Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Р. Шакиров, Старшие дискриминанты бинарных форм, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 2, 147–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:15:54

© 2007 г.

Ш. Р. Шакиров*

СТАРШИЕ ДИСКРИМИНАНТЫ БИНАРНЫХ ФОРМ

Предложен метод построения систем полиномиальных уравнений, задающих подмногообразия вырожденных бинарных форм с произвольной степенью вырождения.

Ключевые слова: дискриминант, вырожденные формы, алгебраические уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена исследованию вырождения симметрических форм. Известно, что в многообразии всевозможных симметрических форм на $\mathbb{C}^n$ вырожденные формы образуют подмногообразие, инвариантное относительно действия структурной группы $SL(n)$. Это подмногообразие задается единственным полиномиальным уравнением $D = 0$, где D представляет собой $SL(n)$ -инвариантный полином от коэффициентов формы и называется ее дискриминантом.

Данное дискриминантное подмногообразие имеет интересную внутреннюю геометрию: формы с различной степенью вырождения образуют в нем набор подмногообразий, вложенных друг в друга. Естественной задачей является построение систем полиномиальных уравнений, задающих эти подмногообразия. Такие системы уравнений позволяют не только определить, вырождена ли данная форма, но и выяснить, насколько сильно она вырождена.

Наиболее общий подход к решению этой задачи описан в статье [1] в терминах представлений группы $SL(n)$. Простейший случай $n = 2$ связан с теорией алгебраических уравнений от одной переменной. Данная статья посвящена подробному анализу этого случая.

Однородные симметрические формы и условия их вырождения нередко появляются в физических задачах. В частности, возможным их применением является точное (непертурбативное) вычисление негауссовых производящих функционалов в теории поля. В формализме континуального (функционального) интегрирования

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия.
E-mail: shakirov@itep.ru

важную роль играют интегралы вида

$$Z = \int e^{S_{ij}x^i x^j} d^n x = \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det S}},$$

которые называются гауссовыми интегралами. Они хорошо изучены, поскольку форма S является квадратичной формой, а для квадратичной формы дискриминант $D(S)$ в точности равен определителю формы $\det S$. Теория вычисления негауссовых интегралов (с формой произвольной степени) развита хуже. Весьма вероятно, что она тесно связана с теорией дискриминантов и старших дискриминантов.

2. БИНАРНЫЕ ФОРМЫ И ИХ КОРНИ

Бинарной k -формой называется симметрическая форма степени k на пространстве $\mathbb{C}^2$, т.е. однородный полином от двух комплексных переменных

$$P_k(x, y) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} y + a_{k-2} x^{k-2} y^2 + \dots + a_0 y^k.$$

Числа a_i называются коэффициентами формы P . Поскольку основное поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то любой такой полином может быть разложен в произведение k линейных множителей:

$$P_k(x, y) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} y + \dots + a_0 y^k = (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) \dots (\alpha_k x + \beta_k y).$$

Отсюда следует, что ядро формы P (множество решений уравнения $P_k(x, y) = 0$) состоит из k одномерных подпространств

$$\Lambda_i = \{(x, y) \mid \alpha_i x + \beta_i y = 0\}.$$

Эти прямые называются корнями формы P . У бинарной k -формы общего вида есть ровно k несовпадающих корней. Вырожденными формами являются те, у которых некоторые корни совпадают друг с другом.

Корни бинарной формы являются одномерными подпространствами в $\mathbb{C}^2$, т.е. точками проективного пространства $\mathbb{C}P^1$. Тесная связь бинарных форм с обыкновенными алгебраическими уравнениями k -й степени состоит в том, что на $\mathbb{C}P^1$ можно выбрать некоторую карту, например, $y \neq 0$. Поскольку $\dim \mathbb{C}P^1 = 1$, в этой карте каждый корень Λ_i представляется одним комплексным числом λ_i . При этом уравнение

$$P_k(x, y) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} y + \dots + a_0 y^k = 0$$

примет вид

$$P_k(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 = 0,$$

где $z = x/y$ — координата на проективном пространстве в карте $y \neq 0$. Это полиномиальное уравнение k -й степени от одной комплексной переменной, которое имеет ровно k корней λ_i .

Геометрически пространство всех бинарных k -форм представляет собой гладкое многообразие $S^k \equiv S^k \mathbb{C}^2 \sim \mathbb{C}^{k+1}$, в котором вырожденные формы образуют проективные подмногообразия. Основным среди них является дискриминантная поверхность S_2^k – множество всех k -форм, у которых хотя бы два корня совпадают. Она задается одним полиномиальным уравнением

$$D_k = 0,$$

где полином D_k называется дискриминантом k -формы. Например, для квадратичной формы

$$P_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

дискриминант равен

$$D_2(a, b, c) = b^2 - 4ac;$$

для кубической формы

$$P_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

дискриминант есть

$$D_3(a, b, c, d) = -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4db^3 + b^2c^2.$$

Зная дискриминант бинарной формы, мы можем ответить на вопрос, является ли форма вырожденной, т.е. есть ли у нее хотя бы два совпадающих корня. Целью настоящей статьи является построение старших дискриминантов, которые бы к тому же различали степени вырождения, т.е. позволяли установить, сколько корней совпадает у данной формы и с какими кратностями.

На дискриминантной поверхности S_2^k лежат подмногообразия форм с более высокой степенью вырождения. Например, S_3^k – множество всех k -форм, у которых совпадают хотя бы три корня, или $S_{2,2}^k$ – множество всех k -форм, у которых совпадают хотя бы две пары корней.

Степень вырождения данной формы определяется разбиением множества ее корней на совпадающие. Для любого разбиения

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_p,$$

где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$, обозначим $S_{k_1, \dots, k_p}^k$ множество k -форм с таким типом совпадений. В целях упрощения обозначений, если нижний индекс k_j в $S_{k_1, \dots, k_n}$ равен единице, мы не будем его писать. Например, разбиению

$$k = 1 + 1 + \dots + 1$$

соответствует пространство всех k -форм S^k , разбиению

$$k = 2 + 1 + \dots + 1$$

– пространство вырожденных k -форм S_2^k и т.д.

Необходимо заметить, что разбиение $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ не подразумевает, что группы совпавших корней различны между собой. Например, S_4^k содержится в $S_{2,2}^k$, потому что совпадение четырех корней – это частный случай совпадения двух пар корней. Точно так же S_4^k содержится в S_3^k , и все подмногообразия содержатся в S_2^k .

Подмногообразие $S_2^k \subset S^k$ задается одним полиномиальным уравнением, но подмногообразия $S_{k_1, \dots, k_p}^k$ с $k_1 > 2$ имеют меньшую размерность, и поэтому должны задаваться системами из нескольких полиномиальных уравнений. Задача описания таких систем уравнений была поставлена Кэли еще в XIX в., но до сих пор привлекает интерес и все еще исследуется, в том числе самыми современными методами [2].

Группа линейных преобразований $SL(2, \mathbb{C})$

$$x \rightarrow G_{11}x + G_{12}y,$$

$$y \rightarrow G_{21}x + G_{22}y,$$

где $G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1$, естественно действует на симметричные формы на $\mathbb{C}^2$. Ясно, что любое подмногообразие вырожденных форм $S_{k_1, \dots, k_p}^k$, как и дискриминантное подмногообразие S_2^k , инвариантно относительно этого действия, потому что совпадение нескольких прямых на плоскости никак не зависит от выбора базиса в этой плоскости. Поэтому и дискриминант бинарной формы является $SL(2)$ -инвариантным полиномом от ее коэффициентов.

Важным свойством подмногообразий вырожденных форм является SL -инвариантность, которая позволяет применить к их изучению теорию представлений. Это важно потому, что ядро симметрической формы является совокупностью дискретных прямых только в случае $\mathbb{C}^2$. Для $n > 2$ произвольная симметричная форма уже не разлагается на множители, другими словами, не существует дискретного набора корней, и вырождение нельзя сформулировать в терминах совпадения корней. Общая теория вырождения симметричных форм, по всей видимости, должна быть сформулирована в теоретико-групповых терминах.

Однако в случае бинарных форм ядро формы представляет собой конечный набор корней, которые могут совпадать друг с другом с различными кратностями. В этом случае можно построить уравнения, задающие формы с высшими степенями вырождения, используя только понятие корней, теорему Виета и математическую логику.

3. ДИСКРИМИНАНТ

Здесь и далее бинарная форма $P(x, y)$ рассматривается как неоднородный полином $P(z)$ от одной комплексной переменной z . Корням формы соответствуют корни алгебраического уравнения $P(z) = 0$.

Напомним основные факты об алгебраических уравнениях k -й степени от одной комплексной переменной. Такое уравнение имеет вид

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 = 0$$

4. СТАРШИЕ ДИСКРИМИНАНТЫ

Рассмотрим k -форму, ее корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и логическую алгебру Λ , образованную утверждениями

$$E_{ij} : (\lambda_i = \lambda_j)$$

с логическими операциями “И” и “ИЛИ”, которые мы будем обозначать $+$ и $\times$, соответственно.

Для любого типа совпадений корней $S_{k_1, \dots, k_p}^k$ обозначим $L[S_{k_1, \dots, k_p}^k]$ логическое выражение, построенное из элементарных утверждений E_{ij} , которое является определением этого типа совпадения. Определение строится совершенно естественно для любого типа совпадений. Например, определением дискриминантного подмногообразия S_2^k является то, что хотя бы одна пара корней совпадает: либо первый корень совпадает со вторым, либо первый корень совпадает с третьим и т.д., таким образом,

$$L[S_2^k] = E_{12} \times E_{13} \times \dots \times E_{k-1, k} = \bigtimes_{i < j} E_{ij}.$$

Простыми примерами определений являются

$$\begin{aligned} L[S_3^3] &= E_{12} + E_{13} + E_{23}, \\ L[S_{2,2}^4] &= (E_{12} + E_{34}) \times (E_{13} + E_{24}) \times (E_{14} + E_{23}), \\ L[S_4^4] &= E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{23} + E_{24} + E_{34}, \\ L[S_3^4] &= (E_{12} + E_{13} + E_{23}) \times (E_{12} + E_{14} + E_{24}) \times \\ &\quad \times (E_{23} + E_{24} + E_{34}) \times (E_{13} + E_{14} + E_{34}). \end{aligned}$$

Между логическими утверждениями и уравнениями есть непосредственная связь: для любого утверждения из Λ существует эквивалентная ему система уравнений на корни. Например, любому элементарному утверждению E_{ij} соответствует уравнение (для симметричности возведенное в квадрат)

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0.$$

Операции “ИЛИ” соответствует умножение операндов, поскольку произведение равно нулю, если равно нулю один из множителей. Операции “И” буквально соответствует взятие системы уравнений. Например,

$$\begin{aligned} E_{12} &\mapsto (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0, \\ E_{34} &\mapsto (\lambda_3 - \lambda_4)^2 = 0, \\ E_{12} \times E_{34} &\mapsto (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_3 - \lambda_4)^2 = 0, \\ E_{12} + E_{34} &\mapsto \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что дискриминантному случаю S_2^k соответствует одно уравнение

$$L[S_2^k] = E_{12} \times E_{13} \times \dots \times E_{k-1, k} \mapsto \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0,$$

которое упоминалось выше. Совпадению трех корней у 3-формы соответствует система уравнений

$$L[S_3^3] = E_{12} + E_{13} + E_{23} \mapsto \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_3)^2 = 0, \\ (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Логическому выражению

$$L[S_{2,2}^4] = (E_{12} + E_{34}) \times (E_{13} + E_{24}) \times (E_{14} + E_{23})$$

на первый взгляд не соответствует никакая система уравнений. В этом и подобных случаях необходимо раскрывать скобки, пользуясь тем, что логические операции $\times$ и $+$ удовлетворяют обычному распределительному закону

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

При этом определение $L[S_{2,2}^4]$ примет вид

$$\begin{aligned} L[S_{2,2}^4] = & E_{12} \times E_{13} \times E_{14} + E_{12} \times E_{24} \times E_{14} + \\ & + E_{12} \times E_{13} \times E_{23} + E_{12} \times E_{24} \times E_{23} + E_{34} \times E_{13} \times E_{14} + \\ & + E_{34} \times E_{24} \times E_{14} + E_{34} \times E_{13} \times E_{23} + E_{34} \times E_{24} \times E_{23}. \end{aligned}$$

Соответствующая система уравнений есть

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 &= 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 &= 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Итак, для любого типа совпадений корней изложенный выше метод позволяет построить систему уравнений относительно корней, которая эквивалентна определению этого типа совпадений, следовательно, задает множество форм с таким типом совпадений.

Завершающим шагом является выражение этой системы уравнений через коэффициенты формы. Пусть система уравнений, полученная для некоторого типа совпадений, имеет вид

$$P_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & P_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0. \end{aligned}$$

Вообще говоря, полиномы P_i не являются симметрическими функциями от корней, следовательно, не могут быть непосредственно представлены как функции от коэффициентов. Эта проблема легко решается симметризацией, то есть переходом к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} & P_1 + P_2 + \dots + P_m = 0, \\ & P_1P_2 + P_1P_3 + \dots + P_{m-1}P_m = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & P_1P_2\dots P_m = 0. \end{aligned}$$

Уравнения этой системы симметричны по полиномам P_i . Как следствие они симметричны по корням и выражаются через коэффициенты с использованием формул Виета. В результате мы имеем решение поставленной задачи: получена система уравнений на коэффициенты формы, которая задает многообразие форм с данным типом вырождения.

5. СЛУЧАЙ S_3^3

Для иллюстрации мы рассмотрим условие совпадения трех корней у кубической бинарной формы

$$P_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

и соответствующее множество вырожденных форм S_3^3 . Определение этого совпадения следующее: все три корня равны друг другу и

$$L[S_3^3] = E_{12} + E_{13} + E_{23}.$$

Соответствующая система уравнений

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0, \\ & (\lambda_1 - \lambda_3)^2 = 0, \\ & (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 0 \end{aligned}$$

после симметризации принимает вид

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 0, \\ & (\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 0, \\ & (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 0 \end{aligned}$$

и выражается через коэффициенты a, b, c, d с помощью формул Виета:

$$\frac{b}{a} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$\begin{aligned}\frac{c}{a} &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ \frac{d}{a} &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

Мы опускаем несложные преобразования, которые дают следующий результат:

$$\begin{aligned}2(b^2 - 3ac) &= 0, \\ (b^2 - 3ac)^2 &= 0, \\ -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4db^3 + b^2c^2 &= 0.\end{aligned}$$

Эта система уравнений эквивалентна определению совпадения трех корней и, следовательно, задает подмногообразие $S_3^3 \subset S^3$. Второе уравнение зависимо от первого и может быть опущено.

Необходимо заметить, что эта система не является $SL(2)$ -инвариантной, хотя многообразие S_3^3 , которое она определяет, инвариантно. Это значит, что преобразованная под действием $SL(2)$ система задает то же самое многообразие. Обозначив через G произвольный элемент $SL(2)$, мы получаем бесконечно много систем вида

$$\begin{aligned}2Z(G) &= 0, \\ (Z(G))^2 &= 0, \\ -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4db^3 + b^2c^2 &= \text{inv} = 0,\end{aligned}$$

где $Z(G)$ – орбита полинома $b^2 - 3ac$ под действием группы:

$$Z(G) = G_{11}^2(b^2 - 3ac) + G_{11}G_{12}(bc - 9ad) + G_{12}^2(c^2 - 3bd).$$

Любая из этих систем задает многообразие S_3^3 форм с тремя совпавшими корнями.

Интересным фактом является то, что множество совместных нулей всей орбиты $Z(G)$, т.е. множество форм, для которых вся орбита $Z(G)$ равна нулю, в точности совпадает с S_3^3 . Это позволяет считать орбиту $Z(G)$ старшим дискриминантом в случае совпадения трех корней из трех. Вся орбита, конечно, является $SL(2)$ -инвариантным объектом. С точки зрения теории представлений эта орбита реализует некоторое неприводимое представление группы $SL(2)$ в пространстве квадратичных полиномов от коэффициентов.

6. СЛУЧАЙ S_3^4

В качестве второго примера построим систему уравнений, определяющую формы четвертой степени

$$P_4(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4,$$

которые имеют один корень кратности 3. Определение интересующего нас типа совпадений имеет вид

$$L[S_3^4] = (E_{12} + E_{13} + E_{23}) \times (E_{12} + E_{14} + E_{24}) \times (E_{23} + E_{24} + E_{34}) \times (E_{13} + E_{14} + E_{34}).$$

Используя обычные правила математической логики, несложно проверить, что это определение эквивалентно более простому утверждению

$$L' = E_{12} \times E_{34} + E_{13} \times E_{24} + E_{14} \times E_{23},$$

которому соответствует система уравнений

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2 = 0,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2 = 0,$$

$$(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 = 0.$$

Симметризуя эту систему, мы получаем

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 = 0, \\ &(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2 \times \\ &\quad \times (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 = 0, \\ &(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2 = 0. \end{aligned}$$

Эта система с помощью формул Виета

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \\ \frac{c}{a} &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4, \\ \frac{d}{a} &= -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4), \\ \frac{e}{a} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{aligned}$$

может быть выражена через коэффициенты формы a, b, c, d, e . Вычисление дает следующий результат:

$$2(c^2 - 3bd + 12ae) = 0,$$

$$(c^2 - 3bd + 12ae)^2 = 0,$$

$$D_4 = 0.$$

В третьем уравнении системы левая часть равна дискриминанту формы четвертой степени. Как и в предыдущем примере, второе уравнение оказалось зависимо от первого и может быть опущено.

Интересным фактом является то, что все уравнения этой системы инвариантны относительно действия группы $SL(2)$. Инвариантный полином $c^2 - 3bd + 12ae$ называется аполярной. Таким образом, старшим дискриминантом, соответствующим случаю совпадения трех корней из четырех, является система двух инвариантов: дискриминанта и аполяры.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый метод позволяет получать системы уравнений, задающих бинарные формы с любым разбиением корней на совпадающие. Идея метода состоит в том, чтобы выбрать на проективном пространстве CP^1 карту, в которой корни представляются комплексными числами, а форма – полиномом от одной переменной. Искомая система уравнений строится в пространстве корней, а затем выражается через коэффициенты с использованием симметрических формул Виета.

Нерешенными остаются вопросы о сопоставлении орбит группы $SL(2)$ и условий вырожденности форм, а также об обобщении этого соответствия на случай размерности пространства $n > 2$.

Благодарности. Автор благодарен В. Долотину и А. Морозову за чрезвычайно полезные дискуссии. Работа выполнена при частичной поддержке Федерального агентства по атомной энергии РФ, Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8004.2006.2) и РФФИ (гранты РФФИ–Италия № 06-01-92059-КЭ, 07-02-006454).

Список литературы

- [1] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to non-linear algebra*, [hep-th/0609022](#).
- [2] J. Chipalkatti, *On equations defining coincident root loci*, [math/0110224](#).

Поступила в редакцию 3.10.2006,
после доработки 2.04.2007