Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ботиров, У. А. Розиков, Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 1, 86–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:00:13

© 2007 г.

Г. И. Ботиров*, У. А. Розиков†

МОДЕЛЬ ПОТТСА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ: КОНТУРНЫЙ МЕТОД

Рассматривается модель Поттса с тремя значениями спина и с конкурирующими взаимодействиями радиуса $r = 2$ на дереве Кэли порядка $k = 2$. Дается полное описание основных состояний этой модели. При помощи контурного метода на дереве доказано, что при достаточно низких температурах эта модель имеет три различных гиббсовские меры.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, контурный метод, основные состояния, мера Гиббса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является продолжением работ [1], [2], посвященных развитию контурного метода на дереве Кэли. Контурный метод на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, имеет общее название теории Пирогова–Синая [3]–[8]. Теория Пирогова–Синая обобщает технику Пайерлса [9], примененную для модели Изинга на $\mathbb{Z}^2$.

В работах [10]–[13] различные модели на дереве Кэли изучены с применением метода марковских случайных полей и рекуррентных уравнений. Этот метод не всегда удобен, и поэтому естественно развитие теории Пирогова–Синая на дереве Кэли.

В работе [1] эта теория развита для q -компонентной модели (с взаимодействиями ближайшего соседа), а в работе [2] – для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями с радиусом взаимодействия $r = 2$. Настоящая работа обобщает результаты работы [2] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями.

Структура работы следующая. В разделе 2 даются основные определения. В разделе 3 описываются все периодические и некоторые непериодические основные состояния рассматриваемой модели. Определение и некоторые свойства контура даны в разделе 4. В разделе 5 с помощью контурного метода доказывается неединственность меры Гиббса.

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: botirovg@yandex.ru

†Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru, rozikovu@mail.ru

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k$ (см. [14]) порядка $k \geq 1$ представляет собой бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин $\mathfrak{Z}^k$, L – его множество ребер, i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и мы пишем $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min \left\{ d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \right. \\ \left. \text{такое, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \right\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, & V_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k свободных произведений $k + 1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

2.2. Пространство конфигурации и модель. Мы рассматриваем модели, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$. *Конфигурация* σ на множестве V тогда определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Предположим, что на Ω действует группа пространственных переходов. Определим *периодическую конфигурацию* F_k как конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $F_k \subset G_k$ конечного индекса, т.е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k$, $y \in F_k$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*. А конфигурация, которая является инвариантной относительно всех переходов, называется *трансляционно-инвариантной*.

Гамильтониан модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y) = 2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2)$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

3. ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Основные состояния для моделей, определенных на $\mathbb{Z}^d$, можно найти, например, в [3], [4], [6], [15], [16].

Для пары конфигураций σ и φ , совпадающих почти всюду, т.е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассматриваем относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$ различия между энергиями конфигураций σ и φ , т.е.

$$H(\sigma, \varphi) = J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y) = 2}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \quad (3)$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ – произвольный фиксированный параметр.

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V . Будем называть сужение конфигурации σ на шар $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b . Определим энергию конфигурации σ_b на шар b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x, y \in b: \\ d(x, y) = 2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (4)$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Легко доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Относительный гамильтониан (3) имеет вид*

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

Рассмотрим случай $k = 2$ и $q = 3$. Легко видеть, что $U(\sigma_b) \in \{U_1, \dots, U_6\}$ для любого σ_b , где

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{2} J_1 + 3 J_2, & U_2 &= J_1 + J_2, & U_3 &= 3 J_2, \\ U_4 &= \frac{1}{2} J_1, & U_5 &= J_2, & U_6 &= \frac{1}{2} J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конфигурация φ называется *основным состоянием* относительного гамильтониана H , если $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, \dots, U_6\}$ для любого $b \in M$.

Обозначим $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ и $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$, если $\sigma_b \in C_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

ТЕОРЕМА 1. А. Для любого класса C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и для любой ограниченной конфигурации $\sigma_b \in C_i$ существует периодическая конфигурация φ (на дереве Кэли) с периодом $p \leq 6$ такая, что $\varphi_{b'} \in C_i$ для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

Б. Для любого $\sigma_b \in C_5$ существует конфигурация φ (вообще говоря, не являющаяся периодической) на дереве Кэли такая, что $\varphi_{b'} \in C_5$ для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Для произвольного класса C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и $\sigma_b \in C_i$ построим конфигурацию φ следующим образом: без ограничения общности мы можем в качестве шара b взять шар с центром $e \in G_2$ (где e – единичный элемент G_2), т.е. $b = \{e, a_1, a_2, a_3\}$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай C_1 . В этом случае мы имеем $\sigma(x) = i$, $i = 1, 2, 3$, для любого $x \in b$. Таким образом, конфигурация φ совпадает с трансляционно-инвариантной, т.е. $\varphi^{(i)} = \{\varphi^{(i)}(x) = i\}$, где $i = 1, 2, 3$.

Случай C_2 . Рассмотрим $H_2 = \{x \in G_2: \omega_2(x) \text{ четно}\}$, где $\omega_2(x)$ – число букв a_2 в слове $x \in G_2$. Отметим (см. [17]), что H_2 – нормальная подгруппа индекса 2 для G_2 . По построению мы имеем $\sigma_b(x) = i$ для любого $x \in b \cap H_2$ и $\sigma(x) = j$ для любого $x \in b \cap (G_2 \setminus H_2)$, где $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Продолжим ограниченную конфигурацию $\sigma_b \in C_i$ на целую решетку $\mathbb{Z}^2$ (которую мы обозначаем $\varphi^{(ij)}$) следующим образом:

$$\varphi^{(ij)}(x) = \begin{cases} i, & x \in H_2, \\ j, & x \in G_2 \setminus H_2, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Случай C_3 . В этом случае рассмотрим $H_3 = \{x \in G_2: |x| \text{ четно}\}$, где $|x|$ – длина слова x . Отметим, что H_3 является также нормальной подгруппой группы G_2 индекса 2. В этом случае конфигурация $\psi^{(ij)}$ может быть определена как

$$\psi^{(ij)}(x) = \begin{cases} i, & x \in H_3, \\ j, & x \in G_2 \setminus H_3, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Таким образом, мы получаем периодическую конфигурацию $\psi^{(ij)}$ с периодом $p = 2$ (равным индексу подгруппы); ясно, что $\psi_b^{(ij)} = \sigma_b$.

Случай C_4 . Пусть S_3 – группа перестановок третьего порядка. Возьмем $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \in S_3$ такие, что

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\pi_0 = \pi_1^2 = \pi_2^2$. Рассмотрим отображение $u: \{a_1, a_2, a_3\} \mapsto \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$:

$$u(a_i) = \begin{cases} \pi_0, & i = 3, \\ \pi_i, & i = 1, 2, \end{cases}$$

и пусть функция $f: G_2 \mapsto S_3$ определена следующим образом:

$$f(x) = f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = u(a_{i_1}) \dots u(a_{i_n}).$$

Заметим (см. [17]), что $H_4 = \{x \in G_2: f(x) = \pi_0\}$ – нормальная подгруппа с индексом 6. Пусть $G_2/H_4 = \{\aleph_0, \dots, \aleph_5\}$ – факторгруппа. В этом случае мы определяем конфигурацию $\varphi^{(ijp)}$ следующим образом:

$$\varphi^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & x \in \aleph_0 \cup \aleph_3, \\ j, & x \in \aleph_1 \cup \aleph_5, \\ p, & x \in \aleph_2 \cup \aleph_4. \end{cases}$$

Таким образом, мы получаем периодическую конфигурацию $\varphi^{(ijp)}$ с периодом $p = 6$, со свойством $\varphi_b^{(ijp)} = \sigma_b$.

Б. Случай C_5 . Для $x \in G_2$ введем обозначения $l(x) = l(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = i_1$, $r(x) = r(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = i_n$. В этом случае $\psi^{(ijp)}$ может быть определена как

$$\psi^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & r(x) = 1, \quad l(x) \neq 3 \quad \text{или} \quad r(x) = 3, \quad l(x) = 3, \\ j, & r(x) = 2, \\ p, & r(x) = 3, \quad l(x) \neq 3 \quad \text{или} \quad r(x) = 1, \quad l(x) = 3, \\ p, & x = e. \end{cases}$$

Легко видеть (см. [2]), что для каждой конфигурации φ мы имеем $\varphi_b \in C_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, для любого $b \in M$.

Для каждого $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ обозначим через A_m множество точек J таких, что

$$A_m(J) = \{J \in \mathbb{R}^2: \min\{U_1(J), U_2(J), \dots, U_6(J)\} = U_m\}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} A_1 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \leq 0\}, \\ A_2 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, -4J_2 \leq J_1 \leq -2J_2\}, \\ A_3 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \\ A_4 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, -2J_2 \leq J_1 \leq 2J_2\}, \\ A_5 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}, \\ A_6 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\text{и } \mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^6 A_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в случае A_6 нет никакого взаимодействия, то мы в дальнейшем не рассматриваем класс C_6 . По этой же причине этот класс также не включен в теорему 1.

Обозначим $B = A_1 \cap A_3$, $B_0 = A_1 \cap A_2$, $B_1 = A_2 \cap A_4$, $B_2 = A_4 \cap A_5$, $B_3 = A_5 \cap A_3$, $\tilde{A}_1 = A_1 \setminus (B \cup B_0)$, $\tilde{A}_2 = A_2 \setminus (B_0 \cup B_1)$, $\tilde{A}_3 = A_3 \setminus (B \cup B_2)$, $\tilde{A}_4 = A_4 \setminus (B_1 \cup B_2)$, $\tilde{A}_5 = A_5 \setminus (B_2 \cup B_3)$. Пусть $GS(H)$ – множество всех основных состояний, а $GS_p(H)$ – множество всех периодических основных состояний.

ТЕОРЕМА 2. А. Если $J = (0, 0)$, то $GS(H) = \Omega$.

Б. 1. Если $J \in \tilde{A}_1$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)}: i = 1, 2, 3\}$.

2. Если $J \in \tilde{A}_2$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(ij)}: i, j = 1, 2, 3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

3. Если $J \in \tilde{A}_3$, то $GS_p(H) = \{\psi^{(ij)}: i, j = 1, 2, 3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

4. Если $J \in \tilde{A}_4$, то $GS_p(H) = \{\varphi^{(ijp)}: i, j, p = 1, 2, 3, i \neq j \neq p\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

5. Если $J \in \tilde{A}_5$, то $GS(H) \supset \{\psi^{(ijp)}: i, j, p = 1, 2, 3, i \neq j \neq p\}$, где для каждого случая конфигурации $\varphi^{(i)}$, $\varphi^{(ij)}$, $\psi^{(ij)}$, $\varphi^{(ijp)}$, $\psi^{(ijp)}$ определены в доказательстве теоремы 1.

В. 1 Если $J \in B_i \setminus \{(0, 0)\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, то $|GS_p(H)| = 6$.

2. Если $J \in B \setminus \{(0, 0)\}$, то $|GS_p(H)| = 6$.

Кроме того, если $J \in \mathbb{R}^2 \setminus B$, то есть по крайней мере счетное множество неперiodических основных состояний.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай А тривиален. В случаях Б и В для данной конфигурации σ_b , которая делает энергию $U(\sigma_b)$ минимальной, с помощью теоремы 1 можно построить периодические конфигурации $\varphi^{(ij)}$, $\varphi^{(ijp)}$ (с периодом $p \leq 6$). Для каждого случая точное число таких основных состояний совпадает с числом различных конфигураций φ_b таких, что энергия $U(\varphi_b)$ минимальна для любого $b \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $GS(H)$ – множество всех возможных основных состояний относительного гамильтониана H . Шар $b \in M$ назовем *вырожденным шаром* конфигурации σ , если $\sigma_b \neq \varphi_b$ для всех $\varphi \in GS(H)$. Множество всех вырожденных шаров конфигурации σ называется *границей конфигурации* и обозначается $\partial(\sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Относительный гамильтониан H с множеством основных состояний $GS(H)$ удовлетворяет условию Пайерлса, если для любого $\varphi \in GS(H)$ и для всех конфигураций σ , совпадающих почти всюду с φ , имеет место

$$H(\sigma, \varphi) \geq \lambda |\partial(\sigma)|,$$

где λ является положительной постоянной, которая не зависит от σ , и $|\partial(\sigma)|$ – число единичных шаров в $\partial(\sigma)$.

Аналогично доказательству теоремы 9 в работе [2] можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если $J \neq (0, 0)$, то условие Пайерлса выполняется.

4. КОНТУРЫ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассмотрим случай $J \in \tilde{A}_1$, т.е. случай, когда только постоянные конфигурации являются основными состояниями гамильтониана.

Пусть $\Lambda \subset V$ – конечное множество, $\Lambda' = V \setminus \Lambda$ и $\omega_\Lambda = \{\omega(x), x \in \Lambda'\}$, $\sigma_\Lambda = \{\sigma(x), x \in V\}$ – данные конфигурации. Энергия конфигурации σ_Λ имеет вид

$$\begin{aligned} H_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega_{\Lambda'}) = & J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in \Lambda}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda, y \in \Lambda'}} \delta_{\sigma(x)\omega(y)} + \\ & + J_2 \sum_{\substack{x, y \in \Lambda: \\ d(x, y) = 2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda': \\ d(x, y) = 2}} \delta_{\sigma(x)\omega(y)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $\omega_{\Lambda'}^{(i)} \equiv i$, $i = 1, \dots, q$, – постоянные конфигурации вне Λ . Для каждой конфигурации σ_Λ внутри Λ доопределим конфигурации ко всему дереву с i -й постоянной конфигурацией и обозначим эту конфигурацию $\sigma_\Lambda^{(i)}$, и пусть $\Omega_\Lambda^{(i)} = \{\sigma_\Lambda^{(i)}\}$.

Рассмотрим V_n и для данной конфигурации $\sigma_\Lambda^{(i)} \in \Omega_\Lambda^{(i)}$, $\Lambda \subset V_n$, обозначим $V_n^{(j)} \equiv V_n^{(j)}(\sigma_\Lambda^{(i)}) = \{t \in V_n: \sigma_\Lambda^{(i)}(t) = j\}$, $j = 1, \dots, q$, $j \neq i$. Пусть $G^{n,j} = (V_n^{(j)}, L_n^{(j)})$ – граф такой, что

$$L_n^{(j)} = \{l = \langle x, y \rangle \in L: x, y \in V_n^{(j)}\}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Очевидно, что для фиксированного n граф $G^{n,j}$ содержит конечное число (равное m) максимальных связанных подграфов $G_r^{n,j}$, т.е.

$$G^{n,j} = \{G_1^{n,j}, \dots, G_m^{n,j}\}, \quad G_r^{n,j} = (V_{n,r}^{(j)}, L_{n,r}^{(j)}), \quad r = 1, \dots, m,$$

где $V_{n,r}^{(j)}$ – множество вершин, $L_{n,r}^{(j)}$ – множество ребер $G_r^{n,j}$.

Число элементов множества A обозначим $|A|$.

Два ребра $l_1, l_2 \in L$, $l_1 \neq l_2$, называются *ближайшими соседними ребрами*, если $|i(l_1) \cap i(l_2)| = 1$, и мы пишем в этой случае $\langle l_1, l_2 \rangle_1$.

Для любого связанного компонента $K \subset \mathfrak{Z}^k$ обозначим через $E(K)$ множество ребер K и

$$b(K) = \{l \in L \setminus E(K): \exists l_1 \in E(K) \text{ такое, что } \langle l, l_1 \rangle_1\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ребро $l = \langle x, y \rangle \in L_{n+1}$ называется *граничным ребром* конфигурации $\sigma_{V_n}^{(i)}$, если $\sigma_{V_n}^{(i)}(x) \neq \sigma_{V_n}^{(i)}(y)$. Множество граничных ребер конфигурации называется *реберной границей* $\Gamma(\sigma_{V_n}^{(i)}) \equiv \Gamma$ этой конфигурации.

Граница Γ состоит из $q(q-1)/2$ частей

$$\Gamma_\epsilon(\sigma_{V_n}^{(i)}) \equiv \Gamma_\epsilon, \quad \epsilon \in \{ij: i < j; i, j = 1, \dots, q\} \equiv Q_q,$$

где, например, Γ_{12} – множество ребер $l = \langle x, y \rangle$ с $\sigma(x) = 1$ и $\sigma(y) = 2$.

Подконтуром границы Γ называются (конечные) множества $b(G_r^{n,j})$, $j = 1, \dots, q$, $j \neq i$; $r = 1, \dots, m$ (для каждого ребра этого набора вместе с информацией о том, какую часть границы Γ_ϵ , $\epsilon \in Q_q$, содержит это ребро).

Множества $V_{n,r}^{(j)}$, $j = 1, \dots, q$, $j \neq i$; $r = 1, \dots, m$, называются *интерьером* $\text{Int } b(G_r^{n,j})$ подконтра $b(G_r^{n,j})$.

Пусть G – граф. Обозначим множество вершин и ребер графа G через $V(G)$ и $E(G)$, соответственно. Для любых двух подконтуров T_1, T_2 расстояние $\text{dist}(T_1, T_2)$ определяем следующим образом:

$$\text{dist}(T_1, T_2) = \min_{\substack{x \in V(T_1) \\ y \in V(T_2)}} d(x, y),$$

где $d(x, y)$ – расстояние между точками $x, y \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Подконтур T_1, T_2 называются *смежными*, если $d(T_1, T_2) \leq 2$. Совокупность подконтуров A называется *связанной*, если для любых двух подконтуров $T_1, T_2 \in A$ существуют подконтур $\tilde{T}_1 = T_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_l = T_2$ в множестве A такие, что для каждого $i = 1, \dots, l-1$ подконтур $\tilde{T}_i$ и $\tilde{T}_{i+1}$ являются смежными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Любой максимальный связанный набор (компонент) подконтуров называется *контуром* границы Γ .

Пусть $\gamma = \{\gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$ – контур границы Γ , γ_r – подконтур. Обозначим

$$\text{Int } \gamma = \bigcup_j \text{Int } \gamma_j, \quad \text{imp } \gamma = \{b \in \partial: b \cap \gamma \neq \emptyset\}, \quad |\gamma| = |\text{imp } \gamma|.$$

Для $A \subset V$ обозначим

$$\begin{aligned} B(A) &= \{b \in M: b \cap A \neq \emptyset\}, \\ D_{\text{int}}(A) &= \{x \in A: \exists \text{ точка } y \in V \setminus A \text{ такая, что } \langle x, y \rangle\}, \\ D(A) &= \{x \in V \setminus A: \exists \text{ точка } y \in A \text{ такая, что } \langle x, y \rangle\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть K – связанный подграф дерева Кэли $\mathfrak{Z}^k$, $k \geq 2$, такой, что $|V(K)| = n$. Тогда:

- 1) $|D(V(K))| = (k-1)n + 2$;
- 2) $|B(V(K))| = kn + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Воспользуемся методом индукции по n . Для $n = 1, 2$ утверждение тривиально. Предположим, что утверждение верно для $n = m$, т.е. из $|V(K)| = m$ следует, что $|D(V(K))| = (k-1)m + 2$. Докажем утверждение для $n = m+1$, т.е. для $\tilde{K} = K \cup \{x\}$. Так как $\tilde{K}$ – связанный граф, то $x \in D(V(K))$ и существует единственная точка $y \in S_1(x) = \{u \in V: d(x, u) = 1\}$ такая, что $y \in V(K)$. Таким образом, $D(V(\tilde{K})) = (D(V(K)) \setminus \{x\}) \cup (S_1(x) \setminus \{y\})$. Следовательно,

$$|D(V(\tilde{K}))| = |D(V(K))| - 1 + k = (k-1)(m+1) + 2.$$

2. Очевидно, что $|B(V(K))| = |V(K)| + |D(V(K))|$. Из этого равенства в силу утверждения 1 леммы мы получим $|B(V(K))| = n + (k-1)n + 2 = kn + 2$.

ЛЕММА 3 [18]. Пусть G – счетный граф с максимальной степенью $k+1$ (т.е. каждая точка $x \in V(G)$ имеет не более $k+1$ соседей), и пусть $\tilde{N}_{n,G}(x)$ – число связанных подграфов $G' \subset G$ с $x \in V(G')$ и $|E(G')| = n$. Тогда

$$\tilde{N}_{n,G}(x) \leq (ke)^n.$$

Для $x \in V$ будем писать $x \in \gamma$, если существует $l \in \gamma$ такое, что $x \in i(l)$ (см. п. 2.1). Обозначим $N_r(x) = |\{\gamma: x \in \gamma, |\gamma| = r\}|$.

ЛЕММА 4. Для любого $k \geq 2$ имеем

$$N_r(x) \leq \alpha^r, \tag{7}$$

где $\alpha = (2ke)^{4k+3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K_γ минимальный связанный подграф дерева $\mathfrak{Z}^k$, который содержит контур $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, где γ_i – подконтур, $m \geq 1$.

В силу леммы 2 имеем

$$|B(\text{Int } \gamma_i)| = k|\text{Int } \gamma_i| + 2 = k\{|D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)| + |\text{Int } \gamma_i \setminus D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)|\} + 2.$$

Используя равенство (см. лемму 2)

$$|\text{Int } \gamma_i \setminus D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)| = \frac{|D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)| - 2}{k - 1},$$

получаем

$$|B(\text{Int } \gamma_i)| = k \frac{k|D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)| - 2}{k - 1} + 2 \leq 2k|D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)|. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$|D_{\text{int}}(\text{Int } \gamma_i)| \leq |\text{imp } \gamma_i| = |\gamma_i|. \quad (9)$$

В силу (9) из (8) имеем

$$|B(\text{Int } \gamma_i)| \leq 2k|\gamma_i|.$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^m |\gamma_i| \leq |\gamma| + m, \quad |B(V(K_\gamma))| \leq \sum_{i=1}^m |B(\text{Int } \gamma_i)| + 2m - 2. \quad (10)$$

С учетом (9) из (10) получим

$$|B(V(K_\gamma))| \leq 2k \sum_{i=1}^m |\gamma_i| + 2m - 2 \leq 2k|\gamma| + 2(k+1)m - 2. \quad (11)$$

Так как γ содержит m подконтуров, то $m \leq |\gamma|$, следовательно, из (11) имеем

$$N_r(x) \leq \sum_{m=1}^r \binom{2kr + 2(k+1)m - 2}{r} \tilde{N}_{2kr + 2(k+1)m - 2, \mathbb{S}^k}(x). \quad (12)$$

В силу леммы 3 и неравенства $\binom{n}{r} \leq 2^{n-1}$ из (12) получим (7).

5. НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ ГИББСА

Функция $Z_\Lambda^{(i)}$ в объеме Λ при граничном условии $\omega_\Lambda^{(i)}$ определяется как

$$Z_\Lambda^{(i)} = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H(\sigma | \omega_\Lambda^{(i)})},$$

где $\beta = 1/T$ – обратная температура. Тогда условная мера Гиббса $\mu_\Lambda^{(i)}$ в объеме Λ при граничном условии $\omega_\Lambda^{(i)}$ определяется следующим образом:

$$\mu_{\Lambda, \beta}^{(i)}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma | \omega_\Lambda^{(i)})}}{Z_\Lambda^{(i)}}, \quad \sigma \in \Omega_\Lambda.$$

Следующая лемма дает контурное представление гамильтониана.

ЛЕММА 5. Гамильтониан $H_n(\sigma_n) = H_{V_n}(\sigma_n \mid \omega_{V_n}^{(1)} \equiv 1)$ (см. (6)) имеет вид

$$H_n(\sigma_n) = \sum_{i=2}^6 (U_i - U_1) |\partial_i| + |M_n| U_1, \quad (13)$$

где $\sigma_n = \sigma_{V_n}^{(1)}$, $\sigma_{n,b} = (\sigma_n)_b$, $|\partial_i| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\{b \in \text{imp } \gamma : \sigma_{n,b} \in C_i\}|$, $M_n = \{b \in M : b \cap V_n \neq \emptyset\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H_n(\sigma_n) = \sum_{b \in M_n} U(\sigma_{n,b}) = \sum_{j=2}^6 U_j |\partial_j| + (|M_n| - |\partial|) U_1.$$

Тогда из равенства $|\partial| = \sum_{j=2}^6 |\partial_j|$ получим (13).

ЛЕММА 6. Пусть $J \in \tilde{A}_1$, γ — фиксированный контур и $P(\gamma) = \mu_{n,\beta}^{(1)}\{\sigma_n : \gamma \in \Gamma(\sigma_n)\}$. Тогда

$$P(\gamma) \leq e^{-\beta \lambda_0 |\gamma|}, \quad (14)$$

где $\lambda_0 = \min\{U \setminus \{U_j : U_j = U^{\min}\}\} - U^{\min}$, $U = \{U_1, \dots, U_6\}$, $U^{\min} = \min\{U_1, \dots, U_6\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Omega_\gamma = \{\sigma_n : \gamma \subset \Gamma(\sigma_n)\}$, $\Omega_\gamma^0 = \{\sigma_n : \gamma \cap \Gamma(\sigma_n) = \emptyset\}$ и определим отображение $\chi_\gamma : \Omega_\gamma \rightarrow \Omega_\gamma^0$ следующим образом:

$$\chi_\gamma(\sigma_n)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \text{Int } \gamma, \\ \sigma_n(x), & x \notin \text{Int } \gamma. \end{cases}$$

Для данного γ отображение χ_γ является взаимно однозначным.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ и $j = 2, \dots, 6$ мы имеем $|\partial_j(\sigma_n)| = |\partial_j(\chi_\gamma(\sigma_n))| + |\gamma_j|$, где $\gamma_j = \{b \in \text{imp } \gamma : \sigma_b \in C_j\}$. Следовательно, в силу леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} P(\gamma) &= \frac{\sum_{\sigma_n \in \Omega_\gamma} \exp\{-\beta \sum_{j=2}^6 (U_j - U_1) |\partial_j(\sigma_n)|\}}{\sum_{\tilde{\sigma}_n} \exp\{-\beta \sum_{j=2}^6 (U_j - U_1) |\partial_j(\tilde{\sigma}_n)|\}} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{\sigma_n \in \Omega_\gamma} \exp\{-\beta \sum_{j=2}^6 (U_j - U_1) |\partial_j(\sigma_n)|\}}{\sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_\gamma} \exp\{-\beta \sum_{j=2}^6 (U_j - U_1) |\partial_j(\chi_\gamma(\tilde{\sigma}_n))|\}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $J \in \tilde{A}_1$, в силу теоремы 2 имеем $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)}, i = 1, 2, 3\}$, следовательно, $U_j - U_1 \geq \lambda_0 > 0 \quad \forall j = 2, 3, \dots, 6$. Таким образом, из (15) получим (14).

ЛЕММА 7. Для любого $k \geq 2$ и для достаточно больших β существуют постоянные $C = C(k, \beta) > 0$ такие, что

$$\mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda : |\gamma| > C \ln |\Lambda| \text{ для некоторых } \gamma \subset \Gamma(\sigma_\Lambda)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\Lambda| \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено условие $\beta > \lambda_0^{-1} \ln \alpha$. Тогда с помощью лемм 4 и 6 получим

$$\mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda, t \in \gamma, |\gamma| = r\} \leq N_r(t)e^{-\beta r \lambda_0} \leq \alpha^r e^{-\beta r \lambda_0},$$

где $\alpha = (2ke)^{4k+3}$,

$$\begin{aligned} \mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda, t \in \gamma, |\gamma| > C_1 \ln |\Lambda|\} &\leq \sum_{r \geq C_1 \ln |\Lambda|} (\alpha e^{-\beta \lambda_0})^r = \\ &= \frac{(\alpha e^{-\beta \lambda_0})^{C_1 \ln |\Lambda|}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}} = \frac{|\Lambda|^{C_1(\ln \alpha - \beta \lambda_0)}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}}, \end{aligned}$$

где константа C_1 будет определена позже. Таким образом, мы имеем

$$\mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda, |\gamma| > C_1 \ln |\Lambda|\} \leq \frac{|\Lambda|^{C_1(\ln \alpha - \beta \lambda_0) + 1}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, если $|\Lambda| \rightarrow \infty$ и $C_1 > 1/(\lambda_0 \beta - \ln \alpha)$.

ЛЕММА 8. Для любого $k \geq 2$ имеет место равномерная по $x \in \Lambda$ сходимост:

$$\mu_\beta^{(1)}\{\sigma(\Lambda): \sigma(x) = j\} \rightarrow 0, \quad j \neq 1, \quad \text{при } \beta \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sigma(x) = j$, то x — точка внутри некоторого контура, мы запишем это в виде $x \in \text{Int}_j \gamma$. Предположим $t \in \gamma$ и $x \in \text{Int}_j \gamma$, тогда $|\gamma| \geq |t| + 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda: x \in \text{Int}_j \gamma, t \in \gamma, |\gamma| < C_1 \ln |\Lambda|\} &\leq \frac{(\alpha e^{-\beta \lambda_0})^{|t|+2}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}}, \\ \mu_\beta^{(1)}\{\sigma(x) = j\} &\leq \mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda: x \in \text{Int}_j \gamma, \gamma \subset \Gamma(\sigma_\Lambda)\} \leq \sum_{|t|=1}^{C_1 \ln |\Lambda|} \frac{(\alpha e^{-\beta \lambda_0})^{|t|+2}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}} + \\ &+ \mu_\beta^{(1)}\{\sigma_\Lambda: \exists \text{ контур } \gamma \subset \Gamma(\sigma_\Lambda) \text{ такой, что } |\gamma| \geq C_1 \ln |\Lambda|\} \leq \\ &\leq \frac{(\alpha e^{-\beta \lambda_0})^3}{(1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0})^2} + \frac{|\Lambda|^{C_1(\ln \alpha - \beta \lambda_0) + 1}}{1 - \alpha e^{-\beta \lambda_0}}. \end{aligned}$$

При $|\Lambda| \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow \infty$ мы получим $\mu_\beta^{(1)}\{\sigma(x) = j\} \rightarrow 0, j \neq 1$.

ТЕОРЕМА 4. Для всех достаточно больших β существуют по крайней мере три меры Гиббса для модели Поттса при $q = 3$ с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что аналог леммы 8 справедлив при $i = 2, 3$, т.е. для $\mu_\beta^{(i)}$. Следовательно, с помощью леммы 8 мы имеем

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_\beta^{(i)}\{\sigma(x) = j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (16)$$

откуда для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, и достаточно больших β получаем

$$\mu_\beta^{(i)}\{\sigma(x) = i\} \neq \mu_\beta^{(j)}\{\sigma(x) = i\}.$$

Теорема доказана.

Благодарности. У. А. Розиков благодарит NATO Reintegration Grant (FEL.RIG. 980771) и Institute des Hautes Etudes Scientifiques (Бюр-сюр-Ивет, Франция) за финансовую поддержку пребывания в IHES в октябре–декабре 2006 г., а также International Center for Theoretical Physics (Триест, Италия) за финансовую поддержку пребывания в ICTP в мае–августе 2006 г. Авторы выражают глубокую признательность профессорам М. Кассандро, М. Концевичу, Ю. Сухову и Ф. Мухамедову за полезную дискуссию.

Список литературы

- [1] U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **71** (2005), 27–38.
- [2] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **122** (2006), 217–235.
- [3] R. Fernández, *Contour ensembles and the description of Gibbsian probability distributions at low temperature*, LMRS/persopage/Fernandez/cont.ps.gz.
- [4] R. A. Minlos, *Introduction to Mathematical Statistical Physics*, Univ. Lecture Ser., **19**, AMS, Providence, RI, 2000.
- [5] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, *ТМФ*, **25**:3 (1975), 358–369; **26**:1 (1976), 61–76.
- [6] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [7] M. Zahradnik, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 559–581.
- [8] M. Zahradnik, *Rend. Mat. Appl.* (7), **18** (1998), 411–486.
- [9] R. Peierls, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **32** (1936), 477–481.
- [10] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *Теория вероят. и ее примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [11] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **114** (2004), 825–848.
- [12] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [13] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Queueing Syst.*, **46** (2004), 197–212.
- [14] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической физике*, Мир, М., 1985.
- [15] W. Holsztynski, J. Slawny, *Commun. Math. Phys.*, **61** (1978), 177–190.
- [16] И. А. Кашапов, *ТМФ*, **33**:1 (1977), 110–118.
- [17] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [18] C. Borgs, *Statistical physics expansion methods in combinatorics and computer science*, <http://research.microsoft.com/~borgs/CBMS.pdf>.

Поступила в редакцию 11.12.2006