совпадают с последними), и поэтому мы их также будем называть векторными полями.

Поскольку собственные функции неограниченных операторов с непрерывными спектрами являются не элементами из $L_2(G, dg)$, а лишь линейными функционалами на плотном множестве (ядерном пространстве) $\Phi \subset L_2(G, dg)$, то следует ввести триплет Гельфанда $\Phi \subset L_2(G, dg) \subset \Phi'$, где Φ' – пространство, дуальное к Φ .

Аналогично разложению (1.4) разложим пространство $L_2(G, dg)$ на инвариантные относительно представления (3.1) подпространства $L_2(G, dg) = \bigcup_{(s)} \mathcal{L}_{(s)}$, где

$$\mathcal{L}_{(s)} = \{\varphi(g) \in L_2(G, dg) \mid F_\alpha^{(s)}(\xi) \varphi(g) = 0, \quad \neg(F^{s+1}(\xi) \varphi(g) = 0)\}. \quad (3.2)$$

Отметим, что замена в выражении (3.2) левоинвариантных полей ξ_i на правоинвариантные η_i не меняет пространств $\mathcal{L}_{(s)}$. (Это можно увидеть, например, совершая отображение $g \rightarrow g^{-1}$, при котором левоинвариантные поля переходят в правоинвариантные и наоборот, а мера dg инвариантна.) Для каждого $\mathcal{L}_{(s)}$ также введем триплет Гельфанда $\Phi_{(s)} \subset \mathcal{L}_{(s)} \subset \Phi'_{(s)}$.

На каждом пространстве $\mathcal{L}_{(s)}$ существуют двухсторонне инвариантные операторы Казимира $K_\mu^{(s)}(i\hbar\xi) = K_\mu^{(s)}(-i\hbar\eta)$ и пространство $\mathcal{L}_{(s)}$ разлагается в прямую сумму (интеграл) собственных подпространств операторов Казимира, т.е. имеется полная аналогия с разложением (1.4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda(j)$ – параметризованный (s) -ковектор, тогда величины $\kappa_\mu^{(s)}(j)$ (2.9) являются собственными значениями для операторов Казимира $K_\mu^{(s)}(i\hbar\xi)$ на $\mathcal{L}_{(s)}$, где параметры j удовлетворяют условию

$$\langle \lambda(j), e_\mu \rangle = \frac{2\pi\hbar n_\mu}{T_\mu}, \quad n_\mu \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Здесь e_μ – базисный вектор одномерной алгебры Ли однопараметрической компактной подгруппы коммутативной фактор-группы K_λ , T_μ – период одномерной компактной подгруппы ($\exp(T_\mu e_\mu) = 1$).

Таким образом, для определения спектров операторов Казимира достаточно найти функции $\kappa_\mu^{(s)}(j)$ (эти функции фактически задаются структурными константами и определяют спектр операторов Казимира на универсальной накрывающей группе $\tilde{G}$) и наложить на параметры j условия квантования (3.3). Чуть ниже мы покажем, что условие (3.3) эквивалентно условию целочисленности K -орбит Кириллова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Обсудим основные моменты доказательства. Пусть $\lambda(j)$ – параметризованный (s) -ковектор, $l_i(q, \partial_q, j)$ – соответствующее λ -представление. Определим обобщенные функции $D_q^j(g)$ на группе G уравнениями

$$[\xi_i(g) + l_i(q, \partial_q, j)]D_q^j(g) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Из определения λ -представления (2.11) легко получить

$$F_\alpha^{(s)}(\xi)D_q^j(g) = 0, \quad \text{т.е.} \quad D_q^j(g) \in \Phi'_{(s)}, \quad K_\mu^{(s)}(i\hbar\xi)D_q^j(g) = \kappa_\mu^{(s)}(j)D_q^j(g).$$

Несмотря на то что система (3.4) совместна, функции $D_q^j(g)$ глобально на всей группе существуют не при любых значениях параметров j . Ограничим систему (3.4) на подгруппу G_λ и положим $q = 0$. Тогда с учетом утверждения 1 получим

$$\left[\xi_A(g_\lambda) + \frac{i}{\hbar} \lambda_A(j) \right] D_0^j(g_\lambda) = 0, \quad g_\lambda \in G_\lambda, \quad (3.5)$$

где индекс A нумерует базисные векторы алгебры $\mathcal{G}_\lambda$. Из (3.5) следует, что функции $D_q^j(g)$ определены глобально лишь при выполнении условия

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma \in H_1(G_\lambda)} \omega_{G_\lambda}^j = n_\gamma \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Здесь $\omega_{G_\lambda}^j = \omega^A \lambda_A(j)$ – замкнутая левоинвариантная 1-форма на группе G_λ . (Фактически мы переоткрыли критерий Костанта [8].) Условие (3.6) эквивалентно условию целочисленности орбит Кириллова [3].

С помощью полученных в предыдущих разделах результатов можно представить условие целочисленности (3.6) в более развернутом виде.

Для выбранного параметризованного ковектора $\lambda(j)$ базис левоинвариантных векторных полей алгебры $\mathcal{G}_\lambda$ образован векторами ($\tilde{\lambda} \equiv \lambda(j)$)

$$\begin{aligned}\nabla F_\alpha^{(s)}(g) &\equiv (L_g)_* \nabla F_\alpha^{(s)}(\tilde{\lambda}) = F_\alpha^{(s)i}(\tilde{\lambda}) \xi_i(g), \\ \nabla K_\mu^{(s)}(g) &\equiv (L_g)_* \nabla K_\mu^{(s)}(\tilde{\lambda}) = K_\mu^{(s)i}(\tilde{\lambda}) \xi_i(g),\end{aligned}$$

где

$$F_\alpha^{(s)i}(\tilde{\lambda}) = \left. \frac{\partial F_\alpha^{(s)}(f)}{\partial f_i} \right|_{f=\tilde{\lambda}}, \quad K_\mu^{(s)i}(\tilde{\lambda}) = \left. \frac{\partial K_\mu^{(s)}(f)}{\partial f_i} \right|_{f=\tilde{\lambda}},$$

L_g – левоинвариантное представление группы $G \times G$ на пространстве $L_2(G, dg)$. Перепишем систему (3.5) следующим образом:

$$\nabla F_\alpha^{(s)}(g_\lambda) D_0^j(g_\lambda) = 0, \quad g_\lambda \in G_\lambda, \quad (3.7)$$

$$\left[\nabla K_\mu^{(s)}(g_\lambda) + \frac{i}{\hbar} m_\mu^{(s)} \omega_\mu^{(s)}(\tilde{j}) \right] D_0^j(g_\lambda) = 0, \quad g_\lambda \in G_\lambda. \quad (3.8)$$

Операторы $\nabla F_\alpha^{(s)}$ в формуле (3.7) представляют собой левоинвариантные векторные поля на нормальной подгруппе N_λ , а значит, функция $D_0^j(g_\lambda)$ не зависит от координат элемента n в разложении $g_\lambda = nk$, $n \in N_\lambda$, $k \in K_\lambda$. Аналогично операторы $\nabla K_\mu^{(s)}$ являются левоинвариантными векторными полями на коммутативной группе K_λ , а система (3.8) тем самым представляет собой задачу на собственные значения для $r_{(s)}$ коммутирующих операторов первого порядка. Последняя решается тривиально. Очевидно, что если однопараметрическая подгруппа с генератором $\nabla K_\mu^{(s)}$ некомпактна, то соответствующее собственное число $m_\mu^{(s)} \omega_\mu^{(s)}(\tilde{j})$ может принимать любое значение, т.е. параметры j в этом случае не квантуются. Если выбрать базис, не зависящий от параметров j (а такой базис вследствие однородности функций Казимира всегда существует), то система (3.8) для компактных подгрупп в K_λ примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial k^\mu} + \frac{i}{\hbar} \lambda_\mu(j) \right] D_0^j(k) = 0.$$

Таким образом, условие целочисленности дается формулой (3.3).

Итак, мы показали, что функции $\kappa_\mu^{(s)}(j)$ от целочисленных параметров j принадлежат спектру операторов Казимира на $\mathcal{L}_{(s)}$. Для завершения доказательства необходимо показать, что семейство функций $D_q^j(g)$ плотно в $\Phi'_{(s)}$, что, в свою очередь, означает отсутствие других элементов спектра. Есть все основания считать, что дело обстоит именно так [5], однако обсуждение этого вопроса выводит нас далеко за рамки темы настоящей работы.

ПРИМЕР 7 (Группа $SO(2, 1)$, продолжение примера 3). Для спектрального типа А: $\lambda(j) = (0, j, j)$, $\mathcal{G}_\lambda = \{e_2 + e_3\}$; для спектрального типа В: $\lambda(j) = (0, j, -j)$, $\mathcal{G}_\lambda = \{e_2 - e_3\}$. Таким образом, для выделения целочисленных орбит нам необходимо знать, являются ли соответствующие однопараметрические группы компактными или нет. Очевидно, что для спектрального типа А группа $K_\lambda = \exp[(1/2)t(e_2 + e_3)]$ некомпактна и, таким образом, все орбиты этого типа целочисленны, т.е. параметр j не квантуется; $\kappa(j) = j^2 + \hbar^2/4$, $j \geq 0$. Для спектрального типа В группа $K_\lambda = \exp[(1/2)t(e_2 - e_3)]$ компактна и имеет период $T = 2\pi$. Из формулы (3.3) имеем $\langle \lambda(j), (1/2)(e_2 - e_3) \rangle = j = n\hbar$, откуда $j = n\hbar$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\kappa(j) = -\hbar^2 n(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$.

Список литературы

- [1] А. А. Кириллов. УМН. 1962. Т. 17. № 4. С. 57–110.
- [2] А. А. Кириллов. Функци. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. № 2. С. 40–55; 1969. Т. 3. № 1. С. 36–47.
- [3] А. А. Кириллов. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [4] А. А. Кириллов. Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ. В сб.: Итоги науки и техн. Современ. проблемы математики. Фундам. напр. Т. 22. Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5–162.
- [5] И. В. Широков. K -орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений. Препринт. Омск: ОмГУ, 1998.
- [6] А. В. Шаповалов, И. В. Широков. ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 195–213.
- [7] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Тр. семина. вектор. тензор. анал. 1979. Т. 19. С. 3–94.
- [8] В. Kostant. Quantization and Unitary Representations. I. Prequantization. In: Lectures in Modern Analysis and Applications, III. Ed. C. T. Taam. Berlin: Springer-Verlag, 1970. P. 87–208.

Поступила в редакцию 14.VII.1999 г.