Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Басуев, Гамильтониан границы раздела фаз и фазовые переходы первого рода. Обобщение теоремы Ли-Янга, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 1, 98–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:01:09

© 2007 г.

А. Г. Басуев*

ГАМИЛЬТониан ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПЕРВОГО РОДА. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИ–ЯНГА

Проведено обобщение теории Пирогова–Синая, доказаны результаты, применимые при рассмотрении фазовых переходов первого рода как в случае объемных, так и в случае поверхностных фаз решетчатых моделей. Область фазовых переходов первого рода расширяется по активностям до всего комплексного пространства $\mathbb{C}^\Phi$, где Φ – множество фаз модели. Доказано обобщение теоремы Ли–Янга: статистические суммы с устойчивым граничным условием как функции активностей не имеют нулей в $\mathbb{C}^\Phi$.

Ключевые слова: теория Пирогова–Синая, многофазная контурная модель, гамильтониан границы, кластерное разложение гамильтониана границы, контурные уравнения, уравнение состояния, фазовая диаграмма, fc -инвариантность многофазных контурных моделей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Круг работ, в которых построены обобщения теории Пирогова–Синая [1] и при помощи этой теории и ее обобщений получены значимые результаты, достаточно велик, см., например, работы [2]–[14] и [15]–[18]¹⁾. Результаты работы [9] и данной работы, являющейся продолжением [9], применимы к решетчатым моделям с счетным числом фаз, с нефинитным многочастичным взаимодействием, убывающим быстрее некоторой степени, при произвольных комплексных внешних полях. В области фазовых переходов первого рода построены сходящиеся разложения термодинамических и корреляционных функций. Кроме того, в настоящей работе доказана теорема I.4²⁾ (доказательство в случае нефинитного взаимодействия не было опубликовано ранее) и ее обобщение – теорема 1, на которой будет основано изучение поверхностных фаз. Область фазовых переходов первого рода расширена по активностям до $\mathbb{C}^\Phi$, где Φ – множество фаз. Последнее утверждение можно сформулировать следующим образом: статистические суммы с устойчивым граничным

¹⁾ Более полный список работ, опубликованных к началу 90-х гг., см. в [16].

²⁾ Здесь и далее ссылки на работы [9] даются в следующем виде: теорема I.4 означает теорему 4 первой работы из [9], формула (II.30) – это формула (30) второй из работ [9] и т.п.

* Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: Basuev@math.sutd.ru

условием не имеют нулей в области $\operatorname{Re} p_{q_1} < \max \operatorname{Re} p_q$, где p_q – давление фазы q . Ранее было известно [5], [9], что эта область содержит $\mathbb{R}^\Phi$, а также комплексную окрестность каждого страта фазовой диаграммы, сам страт представляет собой комплексное многообразие (см. также [15]). В работе Исакова [19] доказано, что свободная энергия в модели Изинга имеет существенную особенность на единичной окружности в плоскости активностей (см. также [20]). В дальнейшем Фридли и Пфистером в работе [21] результат Исакова был обобщен на двухфазные контурные модели. Можно предполагать, что в многофазном случае в условиях теоремы 4 точки границы области аналитичности являются одновременно точками существенных особенностей давления. В работе [18] исследуются нули статистических сумм с периодическими граничными условиями при помощи теории Пирогова–Синая. Результаты настоящей работы касаются статистических сумм с постоянными граничными условиями³⁾.

Основные результаты настоящей работы формулируются в теоремах 1 и 4 (разделы 2 и 3). Основной шаг доказательства теоремы 1 сформулирован в виде теоремы 3. В работе доказан критерий устойчивости фаз (теорема 2), полезный при анализе фазовых диаграмм. В разделе 4 область фазовых переходов первого рода расширяется по внешним полям до $\mathbb{C}^\Phi$. Доказательство этого факта базируется на теореме 1, а также на тождестве (52) для статистических сумм многофазной контурной модели. Конечно, это не значит, что давление аналитично в $\mathbb{C}^\Phi$. Интересно отметить, что мнимая часть давления, найденного по устойчивому граничному условию, зависит от этого условия, а вещественная часть от него не зависит, в отличие от вещественного случая, где доказана независимость давления от граничного условия [22]–[24]. Равенство мнимых частей давлений для устойчивых граничных условий сужает C^∞ -гладкий страт сосуществования фаз до комплексного многообразия или аналитического множества. Можно полагать, что полученные результаты и, в частности, тождество (52) делают более прозрачной гипотезу Ли–Янга [25] о фазовых переходах, а также улучшают понимание аналитических свойств моделей, по крайней мере, в области фазовых переходов первого рода (см. обсуждение Рюэлем этого вопроса в разделе 5.7 работы [23]).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА И КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗ

Мы рассматриваем в основном решетчатые модели в $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 2$, хотя ясно, что необходимая модификация построений может быть применена также к ряду ситуаций, рассмотренных в других работах, использующих теорию Пирогова–Синая. Нам удобно считать, что многие геометрические объекты, например, поверхность, отделяющая разные спины данной конфигурации, естественно вложены в $\mathbb{R}^\nu$. Приведем определение многофазной контурной модели (“усеченное” определение раздела I.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что определена *многофазная контурная модель*, если задано множество “названий фаз” Φ , химические потенциалы (или внешние поля) h_q , $q \in \Phi$, множество границ γ , гамильтониан границы $H(\vec{\partial})$, $\vec{\partial} \in \gamma$. Кроме того, справедливо следующее.

³⁾В работе [18] содержится достаточно полная библиография по обобщению теоремы Ли–Янга.

1. Каждой границе $\vec{\partial} \in \gamma$ сопоставлено “векторное разбиение” $\mathbb{R}^\nu$ на носитель границы $V_{\vec{\partial}}$ и связные компоненты $\mathbb{R}^\nu \setminus V_{\vec{\partial}}$, каждая из которых “занята” ровно одной фазой $k \in \Phi$. Из всех компонент $\mathbb{R}^\nu \setminus V_{\vec{\partial}}$ лишь одна компонента бесконечна, обозначим ее $V_{\text{ex}}(\vec{\partial})$, положив $V(\vec{\partial}) := \mathbb{R}^\nu \setminus V_{\text{ex}}(\vec{\partial})^4$, фазу бесконечной компоненты обозначим $k_{\text{ex}}(\vec{\partial})$. Множество номеров конечных компонент $\mathbb{R}^\nu \setminus V_{\vec{\partial}}$ будем обозначать как $l(\vec{\partial})$, соответствующие фазы как $k_i(\vec{\partial})$, $i \in l(\vec{\partial})$, объединение всех компонент с данным q будем обозначать $V_q(\vec{\partial})$, множество номеров всех компонент $\mathbb{R}^\nu \setminus V_{\vec{\partial}}$ будем обозначать $\bar{l}(\vec{\partial})$. Среди границ есть границы с пустым носителем, для каждой из которых $\mathbb{R}^\nu$ “занято” фазой q . Множество всех границ, у которых бесконечная компонента занята фазой q , а носитель лежит в V , обозначим $\gamma_q(V)$, $\gamma_q := \gamma_q(\mathbb{Z}^\nu)$.

2. Для каждой границы задано разбиение на “простейшие границы”, называемые контурами, $\vec{\partial} := \bigcup_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} \vec{\Gamma}$, $V_{\vec{\partial}} := \bigcup_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} V_{\vec{\Gamma}}$ так, что типы фаз, примыкающих к носителю контура, те же, что и в границе. Носители разных контуров границы не пересекаются. Множество контуров границы, для каждого из которых носитель $V_{\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}}$ содержится в некоторой компоненте $V_i(\vec{\Gamma})$, обозначим $\min^0 \vec{\partial}$. Множеству контуров $\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}$, $\vec{\Gamma} \in \min^0 \vec{\partial}$, также соответствует ровно одна граница с очевидным образом определенными носителем и соответствующим векторным разбиением $\mathbb{R}^\nu$. Все границы, состоящие из контуров границы $\vec{\partial}$, обозначим как $\gamma(\vec{\partial})$. Ясно, что $\min^0 \vec{\partial} := \{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial} : \vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma} \in \gamma(\vec{\partial})\}$.

3. Статистическая сумма многофазной контурной модели в объеме V с граничным условием q задается следующим образом ($z_q := e^{h_q}$):

$$\Xi_q(V, H) := \sum_{\vec{\partial} \in \gamma_q(V)} z_q^{V \setminus V(\vec{\partial})} e^{-H(\vec{\partial})} \prod_{i \in l(\vec{\partial})} z_{k_i(\vec{\partial})}^{V_i(\vec{\partial})}; \quad (1)$$

для конкретных моделей будем приводить статистическую сумму к виду ($V \subset \Lambda$)

$$\Xi_q^\Lambda(V, H) := \sum_{\vec{\partial} \in \gamma_q(V)} e^{-H_f^\Lambda(\vec{\partial})}, \quad (2)$$

величину $H_f^\Lambda(\vec{\partial})$ назовем полным гамильтонианом границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что для многофазной контурной модели задано *кластерное разложение гамильтониана границы*, если определены функционалы $H_0^\Lambda(\vec{\Gamma})$, а также “многочастичные потенциалы” взаимодействия контуров $W^\Lambda(V | \vec{\partial})$ такие, что

$$H_f^\Lambda(\vec{\partial}) := \sum_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} H_0^\Lambda(\vec{\Gamma}) + \sum_{V: V \cap \Lambda \neq \emptyset} W^\Lambda(V | \vec{\partial}). \quad (3)$$

В дальнейшем $H_0^\Lambda(\vec{\partial}) := \sum_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} H_0^\Lambda(\vec{\Gamma})$. Введем величины

$$h_q^\Lambda(x) := - \sum_{V \ni x} \frac{W^\Lambda(V | q)}{|V \cap \Lambda|}. \quad (4)$$

⁴⁾ В работе будем использовать обозначения $A := B$ или $B =: A$, когда A равно B по определению.

Пусть $W^\Lambda(V|q) = W(V|q)$ при $V \subset \Lambda$ и потенциалы $W(V|q)$ трансляционно-инвариантны. Тогда $h_q^\Lambda(x) \xrightarrow{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} h_q$, где

$$h_q := - \sum_{V \ni 0} \frac{W(V|q)}{|V|}. \quad (5)$$

Из (3)–(5) нетрудно получить, что

$$H_f^\Lambda(\vec{\partial}) = H^\Lambda(\vec{\partial}) + \sum_{x \in \Lambda} h_q^\Lambda(x) - h_q |V(\vec{\partial})| + \sum_{i \in l(\vec{\partial})} h_{k_i} |V_i(\vec{\partial})| + c_q(\Lambda),$$

где q – внешняя фаза границы $\vec{\partial}$,

$$\begin{aligned} H^\Lambda(\vec{\partial}) &:= H_0^\Lambda(\vec{\partial}) + \sum_{V: V \cap \Lambda \neq \emptyset} \left[W^\Lambda(V|\vec{\partial}) - \sum_{q_1} \frac{|V_{q_1}(\vec{\partial}) \cap V \cap \Lambda|}{|V|} W(V|q_1) \right], \\ c_q(\Lambda) &= \sum_{V: V \cap \Lambda \neq \emptyset} \left[W^\Lambda(V|q) - \frac{|V \cap \Lambda|}{|V|} W(V|q) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Как будет ясно из условий теоремы 1, величина $c_q(\Lambda)$ не влияет на термодинамические и корреляционные функции. Статистическую сумму (2) можно теперь записать в виде

$$\Xi_q^\Lambda(V, H) = \sum_{\vec{\partial} \in \gamma_q(V)} z_{q, \Lambda}^V z_q^{-V(\vec{\partial})} e^{-H^\Lambda(\vec{\partial})} \prod_{i \in l(\vec{\partial})} z_{k_i}^{V_i(\vec{\partial})}, \quad (7)$$

где $z_{q, \Lambda}(x) := e^{h_q^\Lambda(x)}$. Предельный гамильтониан границы, от которого зависят предельные статистические суммы (1), имеет вид

$$\begin{aligned} H(\vec{\partial}) &:= H_0(\vec{\partial}) + H_1(\vec{\partial}), \quad H_0(\vec{\partial}) := \sum_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} H_0(\vec{\Gamma}), \quad H_1(\vec{\partial}) := \sum_V W_1(V|\vec{\partial}), \\ W_1(V|\vec{\partial}) &:= W(V|\vec{\partial}) - \sum_q \frac{|V_q(\vec{\partial}) \cap V|}{|V|} W(V|q). \end{aligned} \quad (8)$$

Физические условия, при которых построения для многофазных контурных моделей должны работать, ясны: энергетический барьер между различными невозмущенными фазами на микроуровне достаточно велик ($H_0(\vec{\Gamma})$ пропорционален “длине контура” с относительно большим коэффициентом пропорциональности), и взаимодействие контуров достаточно мало. Точная формулировка несколько длиннее.

Положим $W(\vec{\Gamma}, \vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}) := H(\vec{\partial}) - H(\vec{\Gamma}) - H(\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})$,

$$\begin{aligned} B(\vec{\Gamma}) &:= \text{Re}[-H_1(\vec{\Gamma})] + \max_{\vec{\partial}: \vec{\Gamma} \in \min^0 \vec{\partial}} \text{Re}[-W(\vec{\Gamma}, \vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})], \\ B^{(k)}(\vec{\Gamma}) &:= |H_1^{(k)}(\vec{\Gamma})| + \max_{\vec{\partial}: \vec{\Gamma} \in \min^0 \vec{\partial}} |W^{(k)}(\vec{\Gamma}, \vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})|, \end{aligned} \quad (9)$$

где верхний индекс (k) означает производную по параметрам, k – мультииндекс.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем нам будут необходимы оценки производных термодинамических и некоторых вспомогательных величин. По ряду параметров оценки будут мажорантными; такие оценки допускают дифференцирование неравенств в следующем смысле. Пусть $f(z, t) = \sum_X c_X(t) z^X$ – ряд по положительным степеням z (z, t – векторы) и известен набор функций $\bar{c}_X(t)$ таких, что $|c_X(t)| \leq \bar{c}_X(t)$. Положим $\bar{f}(z, t) := \sum_X \bar{c}_X(t) |z|^X$. Тогда, очевидно, $|f(z, t)| \leq \bar{f}(z, t)$ и $|f_z^{(k)}(z, t)| \leq \bar{f}_{|z|}^{(k)}(z, t)$. При этом мы будем говорить, что мажорантные оценки можно дифференцировать по z . Обозначим $g^{(k)}(t)$ k -ю производную по параметрам t , где k – мультииндекс. Пусть известен набор функций $\bar{c}_X^{(k)}(t)$ такой, что $|c_X^{(k)}(t)| \leq \bar{c}_X^{(k)}(t)$, и $\bar{f}^{(k)}(z, t) := \sum_X \bar{c}_X^{(k)}(t) |z|^X$, тогда по построению $|f^{(k)}(z, t)| \leq \bar{f}^{(k)}(z, t)$. В этом случае также будем говорить, что исходное неравенство $|f| \leq \bar{f}$ допускает формальное дифференцирование, а $\bar{f}^{(k)}$ – формальная производная от $\bar{f}$. Весьма важно, что подобное формальное дифференцирование неравенств “выдерживает” ряд операций: $|(C_1 f + C_2 g)^{(k)}| \leq (|C_1| \bar{f} + |C_2| \bar{g})^{(k)}$; $|(fg)^{(k)}| \leq (\bar{f} \bar{g})^{(k)}$, где правая часть вычисляется по стандартным формулам дифференцирования; $|(f/(1+Cg))^{(k)}| \leq (\bar{f}/(1-|\bar{C}|\bar{g}))^{(k)}$; $|(ef)'| \leq \bar{f}' e^{\text{Re } f} =: (e^{\text{Re } f})'$ и т.п. Использование подобной записи оценок более компактно, а также удобно при получении самих оценок. Особенно это удобно, когда оценка нужных функций является неявной функцией, например, производящей функцией числа “деревьев” типа $\bar{\omega} = zP(\bar{\omega}, t)$, где P – сходящийся ряд с положительными коэффициентами по степеням $\bar{\omega}$. В этом случае оценки $\bar{\omega}$ сводятся к оценкам P . Легко проверить, что для получения оценок производных $\bar{\omega}(z, t)$ необходимо решить систему уравнений на $\bar{\omega}^{(k)}$, получаемую формальным дифференцированием функции $\bar{\omega} = zP(\bar{\omega}, t)$. Стоит отметить, что сначала можно найти оценку первой производной в виде $\bar{\omega}'_t = (z'_t P + z P'_t)/(1 - z P'_t)$, а затем искать оценки старших производных с помощью дифференцирования. Неравенства $zP(\bar{\omega}_0, t) \leq \bar{\omega}_0$ и $zP'_{\bar{\omega}}(\bar{\omega}_0, t) < 1$ для некоторого $\bar{\omega}_0$ обеспечивают конечность всех производных.

Пусть b_q ($q \in \Phi$) – ограниченная последовательность комплексных чисел, для которой существует число $b_{\max}$ такое, что $|b_{\max}| = \sup |b_q|$, при этом для всех q либо $b_q = b_{\max}$, либо $|b_q| < |b_{\max}|$. Пусть $p_{\max} := \ln b_{\max}$, $p_q := \ln b_q$, $\Delta p_q := p_q - p_{\max}$, $b_q^e := b_q/b_{\max}$. Вектор, составленный из p_q , будем обозначать как $\vec{p}$ и называть вектором давлений фаз, p_q – давление фазы q , $p_{\max}$ – давление в многофазной контурной модели (1)⁵.

Ослабленные условия 1–4 на $W(V | \vec{\partial})$ и $H_0(\vec{\Gamma})$ теоремы II.4 (по существу, ослаблено лишь условие 3), которые применимы к рассмотрению поверхностных фаз, выглядят следующим образом.

УСЛОВИЕ 1 (геометрические свойства границы). *Существуют функционалы $|\vec{\Gamma}|$, $h(\vec{\Gamma})$ ⁶, зависящие лишь от размерности пространства и удовлетворяющие неравенствам $|\partial V_{\vec{\Gamma}}| + |V_{\vec{\Gamma}}| \leq |\vec{\Gamma}|$, $h(\vec{\Gamma}) \geq 1$, где $|\partial V_{\vec{\Gamma}}|$ – $(\nu - 1)$ -мерный объем геометрической границы V , $|V_{\vec{\Gamma}}|$ – ν -мерный объем $V_{\vec{\Gamma}}$. Кроме того, для всех V , совпадающих либо с $V(\vec{\Gamma})$, либо с $V_i(\vec{\Gamma})$, $\sum |x_1 - x_2| \leq C_2 l |\partial V|$, если $x_1 \in V$, $x_2 \in \mathbb{Z}^\nu \setminus V$, $|x_1 - x_2| = l$.*

⁵ Ситуация, когда верхняя грань p_q не достигается ни для какого q , не является математической экзотикой, а может иметь простой физический смысл, что будет показано в следующей работе.

⁶ В случае поверхностных фаз контур $\vec{\Gamma}$ может обладать внутренней структурой, и тогда удобно ввести дополнительный геометрический функционал $h(\vec{\Gamma})$.

УСЛОВИЕ 2 (локальность взаимодействия). Пусть $W^\Lambda(V|\vec{\partial}) = W(V|\vec{\partial})$, $H_0^\Lambda(\vec{\Gamma}) = H_0(\vec{\Gamma})$, если $V_{\vec{\Gamma}}, V_{\vec{\partial}} \subset \Lambda$; $W(V|\vec{\partial}) = W(V|\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})$, если $V_{\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}}$ и V принадлежат некоторой связной компоненте $R^\nu \setminus V_{\vec{\Gamma}}$.

УСЛОВИЕ 3 (оценка взаимодействия контуров). Существуют функции $\overline{W}(V)$, удовлетворяющие следующим неравенствам для всех $\vec{\partial}, \vec{\Gamma} \in \min^0 \vec{\partial}$:

$$\max_{\substack{\vec{\partial}_1 \in \gamma: \vec{\partial} \in \gamma(\vec{\partial}_1), \\ \min^0 \vec{\partial} \subset \min^0 \vec{\partial}_1}} \left| \sum_{\vec{\partial}_2 \subset \min^0 \vec{\partial}} (-1)^{|\vec{\partial}_2|} W(V|\vec{\partial}_1 \setminus \vec{\partial}_2) \right| \leq 2^{|\vec{\partial}|} h(\vec{\Gamma}) \overline{W}(V), \quad |V| \geq 2, \quad (10)$$

где $|\vec{\partial}|$ – число контуров в $\vec{\partial}$. Для некоторого $\delta > 0$ конечны величины

$$\overline{W}_{2x}(\delta, \mu) = \sum_x |x| \sum_{V \ni 0, x} (1 + \delta)^{|V|} \overline{W}(V).$$

УСЛОВИЕ 4 (Пайерлса–Пирогова–Синяя). Для всех q справедливо неравенство

$$\psi_{\text{cond}}(\vec{\mathbf{p}}) := \inf_{q, S} \left\{ \sum_{\substack{\vec{\Gamma}: \min_1 V'_q(\vec{\Gamma})=0, \\ |\vec{\Gamma}|=S}} h(\vec{\Gamma}) |\exp\{-H_0(\vec{\Gamma}) - p_{\max}|V_{\vec{\Gamma}}| + \Delta \vec{\mathbf{p}} m_1(\vec{\Gamma}) + B(\vec{\Gamma})\}| \right\}^{1/S} < \infty \quad (11)$$

где $V'_q(\vec{\Gamma}) = V(\vec{\Gamma})$, если $q = k_{\text{ex}}(\vec{\Gamma})$ и равно $V_q(\vec{\Gamma})$ в противоположном случае,

$$\Delta \vec{\mathbf{p}} m_1(\vec{\Gamma}) := \sum_i \Delta p_q |m_1(\partial V_i(\vec{\Gamma}))|, \quad m_1(\partial) = \frac{|\partial|}{(2\nu)}. \quad (12)$$

УСЛОВИЕ 5 (гладкость по параметрам). Найдутся функции $\overline{W}^{(k)}(V)$, $c_k(\mu)$ такие, что при $k < k_0$, $k \neq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_x |x| \sum_{V \ni 0, x} (1 + \delta)^{|V|} \overline{W}^{(k)}(V) &< \infty, \\ \sum_{\substack{\vec{\Gamma}: \min_1 V'_q(\vec{\Gamma})=0, \\ |\vec{\Gamma}|=S}} h(\vec{\Gamma}) |\exp\{-H_0(\vec{\Gamma}) - p_{\max}|V_{\vec{\Gamma}}| + \Delta \vec{\mathbf{p}} m_1(\vec{\Gamma}) + B(\vec{\Gamma})\}|^{(k)} &\leq \\ &\leq c_k(\mu) S^{m(k)} \psi_{\text{cond}}^S, \end{aligned} \quad (13)$$

где $m(k)$ – целое число, а также неравенство, получаемое формальным дифференцированием неравенства (10).

Заметим, что чаще всего условие 5 не налагает дополнительных ограничений. Потенциалы $W(x|q)$ участвуют лишь в условии 4.

Для каждой границы $\vec{\partial} \in \gamma_q$ определим геометрическую границу ∂^q как границу области $V(\vec{\partial})$ ($\partial^q := \partial V(\vec{\partial})$). Пусть для каждого q заданы функционалы $F(\partial^q)$. Введем двухкомпонентные контурные модели с “внешним полем” при помощи статистических сумм (см. подробнее раздел I.4)

$$\Xi_+(V, q) := \sum_{B: V(B) \subset V} (b_q^e)^{V_0(B)} F_q^B, \quad \Xi_-(V, q) = \sum_{B: V(B) \subset V} (b_q^e)^{V \setminus V_0(B)} F_q^B, \quad (14)$$

где B – наборы непересекающихся контуров ∂^q , $V_o(B)$ – часть $V(B)$, охватываемая нечетным числом контуров из B , $F_q^B = \prod F(\partial^q)$, $\partial^q \in B$. Положим

$$\begin{aligned}\varphi_{\partial \cup B}^q &:= b^{V(\partial)} (-b^{V(\Gamma)})^{B \setminus \min B} (b^{-V(\Gamma)} - b^{V(\Gamma)})^{\min B}, \quad b = b_q^e, \\ \sigma_q(V) &:= \frac{\Xi_-(V, q)}{\Xi_+(V, q)} = \sum_{B: V(B) \subset V} F_q^B \varphi_{\partial V \cup B}^q \delta_q(\partial V \cup B), \\ \mathcal{F}(\partial^q) &:= F(\partial^q) \sigma_q(V(\partial^q)).\end{aligned}\tag{15}$$

Введем давление s_q для статсумм (14), а также функции $\delta_q(V)$, $\Delta_q(V)$ и соответствующие кластерные разложения для s_q , $\ln \delta_q(V)$, $\ln \Delta_q(V)$ (см. раздел I.4⁷⁾):

$$\begin{aligned}s_q &:= \lim_{V \uparrow Z^v} \frac{1}{|V|} \ln \Xi_+(V, q) = \sum_{B: \min_1 B=0}^0 \varphi_q^0(B), \\ \delta_q(\partial \cup B) &:= \Xi_+^{-1}(V(\partial), q) \prod_{i \in l(\partial \cup B)} \Xi_+(V_i, q) = \exp \left\{ - \sum_{\substack{B_1 \subset V(\partial), \\ U_0(B, B_1) \neq 0}}^0 \varphi_q^0(B) \right\}, \\ \Delta_q(V) &:= e^{-s_q |V|} \Xi_+(V, q) = \exp \left\{ - \sum_{V(B) \not\subset V}^0 \varphi_q^0(B) \frac{|V \cap V(B)|}{|V(B)|} \right\},\end{aligned}\tag{16}$$

где $\varphi_q^0(B)$ – функция Урселла, построенная по функциям $\mathcal{F}_q^B e^{-U_0(B)}$, $U_0(B)$ – потенциал “твердых сердцевин” контуров B . Для $\vec{\partial} \in \gamma_q$, используя предыдущие функции, введем

$$\Delta(\vec{\partial}) := \Delta_q^{-1}(V(\vec{\partial})) \prod_{i \in l(\vec{\partial})} \Delta_{k_i}(V_i(\vec{\partial})), \quad \sigma(\vec{\partial}) := \prod_{i \in l(\vec{\partial})} \sigma_{k_i}(V_i(\vec{\partial})).$$

Уравнение состояния и контурные уравнения имеют вид (см. раздел I.5)

$$\begin{aligned}p_q &= h_q + s_q(\mathcal{F}_q), \\ F(\partial^q) &= \sum_{\vec{\partial}: \vec{\partial}^{\text{ex}} = \partial^q} b_{\max}^{-V_{\vec{\partial}}} \varphi_{\vec{\partial}} \Delta(\vec{\partial}) \sigma(\vec{\partial}), \\ \sigma_q(V) &= \sum_{B: V(B) \subset V} F_q^B \varphi_{\partial V \cup B}^q \delta_q(\partial V \cup B), \\ \mathcal{F}(\partial^q) &= F(\partial^q) \sigma_q(V(\partial^q)).\end{aligned}\tag{17}$$

Запишем уравнение состояния как отображение $\vec{\mathbf{p}} \rightarrow \vec{\mathbf{h}}$:

$$\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu) := \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{s}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu),\tag{18}$$

а контурные уравнения – в векторной форме

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\Upsilon}(\vec{\mathcal{F}}, \Delta \vec{\mathbf{p}}, e^{-p_{\max} V_{\vec{\partial}}} \varphi_{\vec{\partial}}).\tag{19}$$

⁷⁾Если в статсумме идет суммирование по непересекающимся контурам, то при формальном переразложении логарифма статсуммы и величин типа s_q суммирование ведется по произвольным наборам контуров X , среди которых могут быть и повторяющиеся контуры. Для повторяющихся контуров в соответствующих разложениях необходимо добавить в знаменатель факториалы числа повторяющихся контуров. Сумма $\sum^0$ содержит в себе эти сомножители.

Нам удобно обозначить сужение вектора $\vec{\mathbf{d}}$ на подпространство векторов с номерами компонент из $G \subset \Phi$ как $\vec{\mathbf{d}}|_G$, неравенства на векторы понимать как покомпонентные. Пусть вектор $e^{\vec{\mathbf{d}}}|_G$ имеет компоненты, равные e^{d_q} , $q \in G$. Введем области в $\mathbb{C}$ вида

$$\bar{S}_1(a) = \{b: |b|^2 + a|b - 1| \leq 1\}, \quad a < 1; \quad (20)$$

пусть $S_1(a)$ – множество внутренних точек $\bar{S}_1(a)$. Область $S_1(a)$ содержит комплексную окрестность отрезка $(0, 1)$.

Определим комплексные области

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} := \{(\vec{\mathbf{h}}, \mu): \psi_{\text{cond}}(\vec{\mathbf{h}}) \leq \psi_0, C\psi_0^{2\nu} \bar{W}_{2x}(C\psi_0^{2\nu}, \mu) \leq \psi_1, \\ \bar{W}_{2x}^{(k)}(C\psi_0^{2\nu}, \mu) < \infty, c_k(\mu) < \infty\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathcal{M} := \{\mu: (\vec{\mathbf{h}}(\mu), \mu) \in \mathfrak{S}\}$$

соответствующие вещественные области обозначим как $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}, \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Напомним, что $|V_{\vec{\mathbf{r}}}|$ – это ν -мерный объем носителя контура; для “тонких” контуров, у которых носитель имеет размерность $\nu - 1$, он равен нулю. Следовательно, в этом случае в (21) внешнее поле отсутствует. Вследствие “почти” однородности исходных статсумм относительно растяжения вектора активностей фаз (см. (1), а также раздел I.4) величину $\max \text{Re } h_q$ можно считать равной нулю. Поэтому при общем определении носителя границы в приложениях внешние поля в (21) фактически произвольны.

Определим следующие плоские области в расширенном пространстве параметров:

$$\begin{aligned} \partial_G \wp_0^{\mathbb{C}} := \{(\vec{\mathbf{p}}, \mu): \vec{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^{\Phi}, \vec{\mathbf{p}}|_G = p_{\max} \vec{\mathbf{1}}|_G, e^{\Delta p_q} \in S_1(C\psi_0^{2\nu}) \forall q \in \Phi \setminus G, \\ \psi_{\text{cond}}(\vec{\mathbf{p}}) \leq \psi_0, C\psi_0^{2\nu} \bar{W}_{2x}(C\psi_0^{2\nu}, \mu) \leq \psi_1, \\ \bar{W}_{2x}^{(k)}(C\psi_0^{2\nu}, \mu) < \infty, c_k(\mu) < \infty\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\wp_0^{\mathbb{C}} := \bigcup_{G \subset \Phi} \partial_G \wp_0^{\mathbb{C}},$$

где C – константа, зависящая лишь от ν . Заметим, что вещественная часть $\wp_0^{\mathbb{C}}$ содержит $\mathbb{R}^{\Phi} \times \mathcal{M} \subset \wp_0^{\mathbb{C}}$ (вещественные давления произвольны), если вместо (11) мы введем определение

$$\psi_{\text{cond}}(\vec{\mathbf{p}}) := \inf_{q, S} \left\{ \sum_{\substack{\vec{\mathbf{r}}: \min_q V'_q(\vec{\mathbf{r}}) = 0, \\ |\vec{\mathbf{r}}| = S}} h(\vec{\mathbf{r}}) |e^{-H_0(\vec{\mathbf{r}}) - p_{\max} |V_{\vec{\mathbf{r}}}| + B(\vec{\mathbf{r}})}| \right\}^{1/S}. \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1–5 при замене $W(V | \vec{\mathbf{d}})$ и $H_0(\vec{\mathbf{r}})$ на $W^{\Lambda}(V | \vec{\mathbf{d}})$ и $H_0^{\Lambda}(\vec{\mathbf{r}})$, начиная с некоторого Λ при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$. Тогда существуют малые константы ψ_0, ψ_1 такие, что области $\wp_0^{\mathbb{C}}, \mathfrak{S}_0^{\mathbb{C}} := \vec{\mathbf{h}}(\wp_0^{\mathbb{C}}), \mathcal{M}_0 := \{\mu \in \mathcal{M}: \vec{\mathbf{h}}(\mu) \in \mathfrak{S}_0^{\mathbb{C}}\}$ являются областями фазовых переходов первого рода (в этих областях по определению выполнены теоремы I.4–I.7). В частности, верны следующие утверждения.

1. Контурные уравнения имеют решения в области $\wp_0^{\mathbb{C}}$, и в этой области определено непрерывное отображение $\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu)$. При использовании определения (23) под область $\wp_0^{\mathbb{C}}$ содержит $\mathbb{R}^{\Phi} \times \mathcal{M}$, и в ней вектор давлений произволен.

2. Решение контурных уравнений и функция $\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu)$ разлагаются в сходящиеся (равномерно по $\vec{\mathbf{p}}$) ряды по степеням $\varphi_{\vec{\mathbf{d}}}$ в $\wp_0^{\mathbb{C}}$; эти функции являются гладкими (аналитическими) в каждом страте $\partial_G \wp_0^{\mathbb{C}}$, если гладки (аналитичны) в области $\mathcal{M}$ величины $W(V | \vec{\mathbf{d}})$ и $e^{-H_0(\vec{\mathbf{r}})}$. Значения производных продолжаются до непрерывных в замыкании страта $\partial_G \wp_0^{\mathbb{C}}$, предельные значения производных гладки (аналитичны) в каждом из стратов $\partial_{G_1} \wp_0^{\mathbb{C}}$, $G \subset G_1$.

3. В $\partial_G \wp_0^{\mathbb{C}}$ норма $\partial \vec{\mathbf{s}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu) / \partial \vec{\mathbf{p}}$ меньше единицы, отображение $\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{p}}, \mu)$ взаимно однозначно при фиксированном μ (см. теорему I.5).

4. Область $\mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}$ содержит $\mathbb{R}^{\Phi} \times \mathcal{M}$. Страты $\partial_G \mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}$ – гладкие (комплексные) многообразия комплексной коразмерности $|G| - 1$. Обратное отображение $\vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{h}}, \mu)$ является непрерывным и гладким (аналитичным) в каждом страте $\partial_G \mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}$. Значения производных продолжаются до непрерывных в замыкании страта $\partial_G \mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}$, предельные значения производных гладки (аналитичны) в каждом из стратов $\partial_{G_1} \mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}$, $G \subset G_1$.

5. Давление в модели определяется функцией $p_{\max}(\vec{\mathbf{h}}, \mu)$ и обладает теми же дифференциальными свойствами, что и функция $\vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{h}}, \mu)$. Если $\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{h}}(\mu)$, то зависимость от параметров μ вектора давления и его дифференциальные свойства определяются функцией $\vec{\mathbf{p}}(\mu) := \vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{h}}(\mu), \mu)$ и наследуются из свойств $\vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{h}}, \mu)$. Вектор давлений $\vec{\mathbf{p}}(\mu)$ определен в области $\mathcal{M}_{\vec{\mathbf{d}}} \supset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Каждый страт $\partial_G \mathcal{M}_{\vec{\mathbf{d}}} := \{\mu \in \mathcal{M}_{\vec{\mathbf{d}}} : \vec{\mathbf{h}}(\mu) \in \partial_G \mathfrak{Z}_0^{\mathbb{C}}\}$ является вещественно-аналитическим множеством.

6. Для статистических сумм (1) справедливы следующие представления:

$$\Xi_q(V, H) = e^{p_{\max}|V|} \Delta_q(V) \sigma_q(V), \quad (24)$$

причем $|\sigma_q(V)| \leq 1$. Для устойчивых фаз, где $p_q = p_{\max}$ и $\sigma_q(V) = 1$,

$$\Xi_q(V, H) = e^{p_{\max}|V|} \Delta_q(V), \quad (25)$$

причем $|\ln \Xi_q(V, H) - p_{\max}|V|| \leq C \psi_0^{2\nu} |\partial V|$.

7. При пересечении страта фазовой диаграммы в пространстве параметров разрывна одна из производных давления по $\vec{\mathbf{h}}$. Гиббсовское состояние, построенное по граничному условию

$$q \in G(\mu) := \{q \in \Phi : p_q(\mu) = p_{\max}(\mu)\}, \quad (26)$$

является малым возмущением фазы q (см. теорему I.5).

Фазы, принадлежащие множеству $\Phi \setminus G(\mu)$, будем называть неустойчивыми. Следующая теорема удобна для анализа фазовых диаграмм.

ТЕОРЕМА 2 (критерий устойчивости фаз). В области фазовых переходов первого рода для неустойчивых фаз $q \in \Phi \setminus G(\mu)$ справедливо неравенство

$$|\Xi_q(V, H) e^{-p_{\max}|V|}| \leq [C_2 \psi_0]^{|\partial V|/2},$$

если $|V| - C_3|\partial V| \geq -[\ln(C_2\psi_0)]/(2|p_q - p_{\max}|)$, V – куб.

Для устойчивых фаз $q \in G(\mu)$ справедливо неравенство

$$|\Xi_q(V, H)e^{-p_{\max}|V|}| \geq e^{-\bar{\omega}|\partial V|}, \quad \bar{\omega} = C_1\psi_0^{2\nu}.$$

Из качественных соображений ясно, что для неустойчивых q при достаточно больших объемах куба V основной вклад в статсумму вносят конфигурации с контуром, близким к границе куба, объем, ограниченный этим контуром, примерно равен $|V| - C|\partial V|$, и он разделяет неустойчивую фазу q и некоторую устойчивую фазу q_1 . Теорема 2 дает грубую оценку соответствующего поверхностного натяжения, а также грубую оценку величины объемов, начиная с которых конфигурация с большим контуром, содержащим внутри себя устойчивую фазу, дает основной вклад в статсумму. Теорема 2 доказана в приложении.

Напомним, что геометрическая граница ∂ области $V(\vec{\partial})$, вообще говоря, несвязна; обозначим через Γ геометрическую границу области $V(\vec{\Gamma})$, $\vec{\Gamma} \in \vec{\delta}$. Доказательство теоремы 1 сводится (см. раздел I.5) к оценкам сумм

$$\sum_{\vec{\partial}: \partial V(\vec{\partial}) \cap 0 \neq \emptyset} |z_0^{\vec{\partial}} \varphi([\vec{\partial})|], \quad z_0^{\vec{\partial}} := \prod_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} z_0(\vec{\Gamma}), \quad (27)$$

а сумма по границам $\partial \cap 0 \neq \emptyset$ имеет следующий вид (см. формулу (I.28)):

$$\sum_{\Gamma: \min_1 \Gamma=0} \left\{ C_1|\Gamma| \sum_{\partial \ni \Gamma} \bar{\omega}(\partial) + C_2 \sum_{\substack{\partial: \Gamma_0 \subset V(\Gamma), \\ \Gamma \in \partial}} \bar{\omega}(\partial) + C_3 \sum_{\Gamma_1, \partial: \partial \ni \Gamma, \Gamma_1} d(\Gamma, \Gamma_1) \bar{\omega}(\partial) \right\}, \quad (28)$$

$$\bar{W}_2(\delta, \mu) := \sum_x \bar{W}_2(x, \delta, \mu),$$

где $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ – расстояние между Γ_1 и Γ_2 , Γ_0 – граница единичного куба. Введем несколько вспомогательных функций. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{W}_2(x, \delta, \mu) &:= \sum_{V \ni 0, x} (1 + \delta)^{|V|} \bar{W}(V), \\ \bar{W}_{2x}(\delta, \mu) &:= \sum_x |x| \sum_{V \ni 0, x} (1 + \delta)^{|V|} \bar{W}(V), \\ z(\vec{\Gamma}) &:= \left| e^{-H_0(\vec{\Gamma}) - H_1(\vec{\Gamma}) - \max_q \operatorname{Re} h_q |V_{\vec{\partial}}| + \Delta \bar{h} m_1(\vec{\partial}) + B(\vec{\Gamma})} \right| \times \\ &\quad \times e^{\bar{\omega}|\partial V_{\vec{\partial}}| + \bar{\omega}|\partial V(\vec{\partial})| + \bar{\mu}_V |V(\vec{\Gamma})| + \bar{\mu}_\Gamma |\vec{\Gamma}|_1 + C_5 \bar{\omega} |\vec{\Gamma}|}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\bar{\mu}_V$, $\bar{\mu}_\Gamma$ – вспомогательные параметры, которые в случае отсутствия производных или после необходимых дифференцирований будут положены равными нулю, $B(\vec{\Gamma})$

задано в (9). Введем также функции

$$\begin{aligned}
 g_{i,j}(\lambda, \mu) &:= \max_q \sum_{\vec{\Gamma}: 0 \in V'_q(\vec{\Gamma})} h(\vec{\Gamma}) |\vec{\Gamma}|^i |V(\vec{\Gamma})|^j |z(\vec{\Gamma})| e^{\lambda |\vec{\Gamma}|}, \\
 g_{i,j,x}(\lambda, \mu) &:= \max_q \sum_x |x| \sum_{\substack{\vec{\Gamma}: 0 \in V'_q(\vec{\Gamma}), \\ x \in V_q(\vec{\Gamma})}} h(\vec{\Gamma}) |\vec{\Gamma}|^i |V(\vec{\Gamma})|^{j-2} |z(\vec{\Gamma})| e^{\lambda |\vec{\Gamma}|}, \\
 \tilde{a}(\lambda, \mu) &:= g_{0,2}(\lambda, \mu) e^{g_{0,2}(\lambda, \mu)}, \quad \kappa(\lambda, \mu) := \tilde{a}(\lambda, \mu) \overline{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu), \\
 P_{2x}(\lambda, \mu) &:= \frac{\tilde{a}(\lambda, \mu) (g_{0,2,x}(\lambda, \mu) \overline{W}_2(\tilde{a}, \mu) + g_{0,2}(\lambda, \mu) \overline{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu))}{(1 - g_{0,2}(\lambda, \mu) \overline{W}_2(\tilde{a}, \mu))^2}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Отметим, что все величины в (30) малы, если малы ψ_0, ψ_1 в определении $\mathcal{M}$ (см. (21)) и i, j ограничены. Определим стандартно формальные частные производные от введенных функций по параметрам модели μ и λ . Положим теперь

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &:= \bigcup_{\lambda > 0} \{ \mu: \lambda \geq \kappa(\lambda, \mu), \kappa(\lambda, \mu)'_{\lambda} < 1, g_{0,2} \overline{W}_2(\tilde{a}, \mu) < 1, \\
 &\quad \overline{W}_{2x}^{(k)} < \infty, c_k(\mu) < \infty \}
 \end{aligned} \tag{31}$$

и аналогично определим $\mathfrak{F}$. Если в определениях (30) и (31) внешние поля заменить на давления, то ниже в теореме 3 мы найдем область в пространстве давлений.

Теорема 1 есть следствие следующей теоремы, в которой даны оценки сумм (27).

ТЕОРЕМА 3 (оценки сумм функций Урселла гамильтониана границы). *В области (31) существует решение уравнения $\lambda = \kappa(\lambda, \mu)$, причем если для некоторого λ_0 выполнено неравенство $\kappa(\lambda_0, \mu) \leq \lambda_0$, то $\lambda(\mu) \leq \kappa(\lambda_0, \mu) \leq \lambda_0$. Справедливы следующие мажорантные оценки относительно $z_0(\vec{\Gamma}) := z(\vec{\Gamma}) e^{-B(\vec{\Gamma})}$:*

$$\max_q \sum_{\vec{\Gamma}: 0 \in V'_q(\vec{\Gamma})} |\vec{\Gamma}|^i |V(\vec{\Gamma})|^j \sum_{\vec{\delta}: \vec{\Gamma} \in \vec{\delta}} |z_0(\vec{\Gamma})|^{\vec{\delta}} \varphi([\vec{\delta}]) \leq g_{i,j}(\lambda(\mu), \mu), \tag{32}$$

а также соответствующие неравенства на производные, в которых формальные производные от правой части надо находить, учитывая неравенство

$$\lambda'(\mu) := \frac{\kappa'_{\mu}(\lambda(\mu), \mu)}{1 - \kappa'_{\lambda}(\lambda(\mu), \mu)} \leq \frac{\kappa'_{\mu}(\lambda_0, \mu)}{1 - \kappa'_{\lambda}(\lambda_0, \mu)}.$$

Верно также неравенство

$$\sum_{\substack{\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2 \in \gamma_q, \\ \min_1 V(\vec{\Gamma}_1) = 0}} d(\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2) \sum_{\vec{\delta} \in \gamma_q: \vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2 \in \text{ex } \vec{\delta}} |z_0(\vec{\Gamma})|^{\vec{\delta}} \varphi([\vec{\delta}]) \leq P_{2x}(\lambda(\mu), \mu); \tag{33}$$

здесь $\text{ex } \vec{\delta}$ – внешние контуры $\vec{\delta}$. Кроме того, в случае $h(\vec{\Gamma}) = 1$ верно неравенство $B(\vec{\Gamma}) \leq r(\mu) |\vec{\Gamma}|$ (см. (9)), где $r(\mu) = C_4 \overline{W}_{2x}(0, \mu)$, $r^{(k)}(\mu) = C_4 \overline{W}_{2x}^{(k)}(0, \mu)$.

Для того чтобы показать справедливость теоремы 1, нам достаточно доказать (см. доказательство теорем I.4 и I.5), что неравенства $\overline{\omega}'_p < 1$, $\overline{\omega}'_{\mu} < \infty$ и неравенство (I.60)

верны для достаточно малых ψ_0, ψ_1 в (21). В неравенстве (I.60) увеличим левую часть, положив $\bar{\omega}_q = \bar{\omega}$ для всех q и заменив $b_q^e = e^{(p_q - p_{\max})}$ на $e^{h_q - \max \operatorname{Re} h_q + 2\bar{\omega}}$ (таким образом, мы проводим оценки в пространстве $\mathfrak{Z}$ или $\mathcal{M}$), тогда получим под знаком суммы в левой части (I.60) следующее выражение ($\Delta \tilde{h} m_1(\vec{\partial})$ определено в (12)):

$$[e^{-H_0(\vec{\Gamma}) - H_1(\vec{\Gamma})}] \vec{\partial} \varphi([\vec{\partial}]) e^{-\max \operatorname{Re} h_q |V_{\vec{\partial}}| + \bar{\omega} |\partial V_{\vec{\partial}}| + \bar{\omega} |\partial V(\vec{\partial})| + \Delta \tilde{h} m_1(\vec{\partial})}.$$

Таким образом, неравенство (I.60) можно записать в виде (условия суммирования определены в (28))

$$\sum_{\vec{\partial}: \vec{\partial}^{\text{ex}} = \partial^q \cap 0 \neq \emptyset} |z_0(\vec{\Gamma}) \vec{\partial} \varphi([\vec{\partial}])| \leq \bar{\omega}. \quad (34)$$

Введем функцию $Q(\lambda, \mu, \bar{\omega}) := C_1 g_{1,0} + C_2 g_{0,1} + C_3 P_{2x}$; тогда, как это вытекает из теоремы 3, неравенство (34) запишется в виде

$$Q(\lambda(\mu, \bar{\omega}), \mu, \bar{\omega}) \leq \bar{\omega}. \quad (35)$$

Определим стандартно формальные производные по параметрам, а также “полные” производные $Q_{\Gamma} := Q'_{\lambda} \lambda'_{\Gamma} + Q'_{\Gamma}$, $\tilde{a}_V := \tilde{a}'_{\lambda} \lambda'_V + \tilde{a}'_V$. Аналогично определим $Q_V, Q_{\mu}, \tilde{a}_{\Gamma}, \tilde{a}_{\mu}$, где $Q'_{\lambda}, Q'_{\mu}, Q'_V, Q'_{\Gamma}$ – частные формальные производные по $\lambda, \mu, \bar{\mu}_V, \bar{\mu}_{\Gamma}$ от Q . Сравнивая определения (I.56)–(I.59) и приведенные здесь, находим, что

$$\begin{aligned} a \leq \tilde{a}, \quad a_1 \leq C_6 \tilde{a}_{\Gamma}, \quad \bar{\omega}_1 \leq C_6 Q_{\Gamma}, \quad a_2 \leq 2\tilde{a}_V, \quad \bar{\omega}_1 \leq 2C_6 Q_{\Gamma}, \quad \bar{\omega}_2 \leq 2Q_V, \\ a_{3,4} \leq \tilde{a}_V, \quad \bar{\omega}_{3,4} \leq Q_V, \quad a_{\mu} \leq \tilde{a}_{\mu}, \quad \bar{\omega}_{\mu} \leq Q_{\mu}. \end{aligned}$$

Из предыдущих неравенств и определений (I.56)–(I.59) находим также, что

$$\bar{\omega}'_p \leq \frac{Q_V(3 + 4\tilde{a}_V)}{1 - C_6 Q_{\Gamma} - \tilde{a}_V - C_6 Q_{\Gamma} \tilde{a}_V}, \quad \bar{\omega}'_{\mu} \leq \frac{Q_{\mu} + Q_V \tilde{a}_{\mu}}{1 - C_6 Q_{\Gamma} - \tilde{a}_V - C_6 Q_{\Gamma} \tilde{a}_V}. \quad (36)$$

Заметим, что из оценок $|V(\vec{\Gamma})| \leq C_6 |\vec{\Gamma}|^{\nu/(\nu-1)}$ и $|x| \leq |\vec{\Gamma}|$ для $0, x \in V(\vec{\Gamma})$ вытекает, что $g_{i,j} \leq C_7 g_{i+2j,0}, g_{i,j,x} \leq C_8 g_{i+1,j} \leq C_9 g_{i+2j+1,0}$. Из (27)–(28) и теоремы 3 получаем, что неравенство (34) следует из $Q(\lambda(\mu, \bar{\omega}), \mu, \bar{\omega}) \leq \bar{\omega}$. Действительно, пусть $\lambda_0 = 1, \bar{\omega} = 1$. Тогда при достаточно малом $g_{5,0}$ малы $Q(1, \mu, 1)$ и $\tilde{a}$, а при достаточно малых $g_{7,0}$ и $g_{7,0}'$ малы величины $\bar{\omega}'_p, \bar{\omega}'_{\mu}$. Заметим, что производные высших порядков могут быть найдены из (36) формальным дифференцированием. Таким образом, повышение порядка производной не налагает дополнительных ограничений на область $\mathcal{M}$. Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы следует, что можно определить области $\mathcal{M}, \mathfrak{Z}$ точнее:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} := \{\mu: \exists \lambda, \bar{\omega}: \kappa(\lambda, \mu) \leq \lambda, \kappa'_{\lambda}(\lambda, \mu) < 1, Q(\lambda, \mu, \bar{\omega}) \leq \bar{\omega}, g_{0,2} \bar{W}_2(\tilde{a}, \mu) < 1, \\ \bar{\omega}'_p < 1, \bar{W}_{2x}^{(k)}(\tilde{a}, \mu) < \infty, c_k(\mu) < \infty, k < k_0\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Отсюда видно, что как λ , так и $\bar{\omega}$ можно выбрать в виде $C\psi_0^{2\nu}$.

Область $\mathcal{M}$ из (21) при достаточно малых ψ_0, ψ_1 лежит внутри области $\mathcal{M}$ (37), поэтому мы обозначаем расширенную область той же буквой.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Для доказательства теоремы 3 и, следовательно, теоремы 1, нам надо воспользоваться для сумм (27) леммой 5 (см. приложение). Для этого необходимо выразить потенциалы $W(A)$ гамильтониана границы через $W(V|\vec{\partial})$, а потом найти оценку типа неравенств формулы (75) из приложения.

Для гамильтониана границы гамильтониан произвольного набора контуров границы непосредственно не определен (его задание нужно для введения функции Урселла, см. п. 2 приложения). Напомним необходимое определение раздела I.3. Для каждой границы $\vec{\partial}$ и набора контуров $\vec{\partial}_1 \subset \vec{\partial}$ введем минимальное разбиение множества $\vec{\partial}_1$ такое, что каждый элемент этого разбиения $[\vec{\partial}_1]_{\vec{\partial}}$ уже является границей. Гамильтониан множества контуров $\vec{\partial}_1$ по определению равен

$$H^{\vec{\partial}}(\vec{\partial}_1) := \sum_{\vec{\partial}_2 \in [\vec{\partial}_1]_{\vec{\partial}}} H(\vec{\partial}_2). \quad (38)$$

Следовательно, определены многочастичные потенциалы гамильтониана $H(\vec{\partial})$ и функции Урселла $\varphi([\vec{\partial}])$. Для каждого набора контуров $\vec{\partial}_1 \subset \vec{\partial}$ определим также $\vec{\partial}^{\min}(\vec{\partial}_1) \in \gamma(\vec{\partial})$ как минимальную границу, содержащую контуры из $\vec{\partial}_1$. Ясно, что $\min^0 \vec{\partial}^{\min}(\vec{\partial}_1) = \min^0 \vec{\partial}_1$.

Введем множество $R_\gamma(\vec{\partial})$ согласованных разбиений границы $\vec{\partial}$ (см. также раздел I.3). Каждый элемент этого множества $\vec{\mathbf{A}}$ состоит из набора границ: $\vec{\mathbf{A}} = \{\vec{\partial}_1, \dots, \vec{\partial}_k\}$, $\vec{\partial}_i \in \gamma(\vec{\partial})$, $\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}}) := \cup \vec{\partial}_i = \vec{\partial}$. Мы можем ввести множество $\min^0 \vec{\mathbf{A}}$ как те границы $\vec{\partial}_i \in \vec{\mathbf{A}}$, носители которых лежат в некоторой связной компоненте $\mathbb{R}^n \setminus V_{\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}}) \setminus \vec{\partial}_1}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\vec{\mathbf{A}} = \{\vec{\partial}_1, \dots, \vec{\partial}_n\}$, $\vec{\partial}_i \in \gamma(\vec{\partial})$, $\vec{\partial}_i \cap \vec{\partial}_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}}) \subset \vec{\partial}$. Если $\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}}) \notin \gamma(\vec{\partial})$, то $W^{\vec{\partial}}(\vec{\mathbf{A}}) = 0$. Если $\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}}) \in \gamma(\vec{\partial})$, то

$$W^{\vec{\partial}}(\vec{\mathbf{A}}) = W^{\vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}})}(\vec{\mathbf{A}}) = W(\vec{\mathbf{A}}) = W(\min^0 \vec{\mathbf{A}} | \vec{\mathbf{A}} \setminus \min^0 \vec{\mathbf{A}}). \quad (39)$$

Эти утверждения нетрудно получить из определений (38) и (68).

Пусть $\vec{\mathbf{A}} = \{\vec{\partial}_1, [\vec{\partial}_2]_{\vec{\partial}}\}$, $\vec{\partial}_1 \in \gamma(\vec{\partial})$, $\vec{\partial}_1 \cup \vec{\partial}_2 \in \gamma(\vec{\partial})$ и $\vec{\partial}_1 \in \min^0 \vec{\mathbf{A}}$, следовательно, $\vec{\partial}_2 \in \gamma(\vec{\partial})$. Тогда контуры из $\vec{\partial}_1$ можно пронумеровать так, что

$$\begin{aligned} \vec{\partial}_1 &= \{\vec{\Gamma}_1, \dots, \vec{\Gamma}_{|\vec{\partial}_1|}\}, & \vec{\partial}_2 \cup \vec{\partial}_1(\vec{\Gamma}_i) &\in \gamma(\vec{\partial}), \\ \vec{\partial}_1(\vec{\Gamma}_i) &:= \prod_{j \geq i+1} \vec{\Gamma}_j, & \vec{\Gamma}_i &\in \min^0(\vec{\Gamma}_i \cup \vec{\partial}_2 \cup \vec{\partial}_1(\vec{\Gamma}_i)). \end{aligned}$$

Если $\vec{\mathbf{A}} \in R_\gamma(\vec{\partial})$, тогда предыдущее построение можно провести для каждой границы $\vec{\partial}_1 \in \min^0 \vec{\mathbf{A}}$.

ЛЕММА 2. Имеют место следующие утверждения.

1. Если $\vec{\mathbf{A}} \in R_\gamma[\vec{\partial}]$, то в каждом из множеств $\vec{\partial}_1 \in \vec{\mathbf{A}}$ нумерацию контуров можно выбрать такой, что при $\vec{\partial}' \cap^* \min^0 \vec{\mathbf{A}} \neq \emptyset$ (т.е. $|\vec{\partial}'| = |\min^0 \vec{\mathbf{A}}| \neq 0$,

$|\vec{\partial}' \cap \vec{\partial}_1| = 1$ для любой $\vec{\partial}_1 \in \min^0 \vec{\mathbf{A}}$ выполнены

$$\begin{aligned} \vec{\partial}' &= \min^0 \vec{\partial}' \subset \min^0(\vec{\partial}' \cup \vec{\partial}_{\vec{\mathbf{A}}}(\vec{\partial}')), \\ \vec{\partial}_{\vec{\mathbf{A}}}(\vec{\partial}') &= \vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}} \setminus \min^0 \vec{\mathbf{A}}) \bigcup_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}'} \vec{\partial}_1(\vec{\Gamma}) \in \gamma(\vec{\partial}) \end{aligned} \quad (40)$$

$(\vec{\partial}_1(\vec{\Gamma}))$ определено перед леммой) и

$$W(\min^0 \vec{\mathbf{A}} | \vec{\partial}(\vec{\mathbf{A}} \setminus \min^0 \vec{\mathbf{A}})) = \sum_{\vec{\partial}' \cap \min^0 \vec{\mathbf{A}} \neq \emptyset} W([\vec{\partial}'] | \vec{\partial}_{\vec{\mathbf{A}}}(\vec{\partial}')). \quad (41)$$

2. Пусть $\vec{\partial}_1 \cup \vec{\partial}_2 \in \gamma(\vec{\partial})$, $\vec{\partial}_1 = \min^0 \vec{\partial}_1 \subset \min^0(\vec{\partial}_1 \cup \vec{\partial}_2)$, $|\vec{\partial}_1| \geq 2$, тогда

$$\begin{aligned} W([\vec{\partial}_1] | \vec{\partial}_2) &= \sum_{V \cap \vec{\partial}_1 \neq \emptyset} \sum_{\vec{\partial}_3 \subset \vec{\partial}_1} (-1)^{|\vec{\partial}_3|} W(V | \vec{\partial}_2 \cup \vec{\partial}_3) = \\ &= \sum_{V \cap \vec{\partial}_1 \neq \emptyset} \sum_{\vec{\partial}_3 \subset \vec{\partial}_1} (-1)^{|\vec{\partial}_3|} W_1(V | \vec{\partial}_2 \cup \vec{\partial}_3) \end{aligned} \quad (42)$$

и справедливо неравенство

$$|W(\vec{\mathbf{A}})| \leq \sum_{\vec{\partial}' \cap \min^0 \vec{\mathbf{A}} \neq \emptyset} h(\vec{\Gamma}) \overline{W}_1(\vec{\partial}'), \quad \overline{W}_1(\vec{\partial}') := \sum_{V \cap \vec{\partial}' \neq \emptyset} \overline{W}(V), \quad (43)$$

где для каждого $\vec{\partial}'$ в (43) контур $\vec{\Gamma}$ из $\vec{\partial}'$ произволен, $\overline{W}(V)$ определено в (10). $V \cap \vec{\partial}' \neq \emptyset$ означает, что $V \cap V(\vec{\Gamma}) \neq \emptyset$ для всех контуров, кроме внешнего; если $\vec{\partial}'$ содержит внешний контур $\vec{\Gamma}$, то $V \cap (R^\nu \setminus V(\vec{\Gamma})) \neq \emptyset$.

Выбирая в каждом $\vec{\partial}_i \in \min^0 \vec{\mathbf{A}}$ последовательность контуров в соответствии с указанной перед леммой нумерацией, получаем (40), а затем, используя (39), получаем (41). Второе утверждение леммы вытекает из (39), (8) и условия локальности взаимодействия. Неравенство (43) есть прямое следствие формул (39), (41), (42) и (10). Для дальнейших рассуждений существенно, что из условия локальности вытекает, что $W_1(V | \vec{\partial})$ и соответствующие слагаемые в (42) равны нулю, если V целиком лежит в одной из компонент $\mathbb{R}^\nu \setminus V_{\vec{\partial}}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Рассмотрим ситуацию, когда $h(\vec{\Gamma}) = 1$, и убедимся, что в этом случае верно неравенство $B(\vec{\Gamma}) \leq r(\mu)|\vec{\Gamma}|$ (см. (9)), где $r(\mu) := C_4 \overline{W}_{2x}(0, \mu)$. Чтобы получить нужное неравенство, рассмотрим разность $H_1(\vec{\partial}) - H_1(\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})$, представив ее в виде ($q = k_{\text{ex}}(\vec{\Gamma})$, $V_{\text{ex}}(\vec{\Gamma}) = R^\nu \setminus V(\vec{\Gamma})$, $k_i = k_i(\vec{\Gamma})$)

$$\begin{aligned} H_1(\vec{\partial}) - H_1(\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}) &= \sum_V \left[W(V | \vec{\partial}) - \sum_{i \in I(\vec{\Gamma})} W(V | k_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|V \cap V_{\text{ex}}(\vec{\Gamma})|}{|V|} W(V | q) - W(V | \vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Из условия локальности взаимодействия вытекает также, что выражение в квадратных скобках в предыдущей формуле равно нулю, если V целиком лежит в одной из связных компонент $R^\nu \setminus V_{\vec{\Gamma}}$. Следовательно, для отличных от нуля слагаемых найдутся либо $x \in V_{\vec{\Gamma}}$, либо пара точек в V , для которых “прямая”, их соединяющая, пересекает $\partial V_{\vec{\Gamma}}$. Используя геометрические свойства границы (условие 1) и рассуждения леммы 5.3.7 из [23], находим, что

$$|H_1(\vec{\partial}) - H_1(\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma})| \leq \overline{W}_{2x}(0, \mu)(|\partial V_{\vec{\Gamma}}| + |V_{\vec{\Gamma}}|) \leq \overline{W}_{2x}(0, \mu)|\vec{\Gamma}|. \quad (44)$$

Докажем неравенство (32). Используя неравенство п. 1 леммы 5 приложения и неравенство (43), имеем

$$|z_0^{\vec{\partial}} \varphi([\vec{\partial}])| \leq \sum_{\{\eta_{\vec{\Gamma}}(\vec{\partial})\}} z^{\vec{\partial}} \prod_{\vec{\partial}_1 \in \pi(\eta)} h(\vec{\Gamma}_1) \overline{W}(\vec{\partial}_1) \leq \sum_{\{\eta_{\vec{\Gamma}}(\vec{\partial})\}} (zh)^{\vec{\partial}} \prod_{\vec{\partial}_1 \in \pi(\eta)} \overline{W}(\vec{\partial}_1), \quad (45)$$

где $\overline{W}(\vec{\partial}_1) := \overline{W}_1(\min^0 \vec{\partial}_1)$. При переходе к последнему выражению каждый контур $\vec{\Gamma}_1 \in \min^0 \vec{\partial}_1$ выбирался наиболее удаленным от корня “дерева” $\eta_{\vec{\Gamma}}(\vec{\partial})$.

Следующий шаг получения необходимых нам оценок состоит в суммировании по всем границам $\vec{\partial}$, для которых $V_{\vec{\partial}} = \text{const}$ и $q = k_{\text{ex}}(\vec{\Gamma}) = \text{const}$. Ниже в этом разделе нам удобно положить $\vec{\partial} = V_{\vec{\partial}}$, $\vec{\Gamma} = V_{\vec{\Gamma}}$, $\overline{W}(\vec{\partial}) = \max_{\vec{\partial}: \vec{\partial}=V_{\vec{\partial}}} \overline{W}(\vec{\partial})$. Введем также функционал

$$\bar{z}(\vec{\Gamma}) := \max_q \sum_{\substack{\vec{\Gamma}: \vec{\Gamma}=V_{\vec{\Gamma}}, \\ V'_q(\vec{\Gamma}) \neq \emptyset}} h(\vec{\Gamma}) z(\vec{\Gamma}). \quad (46)$$

Суммирование по $\vec{\partial}_1$ в (45) при условиях $V_{\vec{\partial}} = \text{const}$ и $q = k_{\text{ex}}(\vec{\Gamma}) = \text{const}$ начнем с контуров $\vec{\Gamma}_1$, наиболее удаленных от “точки” $\vec{\partial}$ -графа (см. раздел I.1, где дано определение $\vec{\partial}$ -графа), для которой $V'_q(\vec{\Gamma}) \cap V_i(\vec{\Gamma}) \neq \emptyset$. Тип фазы и соответствующий объем $V_i(\vec{\Gamma}_1)$ “точки” $\vec{\partial}$ -графа, посредством которой контур $\vec{\Gamma}_1$ “присоединен” к $\vec{\partial}$ -графу, фиксированы, и тем самым результат суммирования по $\vec{\Gamma}_1$ при фиксированных $\vec{\partial} \setminus \vec{\Gamma}_1$ и $V_{\vec{\Gamma}_1}$ не превосходит $\bar{z}(\vec{\Gamma})$. При помощи индукции отсюда выводим неравенство

$$\max_q \sum_{\substack{\vec{\partial} \ni \vec{\Gamma}: V'_q(\vec{\Gamma}) \neq \emptyset, \\ V_{\vec{\partial}} = \text{const}}} |z_0^{\vec{\partial}} \varphi([\vec{\partial}])| \leq \sum_{\{\eta_{\vec{\Gamma}}(\vec{\partial})\}} z^{\vec{\partial}} \prod_{\vec{\partial}_1 \in \pi(\eta)} \overline{W}(\vec{\partial}_1). \quad (47)$$

Таким образом, правая часть (47) зависит лишь от геометрической границы $\vec{\partial}$, а вся зависимость от фаз “скрыта” в $\bar{z}(\vec{\Gamma})$ (см. (46)).

Из п. 2 леммы 5 вытекает, что правая часть (47) не превосходит $\bar{\omega}(\vec{\Gamma})$, если

$$\bar{z}(\vec{\Gamma}) \exp \left\{ \sum_{\vec{\partial}} \overline{W}(\vec{\Gamma} \cup \vec{\partial}) \bar{\omega}^{\vec{\partial}} \right\} \leq \bar{\omega}(\vec{\Gamma}). \quad (48)$$

Убедимся, что

$$\sum_{\vec{\partial}} \overline{W}(\vec{\Gamma} \cup \vec{\partial}) \bar{\omega}^{\vec{\partial}} \leq C_2 |\vec{\Gamma}| \tilde{a} \overline{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu), \quad (49)$$

где $\bar{W}_{2x}$ определено в условии 3 теоремы 1, а

$$\tilde{a} = \sum_{\bar{\Gamma}: 0 \in V(\bar{\Gamma})} \bar{\omega}(\bar{\Gamma}) \exp \left\{ \sum_{\bar{\Gamma}: 0 \in V(\bar{\Gamma})} \bar{\omega}(\bar{\Gamma}) \right\}.$$

Из формул (43) и определения $\bar{W}(\partial)$ находим, что

$$\sum_{\bar{\partial}} \bar{W}(\bar{\Gamma} \cup \bar{\partial}) \bar{\omega}^{\bar{\partial}} \leq \sum_{\substack{\bar{\partial} \ni \bar{\Gamma}, \\ V: V \cap \min^0 \bar{\partial} \neq \emptyset}} \bar{W}(V) \bar{\omega}^{\bar{\partial} \setminus \bar{\Gamma}}, \quad (50)$$

где условия суммирования в правой части определены в конце леммы 2. В каждом из множеств $V \cap V(\bar{\Gamma}_1)$ или $V \cap V_{\text{ex}}(\bar{\Gamma}_1)$, $\bar{\Gamma}_1 \in \min^0 \bar{\partial}$ выделим лексикографически минимальную точку; совокупность таких точек обозначим V_1 . Итак, по построению $V_1 \cap \bar{\partial} \neq \emptyset$, $|V_1| \geq 2$, кроме того, в V_1 найдется пара точек x_1, x_2 таких, что “отрезок”, их соединяющий, пересекает $\partial V(\bar{\Gamma})$. Аналогично доказательству (44) нетрудно получить следующее. Если $\bar{\Gamma}$ – внешний контур $\bar{\partial}$, то соответствующая сумма в правой части (50) не превосходит $\tilde{a}(1 + \tilde{a})^{-1} \bar{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu) |\partial V_{\bar{\Gamma}} \setminus \partial V(\bar{\Gamma})|$. При $\bar{\Gamma} \in \min^0 \bar{\partial}$ сумма в правой части (50) не превосходит $\tilde{a}(1 + \tilde{a})^{-1} \bar{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu) |\partial V(\bar{\Gamma})|$. Если $\bar{\Gamma} \notin \min^0 \bar{\partial}$, то оценка правой части (50) имеет вид $\tilde{a}^2(1 + \tilde{a})^{-2} \bar{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu) |\partial V_{\bar{\Gamma}}|$. В каждом случае мы проводим сначала суммирование по величинам $\bar{\omega}^{\bar{\partial} \setminus \bar{\Gamma}}$, что дает результат, не превосходящий $\tilde{a}^{|V_1|-1}$ или $\tilde{a}^{|V_1|-2}$, затем суммирование по V_1 в V , что дает результат не более $(1 + \tilde{a})^{|V|-1}$ или $(1 + \tilde{a})^{|V|-2}$, потом суммирование $(1 + \tilde{a})^{|V|-1} \bar{W}(V)$ по V при фиксированных x_1, x_2 , а затем по x_1, x_2 , что и дает (49). “Сокращая” число переменных в (48) (см. последнее утверждение леммы 5), положим $\bar{\omega}(\bar{\Gamma}) = \bar{z}(\bar{\Gamma}) e^{\lambda |\bar{\Gamma}|}$, тогда для справедливости (48) достаточно, чтобы было выполнено неравенство $\lambda \geq C_2 \tilde{a} \bar{W}_{2x}(\tilde{a}, \mu)$, где в правой части (49) $\bar{\omega}(\bar{\Gamma}) = \bar{z}(\bar{\Gamma}) e^{\lambda |\bar{\Gamma}|}$. Таким образом, неравенства (32) доказаны, и нам осталось доказать (33).

В правой части (33) используем неравенство (45), в котором $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}' = V_{\bar{\Gamma}'}$. Так как каждому слагаемому в полученной оценке соответствует граф типа “дерева” (вклад графа в сумму равен $z^{\bar{\partial}} \prod \bar{W}(\bar{\partial}_j)$), найдется единственная последовательность потенциалов $\bar{W}(\bar{\partial}_i)$ и контуров $\bar{\Gamma}_i$ таких, что $\bar{\Gamma}' \equiv \bar{\Gamma}_1 \in \bar{\partial}_1$, $\bar{\Gamma}'' \equiv \bar{\Gamma}_n \in \bar{\partial}_n$, $\bar{\partial}_i \cap \bar{\partial}_{i+1} = \bar{\Gamma}_i$. Выберем из последовательности контуров $\bar{\Gamma}_i$ подпоследовательность следующим образом: найдем два контура $\bar{\Gamma}_{i_1} \equiv \bar{\Gamma}_1^2$ и $\bar{\Gamma}_{i_1+1} \equiv \bar{\Gamma}_2^1$ таких, что $\bar{\Gamma}_j \subset V(\bar{\Gamma}_1)$, $j = 1, \dots, i_1$, и $V(\bar{\Gamma}_{i_1+1}) \cap V(\bar{\Gamma}_1) = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1^1 = \bar{\Gamma}^1 = \bar{\Gamma}'$; найдем следующую пару контуров $\bar{\Gamma}_{i_2} \equiv \bar{\Gamma}_2^2$ и $\bar{\Gamma}_{i_2+1} \equiv \bar{\Gamma}_3^1$ таких, что $\bar{\Gamma}_j \subset V(\bar{\Gamma}_2^1)$, $j = i_1 + 1, \dots, i_2$, и $V(\bar{\Gamma}_{i_2+1}) \cap V(\bar{\Gamma}_2^1) = \emptyset$ и т.д., пока контур $\bar{\Gamma}_k^1$ не окажется равным или лежащим внутри $\bar{\Gamma}''$. Таким способом определена последовательность контуров $\bar{\Gamma}_{j-1}^2, \bar{\Gamma}_j^1$, $j = 2, \dots, k$, для которой во-первых, $\bar{\Gamma}_j^2 \subset V(\bar{\Gamma}_j^1)$ или $\bar{\Gamma}_j^2 = \bar{\Gamma}_j^1$; во-вторых, $V(\bar{\Gamma}_j^1) \cap V(\bar{\Gamma}_{j+1}^1) = \emptyset$; в-третьих, $\bar{\Gamma}_j^2 \in \bar{\partial}_{i_j}$, $\bar{\Gamma}_{j+1}^1 \in \bar{\partial}_{i_j}$, где i_j – возрастающая подпоследовательность номеров $1, \dots, n$; в-четвертых, $\bar{\Gamma}_j^1 \equiv \bar{\Gamma}'$, $\bar{\Gamma}_k^1 \subset V(\bar{\Gamma}'')$ или $\bar{\Gamma}_k^1 = V(\bar{\Gamma}'')$. Представим каждый из потенциалов $\bar{W}(\bar{\partial}_{i_j})$ в виде суммы по V_j , $j = 1, \dots, k-1$, и выделим в каждом V_j пару точек $x_{2j-1} \in V(\bar{\Gamma}_j^2) \subset V(\bar{\Gamma}_j^1)$ и $x_{2j} \in V(\bar{\Gamma}_{j+1}^1)$. Увеличим $d(\bar{\Gamma}', \bar{\Gamma}'')$ до $|x_1 - x_{2k-2}|$ и проведем суммирование по всем контурам, кроме $\bigcup_j \bar{\partial}_{i_j}$, в результате будем иметь

не более $\bar{\omega}(\bar{\Gamma})$ для каждого контура из этого множества; затем суммируем по $\bar{\partial}_{ij}$, V_j , для которых фиксированы точки x_{2j-1} , x_{2j} и по контурам $\bar{\Gamma}_j^1$, действуя при этом так же, как при доказательстве (32). Таким образом, оценкой левой части (33) является

$$\sum_{k \geq 2} \sum_{x_1, \dots, x_{2k-2}} |x_1 - x_{2k-2}| \sum_{i=1}^k \prod_{i=1}^k \bar{\omega}(\bar{\Gamma}) \prod_{i=1}^{k-1} \bar{W}_2(x_{2i-1} - x_{2i}; \tilde{a}, \mu),$$

где в последней сумме условия суммирования следующие: $\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_k$ таковы, что $x_1 \in V(\bar{\Gamma}_1)$, $x_{2k-2} \in V(\bar{\Gamma}_k)$, $x_{2i} \cup x_{2i+1} \subset V(\bar{\Gamma}_i)$ для любого i . После использования неравенства $|x_1 - x_{2k-2}| \leq \sum |x_i - x_{i+1}|$ и определений (30), (31), получим (33). Наши оценки верны и после взятия формальных производных в соответствующих неравенствах. Теорема 3, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

4. РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА

Построение, дающее расширение области фазовых переходов первого рода, основано на том, что сдвиг внешних полей в (1) можно записать как соответствующий сдвиг контурного функционала $H_0(\vec{\Gamma})$. При чисто мнимом сдвиге $H_0(\vec{\Gamma})$ оценки теоремы 1 остаются верными! Следовательно, наше рассмотрение оказывается верным в более широкой области. Если раньше мы могли утверждать, что теорема 1 верна лишь в вещественной части областей $\Im$, $\mathcal{M}$, а также в допустимой комплексной окрестности областей $\Im_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, то теперь мы можем расширить область фазовых переходов первого рода до областей $\Im$, $\mathcal{M}$.

Пусть задан набор вещественных чисел α_q , $q \in \Phi$. Введем функционалы

$$\begin{aligned} H_0(\vec{\Gamma}, \vec{\alpha}) &:= H_0(\vec{\Gamma}) + i \left[\alpha_{k_{\text{ex}}}(\vec{\Gamma}) |V(\vec{\Gamma})| - \sum_{j \in l(\vec{\Gamma})} \alpha_{k_j}(\vec{\Gamma}) |V_j(\vec{\Gamma})| \right], \\ H(\vec{\partial}, \vec{\alpha}) &:= \sum_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} H_0(\vec{\Gamma}, \vec{\alpha}) + H_1(\vec{\partial}). \end{aligned} \quad (51)$$

ЛЕММА 3. *Статистические суммы (1) многофазных контурных моделей fc(field-contour)-инвариантны, т.е. для них справедливы тождества*

$$\Xi_q(V, H, \vec{\mathbf{h}}) = e^{i\alpha_q |V|} \Xi_q(V, H(\vec{\alpha}), \vec{\mathbf{h}} - i\vec{\alpha}). \quad (52)$$

Равенство (52) вытекает из “почти геометрического” тождества ($V_{\vec{\partial}} \subset V$)

$$\begin{aligned} \alpha_{k_{\text{ex}}}(\vec{\partial}) |V \setminus V(\vec{\partial})| + \sum_{j \in l(\vec{\partial})} \alpha_{k_j}(\vec{\partial}) |V_j(\vec{\partial})| &= \\ = \alpha_{k_{\text{ex}}}(\vec{\partial}) |V| - \sum_{\vec{\Gamma} \in \vec{\partial}} \left[\alpha_{k_{\text{ex}}}(\vec{\Gamma}) |V(\vec{\Gamma})| - \sum_{j \in l(\vec{\Gamma})} \alpha_{k_j}(\vec{\Gamma}) |V_j(\vec{\Gamma})| \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Пусть $\vec{\partial}$ – граница, состоящая из внешних контуров. Тогда (53), очевидно, выполнено. Пусть $\vec{\partial}$, $\vec{\partial} \cup \vec{\partial}_1$ – границы, $\min^0 \vec{\partial}_1 = \vec{\partial}_1$, $V_{\vec{\partial}_1} \subset V_i(\vec{\partial})$ и пусть для $\vec{\partial}$ тождество (53) выполнено. В этом случае предыдущее рассуждение надо повторить для области $V_i(\vec{\partial})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Модель со статистическими суммами $\Xi_q(V, H(\vec{\alpha}), \vec{h} - i\vec{\alpha})$ будем называть *контурной α -моделью*, соответствующей модели (1).

Так как α -модель – это стандартная многофазная контурная модель (1), у которой лишь переопределены гамильтониан и внешние поля, к ней для каждого $\vec{\alpha}$ применимы построения контурных уравнений и уравнения состояния.

Мы будем строить контурные уравнения и уравнения состояния двумя способами.

В первом случае в построениях раздела I.5 для статистических сумм α -модели вектор давлений всегда вещественен и равен $\text{Re } \vec{p}$, а вектор $\vec{\alpha} = \text{Im } \vec{p}$. В этом случае контурные уравнения и уравнения состояния мы рассматриваем на пространстве $\wp$, где

$$\wp := \mathbb{C}^\Phi \times \mathcal{M}_p = \{(\vec{p}, \mu) : \vec{p} \in \mathbb{C}^\Phi, \mu \in \mathcal{M}_p\} = \bigcup_{G \subset \Phi} \partial_G \wp, \quad (54)$$

$$\partial_G \wp := \{(\vec{p}, \mu) \in \wp : \text{Re } \vec{p}|_G = p_{\max, \mathbb{R}} \vec{1}_{\mathbb{R}}|_G, \text{Re } \vec{p}|_{\Phi \setminus G} < p_{\max, \mathbb{R}} \vec{1}_{\mathbb{R}}|_{\Phi \setminus G}, \mu \in \mathcal{M}_p\},$$

$\mathcal{M}_p$ определено в (21) после замены $\max \text{Re } h_q$ на $p_{\max, \mathbb{R}}$. Для простоты формулировок мы используем в определении $\wp$ величину (23), а не (11). Уравнение состояния $\vec{h}(\vec{p}, \mu) - i \text{Im } \vec{p} = \text{Re } \vec{p} - \vec{s}_{\text{Im } \vec{p}}(\text{Re } \vec{p}, \mu)$ и контурные уравнения на $\wp$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{h}(\vec{p}, \mu) &= \vec{p} - \vec{s}_{\text{Im } \vec{p}}(\text{Re } \vec{p}, \mu), \\ \vec{\mathcal{F}} &= \vec{\Upsilon}_{\text{Im } \vec{p}}(\vec{\mathcal{F}}, \text{Re } \vec{p}, \mu), \quad (\vec{p}, \mu) \in \wp, \end{aligned} \quad (55)$$

где индекс у векторов $\vec{s}$, $\vec{\Upsilon}$ равен сдвигу в (52). Из теоремы 1 и формулы (52) вытекает, что давление в модели (1) равно $p_{\max, q}(\vec{h}, \mu) = p_{\max, \mathbb{R}}(\vec{h}, \mu) + i \text{Im } p_q(\vec{h}, \mu)$, $q \in G(\mu)$.

Во втором случае мы выбираем точку $\vec{p}_0 \in \partial_G \wp$. Далее, $\vec{\alpha} := \text{Im } \vec{p}_0$, вектор давлений в построении контурных уравнений и уравнения состояния равен $\vec{p} - i\vec{\alpha}$, он вещественен на компонентах из G , а сами эти компоненты равны между собой. Контурные уравнения и уравнение состояния мы строим на множестве

$$\begin{aligned} \partial_G \wp_{\text{Im } \vec{p}_0}^{\mathbb{C}} &:= \{(\vec{p}, \mu) : \vec{p} \in \mathbb{C}^\Phi, \text{Im } \vec{p}|_G = \text{Im } \vec{p}_0|_G, \\ &\text{Re } \vec{p}|_G = p_{\max, \vec{\alpha}} \vec{1}_{\mathbb{R}}|_G, e^{\Delta p_q - i\alpha_q} \in S_1(a_q) \forall q \in \Phi \setminus G, \mu \in \mathcal{M}_p\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Страт (56) содержится в страте $\partial_G \wp$. Отображение $\vec{p} \rightarrow \vec{h}$ и соответствующие контурные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{h}_{\text{Im } \vec{p}_0}(\vec{p}, \mu) &= \vec{p} - \vec{s}_{\text{Im } \vec{p}_0}(\vec{p} - i \text{Im } \vec{p}_0, \mu), \quad (\vec{p}, \mu) \in \partial_G \wp_{\text{Im } \vec{p}_0}^{\mathbb{C}}, \\ \vec{\mathcal{F}} &= \vec{\Upsilon}_{\text{Im } \vec{p}_0}(\vec{\mathcal{F}}, \vec{p} - i \text{Im } \vec{p}_0, \mu). \end{aligned} \quad (57)$$

“Вещественная” часть страта $\partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}}$ равна

$$\partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}, \mathbb{R}} := \{(\vec{p}, \mu) \in \partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}} : \vec{p} - i\vec{\alpha}|_{\Phi \setminus G} \in \mathbb{R}^{\Phi \setminus G}, e^{\Delta \vec{p} - i\Delta \vec{\alpha}} < \vec{1}_{\mathbb{R}}|_{\Phi \setminus G}, \mu \in \mathcal{M}_p\}. \quad (58)$$

Введем также

$$\partial_G \wp^{\mathbb{C}} := \bigcup_{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^\Phi : \vec{\alpha}|_G = \alpha_G \vec{1}|_G} \partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}}, \quad \wp^{\mathbb{C}} := \bigcup_{G \subset \Phi} \partial_G \wp^{\mathbb{C}}. \quad (59)$$

Так как все компоненты вектора $\vec{p}$ с индексами из G в страте $\partial_G \wp^{\mathbb{C}}$ равны как комплексные числа, обозначим давление $p_{\max, \mathbb{C}}$. Нетрудно видеть, что

$$\partial_G \wp^{\mathbb{C}} := \{(\vec{p}, \mu) : \vec{p} \in \mathbb{C}^{\Phi}, \vec{p}|_G = p_{\max, \mathbb{C}} \vec{1}_{\mathbb{C}}|_G, |e^{\Delta p_q}| < 1 \ \forall q \in \Phi \setminus G, \mu \in \mathcal{M}_p\}. \quad (60)$$

Отметим, что все страты по переменным $\vec{p}$ являются плоскими. Страт $\partial_G \wp$ имеет вещественную коразмерность $|G| - 1$, страт $\partial_G \wp^{\mathbb{C}} \subset \partial_G \wp$ – комплексную коразмерность $|G| - 1$. Ясно также, что эти страты отличаются лишь из-за возможности (невозможности) изменения мнимой части вектора давления.

Из (57) и (55) вытекает, что

$$\vec{h}_{\vec{\alpha}}(\vec{p}, \mu) = \vec{h}(\vec{p}, \mu), \quad (\vec{p}, \mu) \in \partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}, \mathbb{R}}, \quad \vec{\alpha} = \text{Im } \vec{p} = \text{const}. \quad (61)$$

Обратное отображение к (55), задающее давление, является функцией в области $\mathfrak{Z}$:

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{h}, \mu). \quad (62)$$

Если внешние поля фаз нельзя считать не зависящими от параметров модели, то уравнение состояния определено на $\mathcal{M}$ и принимает вид

$$\vec{p}(\mu) = \vec{p}(\vec{h}(\mu), \mu). \quad (63)$$

Заметим, что отображение $\vec{h}(\vec{p}, \mu)$, вообще говоря, неаналитично, так как в нем мы “неаналитично разъединили” зависимость от вещественной и мнимой частей вектора давлений $\vec{p}$. Отображение $\vec{h}_{\vec{\alpha}}(\vec{p}, \mu)$, $(\vec{p}, \mu) \in \partial_G \wp_{\vec{\alpha}}^{\mathbb{C}}$, напротив, аналитично для каждого $\vec{\alpha}$ по $\vec{p}$, что и позволяет “вернуть” аналитичность $p_{\max, q}(\vec{h}, \mu)$ в каждом страте $\partial_G \mathfrak{Z}^{\mathbb{C}}$. Действительно, для самого давления $p_{\max, q}(\vec{h}, \mu)$ или $p_{\max, \mathbb{C}}(\vec{h}, \mu)$ мы имеем определение на основании термодинамического предела. Контурные уравнения и теорема 1 гарантируют существование термодинамического предела этих двух величин и, так как предел единственен, их равенство. Таким образом, эти величины равны в пересечении своих областей определения, по крайней мере в комплексной окрестности в страте $\partial_G \mathfrak{Z}^{\mathbb{C}}$ точки $(\vec{h}, \mu)$. Сам страт $\partial_G \mathfrak{Z}^{\mathbb{C}}$ является комплексным многообразием коразмерности $|G| - 1$.

Нам осталось доказать аналитичность давления в гладких стратах $\partial_G \wp$ по части переменных. Возьмем точку в страте $\partial_G \wp$ (или соответствующую точку в $\partial_G \mathfrak{Z}$) и убедимся, что давление является голоморфным в области $\text{Re } \Delta \vec{p}|_{\Phi \setminus G}(\vec{h}, \mu) < 0$, т.е. в подмногообразии $\partial_G \mathfrak{Z}$, определяемом уравнением $\vec{p}|_G(\vec{h}, \mu) = \text{const}$. Таким образом, в окрестности каждой точки в страте гладкого многообразия $\partial_G \mathfrak{Z}$ (его вещественная коразмерность равна $|G| - 1$) мы выделяем комплексное подмногообразие комплексной размерности $|\Phi \setminus G|$ с помощью уравнения $\vec{p}|_G(\vec{h}, \mu) = \text{const}$. Чтобы убедиться, что давление $p_q(\vec{h}, \mu)$, $q \in G$, является голоморфным в области $\text{Re } \Delta \vec{p}(\vec{h}, \mu)|_{\Phi \setminus G} < 0$, нам осталось воспользоваться рассуждениями предыдущего абзаца для давления каждой из устойчивых фаз, откуда и получим необходимое свойство давления.

Итак справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1–5 теоремы 1 при замене $H_0(\vec{\Gamma})$ на $W^{\Lambda}(V | \vec{\Theta})$ и $H_0^{\Lambda}(\vec{\Gamma})$, начиная с некоторого Λ при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$. Тогда области $\wp$, $\mathfrak{Z}$, $\mathcal{M}$

(см. (37) или (21) при достаточно малых ψ_0, ψ_1) являются областями фазовых переходов первого рода, в которых верны теоремы I.4–I.7 и, в частности, следующие утверждения.

1. Контурное уравнение (второе уравнение в (55)) имеет решения в области $\wp = \mathbb{C}^\Phi \times \mathcal{M}$, и в этой области определено непрерывное отображение $\vec{h}(\vec{p}, \mu)$.

2. Решение контурного уравнения и отображение $\vec{h}(\vec{p}, \mu)$ разлагаются в сходящиеся (равномерно в $\wp$) ряды по степеням $\varphi_{\vec{p}}$, эти функции C^∞ -гладки в каждом страте $\partial_G \wp$ и продолжаются до аналитических в области $\text{Re } \Delta \vec{p}|_{\Phi \setminus G} < \vec{0}_{\Phi \setminus G}$ по переменным $\vec{p}|_{\Phi \setminus G}$, а их производные продолжаются до непрерывных функций в замыкании страта; предельные значения производных являются гладкими в стратах $\partial_{G_1} \wp$, $G \subset G_1$ и аналитическими в области $\text{Re } \Delta \vec{p}|_{\Phi \setminus G_1} < \vec{0}_{\Phi \setminus G_1}$.

3. В $\partial_G \wp$ норма $d\vec{s}_{\text{Im } \vec{p}}(\vec{p}, \mu)/d\vec{p}$ меньше единицы. Отображение $\vec{h}(\vec{p}, \mu)$ взаимно однозначно при фиксированном μ .

4. Образ $\wp$ при отображении $(\vec{p}, \mu) \rightarrow (\vec{h}(\vec{p}, \mu), \mu)$ содержит $\mathbb{C}^\Phi \times \mathcal{M}$. Образы стратов $\partial_G \wp$ — C^∞ -гладкие многообразия вещественной коразмерности $|G| - 1$; образы стратов $\partial_G \wp^\mathbb{C}$ суть комплексные многообразия $\partial_G \mathfrak{Z}^\mathbb{C}$ комплексной коразмерности $|G| - 1$. Обратное отображение $\vec{p}(\vec{h}, \mu)$ непрерывно на $\mathfrak{Z}$, C^∞ -гладко в каждом страте $\partial_G \mathfrak{Z}$ и аналитично в области $\text{Re } \Delta \vec{p}(\vec{h}, \mu)|_{\Phi \setminus G} < \vec{0}_{\Phi \setminus G}$, его производные продолжаются до непрерывных в замыкании страта $\partial_G \mathfrak{Z}$, а предельные значения производных являются гладкими в $\partial_{G_1} \mathfrak{Z}$, $G \subset G_1$ и аналитическими в области $\text{Re } \Delta \vec{p}(\vec{h}, \mu)|_{\Phi \setminus G_1} < \vec{0}_{\Phi \setminus G_1}$.

5. Давление в модели, найденное как термодинамический предел статистических сумм (1) и (2) с устойчивым граничным условием q , равно

$$p_q(\vec{h}, \mu) = p_{\max, \mathbb{R}}(\vec{h}, \mu) + i \text{Im } p_q(\vec{h}, \mu). \quad (64)$$

Оно непрерывно в $\mathfrak{Z}$, аналитично в каждом страте $\partial_G \mathfrak{Z}^\mathbb{C}$ и является гладкой функцией в каждом страте $\partial_G \mathfrak{Z}$, предельные значения производных давления гладкие в каждом из стратов $\partial_{G_1} \mathfrak{Z}$, $G_1 \subset G$, и аналитические в $\partial_{G_1} \mathfrak{Z}^\mathbb{C}$, $G_1 \subset G$. Если $\vec{h} = \vec{h}(\mu)$, то давления определяются функцией $p_q(\mu) := p_q(\vec{h}(\mu), \mu)$. Страты существования фаз $\partial_G \mathcal{M}^C := \{\mu \in \mathcal{M} : \vec{h}(\mu) \in \partial_G \mathfrak{Z}^\mathbb{C}\}$ являются аналитическими множествами.

6. Для статистических сумм (1) справедливы следующие представления:

$$\Xi_q(V, H) = e^{(p_{\max, \mathbb{R}}(\vec{h}, \mu) + i \text{Im } p_q(\vec{h}, \mu))|V|} \Delta_q(V) \sigma_q(V), \quad (65)$$

где для s_q , $\ln \Delta_q$, $\ln \delta_q$ сходятся соответствующие кластерные разложения (16). Для устойчивых фаз $\sigma_q(V) = 1$, $\Xi_q(V, H) = e^{p_q|V|} \Delta_q(V)$ и

$$|\ln \Xi_q(V, H) - p_q|V|| \leq C \psi_0^{2\nu} |\partial V|, \quad q \in G(\mu). \quad (66)$$

7. Гиббсовские состояния, построенные по граничному условию $q \in G(\mu)$, являются малым возмущением фазы q (теорема I.5). При пересечении страта фазовой диаграммы в пространстве параметров одна из производных давления по $\vec{h}$ разрывна.

8. Справедлив критерий устойчивости фаз (теорема 2).

9. Оценки производных различных величин определяются теоремой 5.

10. В области фазовых переходов первого рода статистические суммы с устойчивым граничным условием не имеют нулей (обобщение теоремы Ли–Янга).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 основано на уточнении оценки величины $\sigma_q(V)$ в (24) по сравнению с той, которая была использована при доказательстве теоремы I.4. Как и при доказательстве теоремы I.4, мы оцениваем величину $\sigma_q(V)$ суммой вида (ниже в этом разделе $b \equiv b_q^e$, V – куб)

$$\sum_{\substack{B: \min B=B, \\ V(B) \subset V}} |b|^V (|b(1-b)|b^{-V(\partial)} \overline{F}_q(\partial) \exp\{\overline{\omega}|\partial|\})^B.$$

Используя оценки приложения к работе [26] для статистических сумм газа “твердых объемов”, имеем, что эта сумма не превосходит d_m , $m = \max_{V(\partial) \subset V, U_0(\partial, \partial V)=0} |V(\partial)|$. Последовательность d_j , $j = 1, 2, \dots$, определена рекуррентно:

$$d_1 = b^2, \quad d_j = d_{j-1}^{(j+1)/j} + t_j, \quad t_j := b(1-b)e^{-\tau j^{(\nu-1)/\nu}}, \quad e^{-\tau} = C_4 \psi_0. \quad (67)$$

В разделе I.5 мы использовали оценку $d_m \leq 1$, легко вытекающую из (67) при достаточно больших τ . Оказывается, последовательность d_j в основном правильно описывает поведение статистических суммы с неустойчивым граничным условием в зависимости от внешнего поля, энергетического барьера τ и величины объема j . В частности, с ростом j при b , близком к единице, и больших τ у последовательности d_j есть два режима поведения: при малых j в рекуррентном соотношении превалирует первое слагаемое и $d_j \approx b^{j+1}$, а для достаточно больших j первое слагаемое становится меньшим второго и тогда $d_j \approx e^{-\tau_1 j^{(\nu-1)/\nu}}$. Для доказательства теоремы 2 достаточно следующей леммы ($h := -\ln b$).

ЛЕММА 4. *Найдется достаточно большое τ_0 , зависящее лишь от ν , такое, что при $\tau \geq \tau_0$, $b < 1$, $j \geq i_0 = (\tau/(2h))^\nu$ для последовательности (67) справедливо неравенство $d_j \leq e^{-j^{(\nu-1)/\nu} \tau/2}$. Кроме того, $d_j \leq 1$ для всех j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $d_j \geq b^{j+1}$. Следовательно,

$$\ln d_j \leq \frac{(j+1)}{j} \ln d_{j-1} + \frac{t_j}{d_{j-1}^{(j+1)/j}} \leq \dots \leq (j+1) \left(-h + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{t_k}{k b^k} \right).$$

Последнюю сумму можно записать как $\sum_{k=1}^j e^{-\tau k^{1-1/\nu} + hk} / k$. Для $j = i_0 = (\tau/(2h))^\nu$ имеем

$$\sum_{k=1}^{i_0} \frac{e^{-\tau k^{1-1/\nu} + hk}}{k} \leq \sum_{k=1}^{i_0} \frac{e^{-(\tau/2)k^{1-1/\nu}}}{k} \leq e^{-\tau_1},$$

где

$$2\tau_1 = \tau - C(\tau), \quad C(\tau) = \ln \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-(\tau/2)(k^{1-1/\nu}-1)} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0.$$

Тем самым $\ln d_{i_0} \leq i_0(-h + b(1-b)e^{-\tau_1}) \leq -\tau i_0^{(\nu-1)/\nu} / 2$. Для того чтобы неравенство леммы выполнялось для $j+1$, если оно верно для j , достаточно, как это вытекает из (67), чтобы были выполнены неравенства

$$e^{-\tau j^{1-1/\nu} (1+1/j)/2} + b(1-b)e^{-\tau(j+1)^{1-1/\nu}} \leq e^{-\tau(j+1)^{1-1/\nu}/2},$$

или

$$e^{(1+1/j-(1+1/j)^{1-1/\nu})(-\tau(j^{1-1/\nu})/2) + b(1-b)e^{-\tau(j+1)^{1-1/\nu}/2}} \leq 1,$$

или

$$e^{-\tau/(2\nu j^{1/\nu})} + b(1-b)e^{-\tau(j+1)^{1-1/\nu}/2} \leq 1.$$

Так как производная левой части последнего неравенства отрицательна при больших τ , лемма 4 доказана.

2. Оценка функций Урселла и их сумм. Приведем стандартную связь между гамильтонианом и потенциалами в классических моделях статистической физики. Пусть X – конечное множество (множество “частиц”) и для каждого $Y \subset X$ определено число $H(Y)$ – гамильтониан или энергия взаимодействия частиц Y . Многочастичные потенциалы и гамильтониан связаны соотношениями

$$H(Y) = \sum_{Y_1 \subset Y} W([Y_1]), \quad W([Y]) = \sum_{Y_1 \subset Y} (-1)^{|Y \setminus Y_1|} H(Y_1).$$

Пусть A – разбиение Y ($A \in R[Y]$, $X(A) = Y$). Тривиальное разбиение Y , состоящее из $|Y|$ элементов, обозначим $[Y]$. Определим множество разбиений A как те $C \in R[X(A)]$, каждый элемент которых является объединением некоторых групп из A , $C \in RA$. Определим условный гамильтониан и энергию взаимодействия групп A при условии Y_1 как соответственно

$$H(Y | Y_1) := H(Y \cup Y_1) - H(Y_1), \quad Y \cap Y_1 = \emptyset, \\ H(A | Y_1) := H(X(A) | Y_1) - \sum_{Y_2 \in A} H(Y_2 | Y_1), \quad Y_1 \cap X(A) = \emptyset.$$

Легко видеть, что $H(A | Y_1) = \sum_{B \subset A} W(B | Y_1)$, где

$$W(B | Y_1) = \sum_{B_1 \subset B} (-1)^{|B \setminus B_1|} H(B | Y_1) = \sum_{B_1 \subset B} (-1)^{|B \setminus B_1|} H(X(B_1) \cup Y_1) = \\ = \sum_{\substack{Y_2 \subset X(B) \cup Y_1 : \\ Y_2 \cap Y_3 \neq \emptyset \ \forall Y_3 \in B}} W([Y_2]). \quad (68)$$

Так как для всех $x \in Y_2 \in A$ выполнено тождество

$$W(A | Y_1) = W(Y_2 \setminus x, A \setminus Y_2 | Y_1) + W(x, A \setminus Y_2 | Y_1 \cup Y_2 \setminus x),$$

получаем, что

$$W(A | Y_1) = \sum_{\substack{Y \subset X(A) : \\ |Y \cap Y_2| = 1 \ \forall Y_2 \in A}} W([Y] | Y^1(Y) \cup Y_1), \quad (69)$$

где $Y^1(Y) \cap Y = \emptyset$ и $Y^1(Y)$ определяется последовательным выбором $x \in Y_2 \in A$ в предпоследнем тождестве. Заметим также, что $H([Y]) = H([Y \setminus x]) + W(x, Y \setminus x)$, откуда при любом упорядочивании элементов $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ имеем представление

$$H([Y]) = \sum_{y \in Y \setminus y_k} W(y, Y(y)), \quad (70)$$

где $Y(y_i) = \{y_{i+1}, \dots, y_k\}$. Из последнего представления, очевидно, вытекает неравенство

$$\operatorname{Re} H([Y]) \geq - \sum_{y \in Y \setminus y_0} B(y) =: -B(Y \setminus y_0), \quad (71)$$

где $B(y) := \max_{X, Y: Y \subset X \setminus y} \{0, \operatorname{Re} -W(y, Y)\}$.

Напомним, что функции Урселла определены следующим образом:

$$\varphi(A | Y_1) := \sum_{C \in RA} (-1)^{|C|} (|C| - 1)! \prod_{Y \in C} e^{-\beta H([Y]_A | Y_1)},$$

где $[Y]_A$ – разбиение Y на группы из A . Воспользуемся β -представлением функций Урселла, полученным в [27] для гамильтонианов с двухчастичным потенциалом. Дифференцируя по β функцию Урселла и, по существу, повторяя вывод соотношения (6) в [27], находим

$$\varphi(A | Y_1) = - \int_0^\beta d\beta_1 \sum_{C \subset A} W(C | Y_1) e^{-\beta_1 H(C | Y_1)} \varphi(\hat{C}A | Y_1)|_{\beta=\beta_1},$$

где $\hat{C}A$ – такое разбиение из RA , в котором по сравнению с A объединены в одно целое группы из C . Итерации предыдущего тождества дают

$$\varphi(A | Y_1) = \sum_{l=1}^{|A|-1} (-1)^l \int_{0 \leq \beta_1 \leq \dots \leq \beta_l \leq \beta} (d\beta)^l \sum_{\substack{C_1 \subset A, \\ C_2 \subset \hat{C}_1 A, \\ \dots \\ \hat{C}^l = X(A)}} \prod_{i=1}^l W(C_i) e^{-\beta_i H(C_i | Y_1)}. \quad (72)$$

Как и в [27], можно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^k H(C_i | Y_1) = \sum_{Y \in \hat{C}^k A} H([Y]_A | Y_1).$$

Перейдя к переменным $t_k = \beta_k - \beta_{k+1} \geq 0$, показатель экспоненты в (72) выразим через t_k , воспользуемся также предыдущим тождеством и неравенством (71), тогда

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^l \beta_i H(C_i | Y_1) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^l t_k \sum_{Y \in \hat{C}^k A} H([Y]_A | Y_1) \geq -\beta B(X \setminus x_0). \quad (73)$$

Введем функции

$$\bar{W}(Y) := \max_{Y_1 \subset X \setminus y} |W([Y] | Y_1)|, \quad \bar{W}^{(k)}(Y) := \max_{Y_1 \subset X \setminus y} |W^{(k)}([Y] | Y_1)|. \quad (74)$$

Отметим, что из последнего определения и формулы (69) получаем

$$|W^{(k)}(A)| \leq \sum_{Y \cap^* A \neq \emptyset} \bar{W}^{(k)}(Y) =: \bar{W}^{(k)}(A), \quad k \geq 0, \quad (75)$$

где неравенство $k \geq 0$ является покомпонентным; $Y \cap^* A \neq \emptyset$ означает, что $|Y \cap Y_2| = 1$ для всех $Y_2 \in A$. Обозначим $\{\gamma_{x_0}(X)\}$ множество “обобщенных деревьев” с корнем

x_0 , множеством вершин X и множеством “обобщенных линий” $\pi(\gamma)$, где каждой “обобщенной линии” сопоставлен потенциал $\bar{W}(Y)$. Теперь нетрудно получить необходимые оценки.

ЛЕММА 5. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Справедливы оценки*

$$|\varphi(X)| \leq e^{B(X \setminus x_0)} \sum_{\gamma_{x_0}(X)} \prod_{Y \in \pi(\gamma)} \bar{W}(Y)$$

и соответствующие оценки производных, в которых формальная производная B равна

$$B^{(k)}(y) := \max_{Y \subset X \setminus y} |W^{(k)}(y, Y)|, \quad k \neq 0.$$

2. *Мажорантными оценками сумм относительно z , т.е. оценками для*

$$\bar{\rho} := \sum_{X \ni x_0} |z^X \varphi([X])| e^{-U^0(X)}, \quad \bar{\rho}^{(k)} := \sum_{X \ni x_0} |(z^X \varphi(X))^{(k)}| e^{-U^0(X)}, \quad (76)$$

в которых $U_0(X) := \sum_{x, y \in X} U_0(x, y)$, $U_0(x, y) = 0, \infty$, являются решения уравнений

$$\bar{\omega}(x) = |z(x)| \exp \left\{ \sum_X \bar{W}(x \cup X) (\bar{\omega} e^B)^X e^{-U^0(x \cup X)} \right\}. \quad (77)$$

Кроме того, если найдутся величины $\bar{\omega}_0^{(k)}(x)$ такие, что

$$\left\{ |z(x)| \exp \left\{ \sum_X \bar{W}(x \cup X) (\bar{\omega}_0 e^B)^X e^{-U^0(x \cup X)} \right\} \right\}^{(k)} \leq \bar{\omega}_0^{(k)}(x),$$

то $\bar{\rho}^{(k)} \leq \bar{\omega}_0^{(k)}(x)$, и соответствующие ряды (76) сходятся.

Доказательство первого утверждения леммы вытекает из представления (72), а также формул (69), (71)–(75). Формула (77) задает производящую функцию “деревьев” и соответствующих производных, откуда получаем второе утверждение леммы.

3. Оценки производных произвольного порядка. Для анализа фазовой диаграммы необходимы оценки не только первых, но и вторых производных термодинамических функций. Сначала рассмотрим двухкомпонентную модель с контурным функционалом $\mathcal{F}_q(\partial)$ и нулевым внешним полем (см. раздел I.4) и обобщим п. 3 теоремы I.3 (индекс q в лемме 6 фиксирован).

ЛЕММА 6. *Если найдутся положительные величины $\bar{\omega}_q^{(k)}$, $0 \leq k < k_0$, (k, k_0 – мультииндексы, неравенства понимаются как покомпонентные) такие, что*

$$\sum_{\partial \hat{\cap} 0 \neq \emptyset} [|\mathcal{F}_q(\partial)| e^{\bar{\omega}_q |\partial|}]^{(k)} \leq \bar{\omega}_q^{(k)}, \quad (78)$$

где $[\cdot]^{(k)}$ – k -я формальная производная в левой части (78), то справедливы следующие мажорантные оценки относительно $\mathcal{F}_q(\partial)$ и производных $\mathcal{F}_q(\partial)$:

$$\begin{aligned} |s_q^{(k)}| &\leq \bar{\omega}_q^{(k)}, & |\Delta_q^{(k)}(V)| &\leq (e^{\bar{\omega}_q |\partial V|})^{(k)}, & |\delta_q^{(k)}(\partial \cup B)| &\leq (e^{\bar{\omega}_q \|B\|})^{(k)}, \\ |\ln^{(k)} \Delta_q(V)| &\leq \bar{\omega}_q^{(k)} |\partial V|, & |\ln^{(k)} \delta_q(\partial \cup B)| &\leq \bar{\omega}_q^{(k)} \|B\|. \end{aligned} \quad (79)$$

Теперь рассмотрим контурные уравнения (17) с уравнениями на производные от величин $F_q(\partial)$, $\sigma_q(V)$, $\mathcal{F}_q(\partial)$, полученных дифференцированием (17) по параметрам модели. Предположим, что найдутся величины $\bar{\omega}_q^{(k)}$, $a_q^{(k)}$ такие, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta_q^{(k)}(V)| &\leq (e^{\bar{\omega}_q|\partial V|})^{(k)}, \\ |\delta_q^{(k)}(\partial \cup B)| &\leq (e^{\bar{\omega}_q\|B\|})^{(k)}, \\ |\sigma_q^{(k)}(V)| &\leq (b^V e^{a_q|V|})^{(k)} (be^{a_q})^{-V} =: \bar{\sigma}_q^{(k)}(V), \\ \bar{\sigma}_q^{(0)}(V) &:= b^{m_1(\partial V)}, \quad b = |b_q^e|. \end{aligned} \quad (80)$$

Оценкой функционалов $F_q^{(k)}(\partial)$, $\mathcal{F}_q^{(k)}(\partial)$ при $k \neq 0$ являются функционалы

$$\begin{aligned} \bar{F}_q^{(k)}(\partial) &:= \sum_{\vec{\partial}^{\text{ex}} = \partial_q} |\varphi_{\vec{\partial}} e^{-pV_{\vec{\partial}} + \bar{\omega} \vec{\partial}} \bar{\sigma}(\vec{\partial})|^{(k)}, \\ \bar{\mathcal{F}}_q^{(k)}(\partial) &:= (\bar{F}_q(\partial) \bar{\sigma}_q(V(\partial)))^{(k)}, \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$\bar{\omega} \vec{\partial} := \sum_{i \in l(\vec{\partial})} \bar{\omega}_{k_i} |\partial V_i(\vec{\partial})|, \quad \bar{\sigma}(\vec{\partial}) = \prod_{i \in l(\vec{\partial})} \bar{\sigma}_{k_i}(\vec{\partial})(V_i(\vec{\partial})).$$

Правая часть (81) выписана из уравнений (17) после использования в них (80). Условие согласованности оценок с контурным уравнением (17) имеет вид

$$\sum_{\partial \cap 0 \neq \emptyset} \bar{\mathcal{F}}_q^{(k)}(\partial) \leq \bar{\omega}_q^{(k)}, \quad (82)$$

$$\sum_{B: V(B) \subset V} |\bar{F}_q^B \varphi_{\partial V \cup B}^q e^{\bar{\omega}_q \|B\|}|^{(k)} \leq \bar{\sigma}_q^{(k)}(V(\partial)), \quad (83)$$

так как при выполнении (82), как это следует из леммы 5, верны первые два неравенства (80). Как и в доказательстве теоремы I.4, можно получить, что оценка левой части (83) воспроизводится ее правой частью в области $\bar{S}_1(a_q)$ (см. (20)). Действительно, каждое слагаемое в сумме в правой части (83) можно представить в виде произведения сомножителей, в каждом из которых есть лишь один минимальный контур из B . После взятия k -й производной мы фиксируем те сомножители, которые дифференцируются, по оставшимся сомножителям проводится суммирование и используются те же оценки, что и перед леммой 4; сумма этих величин без фиксированных сомножителей не превосходит единицы, если $b_q^e \in \bar{S}_1(a_q)$. Затем суммируем по тем k_1 сомножителям, которые дифференцировались. Это дает величину, не превосходящую $|V|^{k_1}$, умноженную на соответствующие производные. Нетрудно видеть, что оценка левой части (83) воспроизводится правой частью (83), где $a_q \leq \tilde{a}$ (см. (49)) и более точно определено формулой (I.56). Увеличив еще более a_q , можно взять $a_q = \bar{\omega}_{1,q} e^{\bar{\omega}_{V,q}}$, где

$$\bar{\omega}_{1,q} := \sum_{\partial: 0 \in V(\partial^q)} 2|V(\partial^q)| \bar{F}_q(\partial) e^{\bar{\omega}_q |\partial_q|}, \quad \bar{\omega}_{V,q} := \sum_{\partial^q: 0 \in V(\partial^q)} |b_q^e|^{V(\partial^q)} \bar{F}_q(\partial) e^{\bar{\omega}_q |\partial|}.$$

Итак мы получили следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5 (оценки производных). Если найдутся величины $\bar{\omega}_q^{(k)} \geq 0$, $0 \leq k < k_0$, $k_0 \leq \infty$, такие, что выполнено (82), (83), то величины s_q , $F_q(\partial)$, $\ln \Delta_q$, $\ln \delta_q$, σ_q являются $k_0 - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями в замыкании каждого страта фазовой диаграммы. Для этих величин выполнены неравенства (79), (80) и неравенство $|\mathcal{F}_q^{(k)(\partial)}| \leq \bar{\mathcal{F}}_q^{(k)}(\partial)$.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность Г. П. Мещеряковой за чтение рукописи и ряд ценных замечаний по ней.

Список литературы

- [1] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, *ТМФ*, **25**:3 (1975), 358–369; **26**:1 (1976), 61–76.
- [2] J. Z. Imbrie, *Commun. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 261–304; **82**:3, 305–343.
- [3] M. Zahradnik, *Commun. Math. Phys.*, **93**:4 (1984), 559–581.
- [4] R. Kotecký, D. Preiss, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 1984, №3(suppl.), 161–164.
- [5] А. Г. Басуев, *ТМФ*, **58**:2 (1984), 261–278.
- [6] J. Brimont, K. Kuroda, J. L. Lebowitz, *Commun. Math. Phys.*, **101**:4 (1985), 501–538.
- [7] J. Fröhlich, A. Bovier, U. Glaus, “Mathematical aspects of the physics of disordered systems”, *Critical Phenomena, Random Systems and Gauge Theories* (Les Houches, France, 1984), North-Holland, Amsterdam, 1986, 725–893.
- [8] J. Slawny, “Low-temperature properties of classical lattice systems: phase transitions and phase diagrams”, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 11, eds. C. Domb, J. L. Lebowitz, Academic Press, London–New York, 1987, 127–205.
- [9] А. Г. Басуев, *ТМФ*, **64**:1 (1985), 103–129; **72**:2 (1987), 255–268.
- [10] R. L. Dobrushin, M. Zagradnik, “Phase diagramm for continuous spin models: An extension Pirogov–Sinai theory”, *Mathematical Problems of Statistical Mechanics and Dynamics*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **6**, ed. R. L. Dobrushin, Reidel, Dordrecht, 1986, 1–123.
- [11] F. Koukiou, D. Petritis, M. Zahradnik, *Commun. Math. Phys.*, **118**:3 (1988), 365–383.
- [12] Yong Moon Park, *Commun. Math. Phys.*, **114**:2 (1988), 219–241.
- [13] J. Brimont, J. Slawny, *J. Statist. Phys.*, **54**:1–2 (1989), 89–161.
- [14] J. Fröhlich, L. Rey-Bellet, D. Ueltschi, *Commun. Math. Phys.*, **224**:1 (2001), 33–63.
- [15] M. Zahradnik, *J. Statist. Phys.*, **47**:5–6 (1987), 725–755.
- [16] A. C. D. van Enter, R. Fernández, A. D. Sokal, *J. Statist. Phys.*, **72**:5–6 (1993), 879–1167.
- [17] R. H. Schonmann, N. Yoshida, *Commun. Math. Phys.*, **189**:2 (1997), 299–309.
- [18] M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes et al., *Commun. Math. Phys.*, **251**:1 (2004), 79–131.
- [19] S. N. Isakov, *Commun. Math. Phys.*, **95**:4 (1984), 427–443.
- [20] С. Н. Исаков, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 426–440.
- [21] S. Friedli, Ch.-E. Pfister, *Commun. Math. Phys.*, **245**:1 (2004), 69–103.
- [22] M. E. Fisher, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**:5 (1964), 377–410.
- [23] Д. Рюэль, *Статистическая механика. Строгие результаты*, Мир, М., 1971.
- [24] R. B. Griffiths, “Rigorous results and theorems”, *Phase Transition and Critical Phenomena. Vol. 1. Exact Results*, eds. C. Domb, M. S. Green, Academic Press, London–New York, 1972, 7–109.
- [25] C. N. Yang, T. D. Lee, *Phys. Rev.* (2), **87**:3 (1952), 404–409; 410–419.
- [26] А. Г. Басуев, *ТМФ*, **58**:1 (1984), 121–136.
- [27] А. Г. Басуев, *ТМФ*, **39**:1 (1979), 94–105.

Поступила в редакцию 29.09.2006,
после доработки 20.03.2007