Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, К построению логарифмических расширений $\widehat{sl}(2)_k$ -моделей конформной теории поля, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 3, 291–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:11:27

© 2007 г.

А. М. Семихатов*

К ПОСТРОЕНИЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ $\widehat{sl}(2)_k$ -МОДЕЛЕЙ КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Для положительных целых $p = k + 2$ строится логарифмическое расширение конформной $\widehat{sl}(2)_k$ -теории поля интегрируемых представлений путем взятия ядра двух фермионных скрининговых операторов в резольвенте-бабочке для трехбозонной реализации алгебры $\widehat{sl}(2)_k$. Токи $W^-(z)$ и $W^+(z)$ W -алгебры, действующей в ядре, определяются состоянием старшего веса размерности $4p-2$ и заряда $2p-1$ и $(\theta=1)$ -твистованным состоянием старшего веса той же размерности $4p-2$ и заряда $-2p+1$. Построены $2p$ представлений W -алгебры, вычислены их характеры и показано, что вместе с $p-1$ характерами интегрируемых представлений они порождают представление модулярной группы, структура которого описывается как деформация $(9p-3)$ -мерного представления $\mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathcal{R}_{p-1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1} \oplus \mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{R}_{p-1}$, где $\mathcal{R}_{p-1}$ — $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление на характерах интегрируемых $\widehat{sl}(2)_k$ -представлений, а $\mathcal{R}_{p+1}$ — $(p+1)$ -мерное $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, известное из логарифмической $(p, 1)$ -модели. Размерность $9p-3$ предположительно является размерностью пространства амплитуд на торе, а $\mathbb{C}^n$ при $n=2$ и 3 указывают на размер жордановых клеток в неразложимых представлениях W -алгебры. Показано, что при гамильтоновой редукции токи W -алгебры отображаются в токи триплетной W -алгебры логарифмической $(p, 1)$ -модели.

Ключевые слова: логарифмические конформные теории поля, W -алгебра, фермионные скрининги, резольвента-бабочка, характеры, модулярные преобразования.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	292
2. Алгебра $\widehat{sl}(2)$	298
2.1. Алгебра и спектральный поток.....	298
2.2. Теорема.....	300
2.3. Характеры интегрируемых представлений.....	301

Статья написана по заказу Редколлегии.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: ams@sci.lebedev.ru

2.4. Бозонизация и фермионные скрининги	301
3. Твистованные модули вакимотовского типа и комплексы-бабочки	302
3.1. Вертексные операторы и состояния	302
3.2. Резольвенты-бабочки интегрируемых представлений	305
3.3. Ациклические комплексы-бабочки	315
3.4. “Стейнберговские” модули	316
4. W -алгебра, ее представления, характеры и модулярные преобразования	317
4.1. Токи $W^\pm(z)$	318
4.2. “Узкие” представления W -алгебры $\mathcal{Y}_r^\pm$ и их характеры	321
4.3. Свойства относительно модулярных преобразований	323
5. Гамильтонова редукция к W -алгебре $(p, 1)$ -модели	327
5.1. ТЕОРЕМА	327
5.2. Построение “обратной редукции”	327
5.3. “Редукция” характеров	331
6. Дальнейшие перспективы	332
6.1. Три фермионных скрининга	333
6.2. Соответствие Каждана–Люстига, двойственная квантовая группа и слияния	333
6.3. Более общие модели: “триплетные” W -алгебры вместо $\widehat{sl}(2)$	334
6.4. Другие логарифмические $\widehat{sl}(2)_k$ -модели	335
6.5. Рациональные k	335
6.6. Проективные модули	336
Приложение А. Структура вложений $\widehat{sl}(2)_k$ -модулей Верма	336
Приложение Б. Соглашения относительно тета-функций	339
Приложение В. Некоторые простые трюки с $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлениями	341
В.1. Действие $SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$	341
В.2. Случай $\mathbb{C}^2$	341
В.3. Случай $\mathbb{C}^3$	343

1. ВВЕДЕНИЕ

Логарифмические конформные теории поля (ЛКТП) в двумерии [1], [2] привлекают внимание исследователей с различных точек зрения: в контексте, наиболее близком к теме настоящей работы, они рассматриваются в работах [3]–[6], а в отношении расширенных (W -)алгебр – в работах [7]–[12]; в контексте граничных конформных теорий поля – в работах [13], [14]. С математической точки зрения логарифмические конформные модели и близкие структуры в вертекс-операторных алгебрах рассматривались в работах [15]–[18]; их связь с моделями статистической механики исследовалась в работах [19]–[21]. Различные аспекты логарифмических моделей были разработаны в работах [8], [10], [22]–[29]; их связь с квантовыми группами и “неполупростым” обобщением соответствия Каждана–Люстига [30] исследовалась в работах [11], [31], [32]. ЛКТП можно рассматривать как расширение рациональных

конформных теорий поля [33]–[36] на случай, включающий неразложимые представления киральной алгебры. Определение самой киральной алгебры в логарифмических моделях требует внимания: в известных примерах, начиная с пионерских работ [2], [7], [8], киральная алгебра не совпадает с “наивной”, явной алгеброй симметрии (например, с алгеброй Вирасоро), а является ее нелинейным расширением, т.е. некоторой W -алгеброй (ср. с работами [4], [10]–[12]).

Систематический способ определения модели ЛКТП состоит во взятии ядра дифференциала в комплексе, связанном со скрининговыми операторами, действующими в подходящих пространствах свободных полей. Построенные таким способом логарифмические модели дают естественное обобщение рациональных (которые задаются когомологиями того же дифференциала, ср. с работами [37], [38]), но могут также быть определены и в случае, когда когомологии тривиальны, а потому рациональная модель пуста [10]. Более того, определение логарифмических моделей в терминах ядра скринингов помогает найти киральную W -алгебру этих моделей; в известных $(p, 1)$ - и (p, q) -случаях W -алгебра, представляющая собой симметрию модели, является максимальной локальной алгеброй, действующей в ядре.

В настоящей работе “основанный на скринингах” подход применяется для построения логарифмического расширения хорошо известных минимальных $\widehat{sl}(2)_k$ -моделей интегрируемых представлений. Частично эта задача мотивирована широкой популярностью моделей Весса–Зумино–Виттена и родственных им и, в частности, возможностью построения косет-моделей. Однако успех заранее не гарантирован.

При распространении развитых ранее методов на теории, в которых “наивная” алгебра симметрии (явно реализованная до отождествления W -алгебры) является аффинной алгеброй Ли, можно предвидеть две *взаимосвязанные* трудности. Во-первых, характеры приобретают зависимость от $\nu \in \mathbb{C}$ помимо зависимости от модулярного параметра $\tau \in \mathfrak{h}$. Когда при этом характеры W -алгебры содержат производные тета-функций (а это – типическое свойство ЛКТП), возникают предсказуемые сложности в свойствах модулярных преобразований. Во-вторых, представления размножаются под действием спектрального потока в общем случае до бесконечности, что, как кажется, уводит нас от рационального класса еще дальше, чем это позволительно даже в рамках ЛКТП. Однако ситуация, когда спектральный поток приводит к появлению бесконечного числа неэквивалентных представлений, в действительности уже встречалась в более знакомом случае допустимых (admissible) представлений [39] аффинных алгебр Ли, в частности $\widehat{sl}(2)$. Если характеры понимаются в терминах соответствующего аналитического продолжения, то число получающихся в результате *характерных функций* конечно (ср. с работами [40]–[42]), и, более того, на них реализуется конечномерное представление модулярной группы. Дополнительная сложность, появляющаяся в логарифмическом/неполупростом случае, состоит в том, что пространство амплитуд на торе не исчерпывается характерами, поэтому в игру вступают некоторые другие функции, не являющиеся характерами. В исследовавшихся ранее случаях “без ν ” эти *обобщенные характеры* обычно имели вид произведений характеров на многочлены по τ , причем степень многочленов

определялась размером жордановой клетки [12]; нам предстоит увидеть, как на эту ситуацию влияет появление переменной ν . Продолжая перечисление сложностей, возникающих при изучении ЛКТП, отметим, что W -симметрии этих теорий представляют собой довольно сложные алгебры, теория представлений которых плохо понята в общем случае.

В данной работе показывается, что, несмотря на перечисленные сложности, оказывается возможным достичь определенной согласованности в построении логарифмических расширений минимальных $\widehat{sl}(2)$ -моделей, используя стратегию “скрининги $\longrightarrow$ ядро $\longrightarrow W$ -алгебра $\longrightarrow$ характеры $\longrightarrow$ обобщенные характеры и модулярные преобразования”. Здесь *согласованность* апеллирует к модулярным преобразованиям, условие замыкания которых представляет собой очень мощный критерий непротиворечивости для различных структур в конформной теории поля. В работах [40], [41] (и, возможно, в некоторых других) было замечено, что (в несколько иной ситуации) замыкание множества характерных функций под действием спектрального потока имеет тенденцию приводить к замыканию относительно модулярных преобразований. До некоторой степени это же верно и для предлагаемой логарифмической $\widehat{sl}(2)$ -теории, в которой, как и в других логарифмических моделях, дополнительно возникают обобщенные характеры, но где, кроме того, “поглощение” явной зависимости от ν требует введения матричного фактора автоморфности, т.е. замены (правого) $SL(2, \mathbb{Z})$ -действия $\gamma: f(\tau, \nu) \mapsto f(\gamma\tau, \gamma\nu)$, $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$, на действие $\gamma: f(\tau, \nu) \mapsto j(\gamma; \tau, \nu)f(\gamma\tau, \gamma\nu)$. Здесь j – функция на $SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ (матричнозначная, если f – вектор), удовлетворяющая условию коцикличности

$$j(\gamma\gamma'; \tau, \nu) = j(\gamma'; \tau, \nu)j(\gamma; \gamma'\tau, \gamma'\nu), \quad j(1; \tau, \nu) = 1.$$

Мы исходим из скринингов, выделяющих алгебру $\widehat{sl}(2)$ как свой централизатор в трехбозонной реализации. Для этого имеются две априори неэквивалентные возможности – с одним бозонным и одним фермионным или же с двумя фермионными скринингами. В настоящей работе выбран вариант с *двумя фермионными скринингами*. Два фермионных скрининга Q_- и Q_+ порождают комплексы несколько нетрадиционной Ж-формы

(1.1)

представляющие собой $\widehat{sl}(2)$ -вариант резольвенты-бабочки из работы [43] (см. также работы [44]). Узлы обозначают твистованные (и, как правило, в высокой степени приводимые) $\widehat{sl}(2)_k$ -модули¹⁾. Два типа стрелок, направленных на северо-восток и на юго-восток, соответствуют двум фермионным скринингам, а их композиция дает отображение в центре. При положительных целых $k + 2$ два скрининга коммутируют друг с другом. Когда кохомология оказывается нетривиальной, она сидит в “правом глазу” (о) и дает интегрируемое представление. Мы также строим и используем несколько ациклических комплексов типа бабочки.

Тот факт, что резольвента включает $\widehat{sl}(2)$ -представления с произвольно большими твистами, приводит к ряду проблем (например, суммы их характеров, взятые с разумными весами, расходятся). Поэтому, следуя стратегии “скрининги $\rightarrow$ ядро $\rightarrow W$ -алгебра $\rightarrow \dots$ ”, мы берем ядра не во всех составляющих резольвенту-бабочку модулях, а только в нетвистованных (тех, которые расположены на горизонтальной оси симметрии). Соответственно, W -алгебра, которую мы определяем, отображает только горизонтально между $\widehat{sl}(2)_k$ -модулями, сидящими в узлах на диаграмме (1.1). Порождающие эту W -алгебру токи $W^-(z)$ и $W^+(z)$ определяются с помощью особых векторов, представляющих состояние старшего веса размерности $4p - 2$ и заряда $2p - 1$, а также $(\theta = 1)$ -твистованное состояние старшего веса той же размерности $4p - 2$ и заряда $-2p + 1$, где $p = k + 2$. Более точно, пусть E_n и F_n – генераторы $\widehat{sl}(2)$ (для которых $[E_m, F_n] = km\delta_{m+n,0} + 2H_{m+n}$) и $|\lambda; \theta\rangle$ используется для обозначения вектора старшего веса со спином λ и твистом θ (подробности см. в п. 2.1.2). Пусть $\lambda^+(r, s) = (r - 1)/2 - p(s - 1)/2$ и $\lambda^-(r, s) = -(r + 1)/2 + ps/2$. Токи $W^-(z)$ и $W^+(z)$ W -алгебры представляют собой операторы, соответствующие состояниям

$$|W^- \rangle = (F_{-1})^{3p-1} (E_0)^{2p-1} (F_{-1})^{p-1} (E_0)^{-1} (F_{-1})^{-p-1} |\lambda^+(p-1, 3); 1\rangle, \quad (1.2)$$

$$|W^+ \rangle = (E_{-1})^{3p-1} |\lambda^-(3p-1, 1); 0\rangle, \quad (1.3)$$

где отрицательные степени следует понимать так, как это объясняется в работе [45].

Для этой W -алгебры мы строим $2p$ ее представлений, обозначаемых $\mathcal{Y}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, вычисляем их характеры $\chi_r^\pm(\tau, \nu)$ и исследуем свойства этих характеров относительно спектрального потока и модулярных преобразований. Поскольку теория представлений данной W -алгебры как следует не разработана²⁾, мы используем спектральный поток для порождения множества характерных функций, на котором

¹⁾Резольвента-бабочка отличается от резольвент фельдеровского типа [37], [38] не только своей формой, но и тем, что чем дальше от горизонтальной оси симметрии бабочки находятся модули, тем больше их твисты (параметры преобразования спектрального потока). Спектральный поток можно представлять себе действующим вертикально на диграмме (1.1), что заставляет бабочку “лететь”.

²⁾ W -алгебры в логарифмических моделях можно рассматривать как расширения “минимальных” алгебр (например, алгебры Вирасоро или, как в нашем случае, $\widehat{sl}(2)$) с помощью (потомков) определенных вертексных операторов. Вертекс-операторные расширения привлекали определенный интерес, например, авторов работ [46]–[50].

можно ожидать замыкания действия модулярной группы при добавлении подходящего числа обобщенных характеров (содержащих многочлены по τ). В определенном смысле мы компенсируем недостаток знаний относительно теории представлений W -алгебры путем поиска представления модулярной группы, порожденного из набора тех характеров W -алгебры, которые мы можем явно вычислить, честно занимаясь теорией представлений. Точный результат имеет следующий вид.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. *Представление модулярной группы, порожденное из характеров W -алгебры в логарифмической $\widehat{sl}(2)_k$ -модели с неотрицательным целым $k = p - 2$, представляет собой деформацию посредством матричного фактора автоморфности прямой суммы*

$$\mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}} \oplus \mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}, \quad (1.4)$$

где $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$ – $(p - 1)$ -мерное $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление на интегрируемых $\widehat{sl}(2)_k$ -характерах, $\mathcal{R}_{p+1}$ – $(p + 1)$ -мерное представление, $\mathbb{C}^2$ – определяющее двумерное представление, а $\mathbb{C}^3$ – его симметризованный квадрат; при $\nu = 0$ матричный фактор автоморфности становится равным единичной матрице.

В согласии с имеющимися ожиданиями [6], [9] мы далее показываем (см. теорему 5.1), что гамильтонова редукция действительно связывает логарифмическую $\widehat{sl}(2)_k$ -модель с логарифмической $(p = k + 2, 1)$ -моделью: генераторы W -алгебры (1.2) и (1.3) отображаются под действием гамильтоновой редукции в генераторы триплетной W -алгебры [2], [7], [8] из логарифмической $(p, 1)$ -модели, которые были определены в работе [10] в терминах вирасоровского скрининга. Заметим, что $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление на обобщенных характерах в логарифмической $(p, 1)$ -модели было найдено в работе [11] в виде $\mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$; гамильтонова редукция, в частности, “объясняет” появление там представления $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int} \ 3}$.

Полная размерность $9p - 3$ $SL(2, \mathbb{Z})$ -представления (1.4) кажется, по всей видимости, подходящей размерностью пространства амплитуд на торе, если такое конечномерное пространство вообще можно построить в рамках одного из более прямых подходов. Значения $n = 2$ и $n = 3$ в появляющихся в (1.4) тензорных факторах $\mathbb{C}^n$ указывают на размер жордановых клеток, которые должны встречаться в неразложимых модулях W -алгебры.

Оглядываясь назад, можно видеть, что переменная ν в аргументе характеров приводит к деформации прямых сумм $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлений. $(2p + (p - 1))$ -Мерное пространство, линейно порожденное характерами W -алгебры $(\chi_r^\pm(\tau, \nu))_{1 \leq r \leq p}$ и характерами интегрируемых $\widehat{sl}(2)_k$ -представлений $(\chi_r(\tau, \nu))_{1 \leq r \leq p-1}$, расширяется до $(9p - 3)$ -мерного пространства из представления (1.4) в результате действия двух механизмов. Во-первых, спектральный поток замыкается при добавлении $2p$ функций $\omega_r^\pm(\tau, \nu)$, $1 \leq r \leq p$. Мы обращаемся с ними в точности как с характерами, но

³⁾Гамильтонова редукция на уровне конформных блоков (решений уравнений Книжника–Замолодчикова, см. работы [51] и приведенную в них библиографию) изучалась в работе [9] с целью исследования логарифмических расширений минимальных (p, q) -моделей; в частности, были получены свидетельства в пользу существования W -алгебры в этих моделях.

не обсуждаем здесь их теоретико-представленческий смысл. Во-вторых, как и для характеров в известных ранее ЛКТП “без ν ” [11], [12], определенные комбинации $\chi_r^\pm(\tau, \nu)$, $\chi_r(\tau, \nu)$, $\omega_r^\pm(\tau, \nu)$ становятся частями мультиплетов, т.е. преобразуются в представлениях вида $\mathbb{C}^n \otimes \pi$, где π – некоторое $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, а $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}^2$ или $\mathbb{C}^3$, реализованное на многочленах по τ соответственно степени 1 или 2. Однако при этом оказывается, что явное появление переменной ν в формулах модулярных преобразований приводит не только к “перемешиванию” различных представлений модулярной группы друг с другом, но и к увеличению числа вовлеченных функций, как можно видеть уже из того, что преобразование $\nu \mapsto \nu/(c\tau + d)$ вводит дробно-линейный множитель. Такое поведение можно “поглотить” матричным фактором автоморфности, при отделении которого остается в точности представление (1.4)⁴.

В дальнейшем мы фиксируем уровень k равным любому комплексному числу, не совпадающему с -2 в разделе 2 и в виде $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (и иногда $k = -1$), начиная с п. 3.2. Мы также используем обозначение $p = k + 2$, принося читателю извинения за некоторое отсутствие последовательности, состоящее в том, что формула или две соседние формулы могут содержать как k , так и p . Аналогичная небрежность проявлена и в отношении другого глобального обозначения $j = (r - 1)/2$: j и r используются попеременно.

Работа содержит значительное число рисунков, изображающих структуры подфакторов соответствующих модулей и отображений между ними. Альтернативный способ подачи той же информации состоял бы в сравнимом изобилии формальных обозначений, придание смысла которым все равно потребовало бы некоторой визуализации. Читатель, склонный к тому, чтобы давать каждому объекту специальное название и определяющую формулу, в которой все параметры приведены явно, должен оказаться в силах воспроизвести подробности, исходя из многочисленных надписей на рисунках (например, см. ниже рис. 3.1).

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы фиксируем обозначения и соглашения и напомним стандартные факты, касающиеся алгебры $\widehat{sl}(2)$, спектрального потока и особых векторов в $\widehat{sl}(2)$ -модулях Верма, а затем вводим бозонизацию и соответствующие скрининги, которые будут использоваться ниже. В разделе 3 мы строим резольвенту-бабочку интегрируемых представлений и несколько ациклических комплексов-бабочек. Это дает достаточно информации для построения генераторов W -алгебры $W^\pm(z)$ и представлений $\mathcal{Y}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, и вычисления характеров последних в разделе 4, где также исследуются свойства характеров (расширенных с помощью других функций) с точки зрения спектрального потока

⁴Конечно, необходимость введения матричного фактора автоморфности для выделения конечномерного $SL(2, \mathbb{Z})$ -представления отражает некоторую “патологию”, присущую выбранному здесь формализму, когда число свободных полей (равное 3) больше числа скринингов (равного 2). Как можно видеть из работы [52], более естественным объектом с точки зрения скринингов/квантовой группы может оказаться косет $\widehat{sl}(2)/u(1)$, но его “логарифмизация” – дело будущего. (Добавление при корректуре: этот вопрос рассмотрен в работе [53].)

и модулярного преобразования. В разделе 5 мы вычисляем гамильтонову редукцию $W^\pm(z)$ -генераторов, показывая, что они отображаются в генераторы триплетной W -алгебры из логарифмических $(p, 1)$ -моделей. Раздел 6 представляет собой список тем, которые не были рассмотрены в настоящей работе, но представляют потенциальный интерес, даже если некоторые из них окажутся невыполнимыми практически.

Приложение А целиком относится к разделу 3 и служит для напоминания структуры вложений $\widehat{sl}(2)_k$ -модулей Верма; большинство читателей вполне могут его пропустить. В приложении Б приводятся обозначения и дается сводка ряда фактов о тета-функциях, широко используемых в разделе 4. Приложение В содержит достаточно явное описание возникающих в разделе 4 расширений $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлений в их “функциональной” реализации.

2. АЛГЕБРА $\widehat{sl}(2)$

В данном разделе вводятся обозначения для алгебры $\widehat{sl}(2)$, ее твистованных модулей и особых векторов в модулях Верма, а также трехбозонная реализация и соответствующие скрининги.

2.1. Алгебра и спектральный поток. Аффинная алгебра $\widehat{sl}(2)_k$ уровня k определяется коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [H_m, E_n] &= E_{m+n}, & [H_m, F_n] &= -F_{m+n}, & [H_m, H_n] &= \frac{k}{2}m\delta_{m+n,0}, \\ [E_m, F_n] &= km\delta_{m+n,0} + 2H_{m+n}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$. В терминах токов $X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n z^{-n-1}$, $X = E, H, F$, эти коммутационные соотношения переформулируются как операторные произведения

$$\begin{aligned} H(z)E(w) &= \frac{E(w)}{z-w}, & H(z)F(w) &= \frac{-F(w)}{z-w}, \\ E(z)F(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{2H(w)}{z-w}, & H(z)H(w) &= \frac{k/2}{(z-w)^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сугаваровский тензор энергии–импульса дается стандартным выражением

$$T_{\text{Sug}}(z) = \frac{1}{k+2} \left(\frac{1}{2}E(z)F(z) + \frac{1}{2}F(z)E(z) + H(z)H(z) \right)$$

(здесь и далее подразумевается нормальное упорядочение; для краткости мы также иногда будем писать $AB(z)$ для нормально упорядоченного произведения $A(z)B(z)$). Генераторы алгебры Вирасоро с центральным зарядом $c = 3k/(k+2)$ при этом вводятся как $T_{\text{Sug}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$.

Для каждого $\theta \in \mathbb{Z}$ имеется $\widehat{sl}(2)_k$ -автоморфизм, задаваемый так называемым преобразованием спектрального потока (см. монографию [54])

$$\mathcal{U}_\theta: E_n \mapsto E_{n+\theta}, \quad F_n \mapsto F_{n-\theta}, \quad H_n \mapsto H_n + \frac{k}{2}\theta\delta_{n,0}. \quad (2.3)$$

Преобразование спектрального потока для любого $\widehat{sl}(2)$ -модуля $\mathcal{C}$ дает *твистованный* модуль $\mathcal{U}_\theta \mathcal{C} = \mathcal{C}_{;\theta}$ ⁵⁾.

Для любого $\widehat{sl}(2)_k$ -модуля $\mathcal{C}$ его характер равен

$$\chi^{\mathcal{C}}(q, z) = \text{Tr}_{\mathcal{C}}(q^{L_0 - c/24} z^{H_0}). \quad (2.4)$$

Пусть $\chi_{;\theta}^{\mathcal{C}}(q, z)$ – характер $\chi^{\mathcal{C}, \theta}(q, z)$ твистованного модуля. Далее часто используется следующий элементарный результат.

2.1.1. ЛЕММА [40]. Пусть $\mathcal{C}$ – $\widehat{sl}(2)_k$ -модуль. Тогда характер θ -твистованного модуля выражается как

$$\chi_{;\theta}^{\mathcal{C}}(q, z) = q^{k\theta^2/4} z^{-k\theta/2} \chi^{\mathcal{C}}(q, zq^{-\theta}). \quad (2.5)$$

2.1.2. Твистованные модули Верма. Установим теперь наши соглашения относительно твистованных модулей Верма. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\theta \in \mathbb{Z}$ твистованный модуль Верма $\mathcal{M}_{\lambda; \theta}$ свободно порожден элементами $E_{\leq \theta-1}$, $F_{\leq -\theta}$ и $H_{\leq -1}$ из твистованного вектора старшего веса $|\lambda; \theta\rangle$, определяемого условиями

$$\begin{aligned} E_{\geq \theta} |\lambda; \theta\rangle &= H_{\geq 1} |\lambda; \theta\rangle = F_{\geq -\theta+1} |\lambda; \theta\rangle = 0, \\ \left(H_0 + \frac{k}{2}\theta\right) |\lambda; \theta\rangle &= \lambda |\lambda; \theta\rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что

$$L_0 |\lambda; \theta\rangle = \Delta_{\lambda; \theta} |\lambda; \theta\rangle, \quad \Delta_{\lambda; \theta} = \frac{\lambda^2 + \lambda}{k+2} - \theta\lambda + \frac{k}{4}\theta^2.$$

Как видно, при $k\theta \neq 0$ необходимо различать собственное значение H_0 на твистованном состоянии старшего веса и не зависящий от спектрального потока параметр λ (который, например, определяет существование особых векторов в $\mathcal{M}_{\lambda; \theta}$). Мы будем говорить, что *собственное значение H_0 есть заряд*, а λ – *спин состояния $|\lambda; \theta\rangle$* . Полагая $\theta = 0$, получаем обычные (“нетвистованные”) модули Верма. Будем писать $|\lambda\rangle = |\lambda; 0\rangle$ и, аналогично, $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda; 0}$.

Будем писать $|\alpha\rangle \doteq |\lambda; \theta\rangle$, коль скоро для состояния $|\alpha\rangle$ выполнены условия (2.6).

Характер твистованного модуля Верма $\mathcal{M}_{\lambda; \theta}$ удобно выразить в терминах $h = \lambda - k\theta/2$ – собственного значения H_0 из (2.6) – как

$$\chi_{\lambda; \theta}^{\mathcal{M}}(q, z) = (-1)^\theta \frac{q^{(h-\theta+1/2)^2/(k+2)-1/8} z^{h-\theta}}{\vartheta_{1,1}(q, z)} \quad (2.7)$$

(см. формулу (Б.3) для $\vartheta_{1,1}$).

Хотя твисты и производят неэквивалентные модули, они не меняют структуру решетки подмодулей, поэтому можно следующим образом переформулировать классический результат.

⁵⁾Автоморфизм α алгебры $\mathfrak{a}$ отображает $\mathfrak{a}$ -модуль M в модуль αM , на котором алгебра действует как $a \cdot (\alpha m) = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot m)$, $a \in \mathfrak{a}$, $m \in M$. α -Представления на M и αM , вообще говоря, не эквивалентны.

2.2. ТЕОРЕМА [45], [55]. *Особый вектор существует в твистованном $\widehat{sl}(2)$ -модуле Верма $\mathcal{M}_{\lambda;\theta}$, если и только если λ можно записать как $\lambda = \lambda^+(r, s)$ или $\lambda = \lambda^-(r, s)$ при $r, s \in \mathbb{N}$, где*

$$\begin{aligned}\lambda^+(r, s) &= \frac{r-1}{2} - (k+2)\frac{s-1}{2}, \\ \lambda^-(r, s) &= -\frac{r+1}{2} + (k+2)\frac{s}{2}.\end{aligned}$$

Если $\lambda = \lambda^+(r, s)$, то особый вектор имеет вид

$$\begin{aligned}|\text{MFF}^+(r, s; \theta | \lambda)\rangle &= (F_{-\theta})^{r+(s-1)(k+2)}(E_{\theta-1})^{r+(s-2)(k+2)}(F_{-\theta})^{r+(s-3)(k+2)} \times \dots \\ &\dots \times (E_{\theta-1})^{r-(s-2)(k+2)}(F_{-\theta})^{r-(s-1)(k+2)}|\lambda; \theta\rangle.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Если $\lambda = \lambda^-(r, s)$, то особый вектор имеет вид

$$\begin{aligned}|\text{MFF}^-(r, s; \theta | \lambda)\rangle &= (E_{\theta-1})^{r+(s-1)(k+2)}(F_{-\theta})^{r+(s-2)(k+2)}(E_{\theta-1})^{r+(s-3)(k+2)} \times \dots \\ &\dots \times (F_{-\theta})^{r-(s-2)(k+2)}(E_{\theta-1})^{r-(s-1)(k+2)}|\lambda; \theta\rangle.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Напомним, что эти формулы приводят к полиномиальным по токам выражениям путем многократного применения (спектрально-преобразованных) формул

$$\begin{aligned}(F_0)^\alpha E_m &= -\alpha(\alpha-1)F_m(F_0)^{\alpha-2} - 2\alpha H_m(F_0)^{\alpha-1} + E_m(F_0)^\alpha, \\ (F_0)^\alpha H_m &= \alpha F_m(F_0)^{\alpha-1} + H_m(F_0)^\alpha, \\ (E_{-1})^\alpha F_m &= -\alpha(\alpha-1)E_{m-2}(E_{-1})^{\alpha-2} - k\alpha\delta_{m-1,0}(E_{-1})^{\alpha-1} + \\ &\quad + 2\alpha H_{m-1}(E_{-1})^{\alpha-1} + F_m(E_{-1})^\alpha, \\ (E_{-1})^\alpha H_m &= -\alpha E_{m-1}(E_{-1})^{\alpha-1} + H_m(E_{-1})^\alpha,\end{aligned}\quad (2.10)$$

которые можно вывести для положительного целого α и затем продолжить на произвольные комплексные α .

2.2.1. При $s = 1$ особые векторы (2.8), (2.9) не требуют никаких алгебраических преобразований и принимают простой вид

$$|\text{MFF}^+(r, 1; \theta | \lambda)\rangle = (F_{-\theta})^r|\lambda; \theta\rangle, \quad |\text{MFF}^-(r, 1; \theta | \lambda)\rangle = (E_{\theta-1})^r|\lambda; \theta\rangle. \quad (2.11)$$

2.2.2. Другой специальный случай, используемый в дальнейшем, возникает при положительных целых $p = k + 2$ и при $\lambda = \lambda^+(p, s)$. Тогда из выражения (2.8) получаем

$$|\text{MFF}^+(p, s)\rangle = (F_0)^{sp}(E_{-1})^{(s-1)p}|\lambda\rangle. \quad (2.12)$$

Если $s = 1$, то мы снова приходим к выражению (2.11), но если $s \geq 2$, то соответствующее состояние $|\lambda\rangle$ с $\lambda = p - (ps + 1)/2$ допускает также особый вектор $|\text{MFF}^-(p(s-1), 1)\rangle$, через который, как можно видеть, вектор $|\text{MFF}^+(p, s)\rangle$ факторизуется в выражении (2.12).

Аналогично, если $\lambda = \lambda^-(p, s)$, то соответствующий особый вектор принимает вид

$$|\text{MFF}^-(p, s)\rangle = (E_{-1})^{sp}(F_0)^{(s-1)p}|\lambda\rangle, \quad (2.13)$$

который факторизуется через вектор $|\text{MFF}^+(p(s-1), 1)\rangle$, коль скоро $s \geq 2$.

2.3. Характеры интегрируемых представлений. При положительном целом $k+2$ характеры интегрируемых представлений $\mathcal{J}_r$, $r = 1, \dots, k+1$, даются выражениями

$$\chi_r(q, z) \equiv \chi_r^{\mathcal{J}}(q, z) = \frac{\theta_{r,p}(q, z) - \theta_{-r,p}(q, z)}{\Omega(q, z)}, \quad r = 1, \dots, p-1, \quad (2.14)$$

где

$$\Omega(q, z) = q^{1/8} z^{1/2} \vartheta_{1,1}(q, z). \quad (2.15)$$

Характеры интегрируемых представлений голоморфны по $z \in \mathbb{C}$ и преобразуются под действием спектрального потока как $\chi_{r;1}(q, z) = \chi_{p-r}(q, z)$.

2.4. Бозонизация и фермионные скрининги. Временно зафиксируем уровень k равным любому комплексному числу, отличному от -2 . Введем хорошо известную бозонизацию алгебры $\widehat{sl}(2)_k$, связанную с двумя фермионными скринингами, следуя подходу работы [52] (где с унифицированной точки зрения обсуждаются две бозонизации алгебры $\widehat{sl}(2)$, а также рассматривается более общий случай; выбранная нами бозонизация называется в работе [52] *симметричной* по причинам, которые делаются понятными при сравнении с другой, несимметричной бозонизацией, которая также там обсуждается).

2.4.1. “Симметричная” трехбозонная реализация. Пусть ξ , ψ_- и ψ_+ – три вектора в $\mathbb{C}^3$ со скалярными произведениями

$$\begin{aligned} \xi \cdot \xi &= 0, & \xi \cdot \psi_- &= 1, & \xi \cdot \psi_+ &= -1, \\ \psi_- \cdot \psi_- &= 1, & \psi_- \cdot \psi_+ &= k+1, \\ \psi_+ \cdot \psi_+ &= 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

(определитель матрицы Грама равен $-2(k+2)$, поэтому векторы определяются однозначно по модулю общего вращения). Введем тройку скалярных полей $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ в стандартном базисе с операторными произведениями

$$\partial\varphi_i(z)\partial\varphi_j(w) = \frac{\delta_{i,j}}{(z-w)^2},$$

где $\partial f(z) = \partial f(z)/\partial z$. Пусть для любого $a \in \mathbb{C}^3$ $a \cdot \partial\varphi$ (а также и $a \cdot \varphi$) обозначает евклидово скалярное произведение.

Легко проверить, что токи

$$\begin{aligned} E(z) &= \psi_+ \cdot \partial\varphi(z) e^{\xi \cdot \varphi(z)}, \\ H(z) &= \frac{1}{2}(k\xi + \psi_- - \psi_+) \cdot \partial\varphi(z), \\ F(z) &= \psi_- \cdot \partial\varphi(z) e^{-\xi \cdot \varphi(z)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

удовлетворяют операторным произведениям алгебры $\widehat{sl}(2)_k$. Мы будем называть эти формулы трехбозонной реализацией (бозонизацией) алгебры $\widehat{sl}(2)_k$ (ее связь с представлением Вакимото [56], [57] устанавливается посредством бозонизации входящей в это представление $\beta\gamma$ -системы первого порядка). Бозонизованный вид сугаваровского тензора энергии–импульса дается стандартной формулой, включающей матрицу, обратную к матрице Грама векторов ξ , ψ_- и ψ_+ [52]. Мы сохраним обозначение L_n для соответствующих генераторов Вирасоро.

2.4.2. Скрининги. Бозонизация (2.17) связана с двумя фермионными скринингами

$$Q_- = \oint e^{\psi_- \cdot \varphi}, \quad Q_+ = \oint e^{\psi_+ \cdot \varphi}. \quad (2.18)$$

Простое вычисление показывает, что они действительно коммутируют с $\widehat{sl}(2)_k$ -токами (2.17).

В дальнейшем мы больше не будем использовать компоненты $(\partial\varphi_1, \partial\varphi_2, \partial\varphi_3)$ вектора скаляров $\partial\varphi$, а вместо них иногда будем пользоваться обозначениями

$$\partial\varphi_-(z) = \psi_- \cdot \partial\varphi(z), \quad \partial\varphi_+(z) = \psi_+ \cdot \partial\varphi(z), \quad \partial\varphi_0(z) = \xi \cdot \partial\varphi(z).$$

3. ТВИСТОВАННЫЕ МОДУЛИ ВАКИМОТОВСКОГО ТИПА И КОМПЛЕКСЫ-БАБОЧКИ

Бозонизация алгебры $\widehat{sl}(2)_k$, введенная в п. 2.4, приводит к свободно-полевым модулям вакимотовского типа [56], [57]. Цель данного раздела состоит в построении комплексов твистованных свободно-полевых модулей с использованием двух фермионных скринингов. Пункт 3.1 мы начнем с определения подходящих вертексных операторов и выпишем простые формулы для действия на них $\widehat{sl}(2)$ -генераторов; затем мы используем эти формулы для вычисления особых векторов в терминах рассмотренных выше бозонизации и скринингов. Предрешенный вывод состоит в том, что “половина” особых векторов в модулях вакимотовского типа обращается в нуль. Из возникающей при этом структуры сразу следует существование желаемых комплексов. В п. 3.2 мы построим резольвенты-бабочки интегрируемых представлений с когомологиями, сосредоточенными в “правом глазу”. Комплексы в п.п. 3.3, 3.4 являются ациклическими.

У читателя может возникнуть желание пропустить этот длинный и довольно технический раздел и обращаться к полученным в нем результатам, когда они действительно будут необходимы, а сейчас перейти к разделу 4.

3.1. Вертексные операторы и состояния. Введем семейство вертексных операторов

$$U_{\lambda, h, \theta_-, \theta_+}(z) = e^{(h\xi + (\lambda/(k+2) - \theta_-)\psi_- + (\lambda/(k+2) - \theta_+)\psi_+) \cdot \varphi(z)} \quad (3.1)$$

и соответствующих состояний $|\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle$. Параметризация здесь избыточна, поскольку вертексный оператор остается неизменным при заменах

$$\lambda \mapsto \lambda + p\alpha, \quad \theta_{\pm} \mapsto \theta_{\pm} + \alpha \quad (3.2)$$

при произвольных α . Когда мы в дальнейшем ограничимся положительными целыми $k+2$, то возьмем $2\lambda+1 \in \{1, \dots, 2(k+2)\}$, $h \mp \lambda \in \mathbb{Z}$ и $\theta_{\pm} \in \mathbb{Z}$, где θ_- и θ_+ имеют одинаковый знак (в силу чего у бабочки два, а не четыре крыла).

Состояния $|\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle$ примарны относительно алгебры Вирасоро и, более того, являются *ослабленными* (relaxed) $\widehat{sl}(2)_k$ -состояниями старшего веса: условия старшего веса для модулей Верма (2.6) ослабляются до условий

$$\begin{aligned} E_{\geq \theta_+ + 1} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle &= 0, \\ F_{\geq -\theta_+ + 1} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle &= 0, \quad \theta = \theta_- - \theta_+, \\ H_{\geq 1} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

(что, строго говоря, требует $\theta_- - \theta_+ \in \mathbb{Z}$). При этом легко проверить, что

$$\begin{aligned} E_{\theta_- - \theta_+} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle &= (\lambda - h - \theta_-(k+1) - \theta_+) |\lambda, h+1, \theta_-, \theta_+\rangle, \\ F_{\theta_+ - \theta_-} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle &= (\lambda + h - \theta_- - (k+1)\theta_+) |\lambda, h-1, \theta_-, \theta_+\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Кроме того, имеем

$$H_0 |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle = h |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle$$

(а потому h является зарядом указанного состояния в соответствии с введенной в п. 2.1.2 терминологией).

Читателю предлагается оценить значимость множителей $(\lambda - h - \theta_-(k+1) - \theta_+)$ и $(\lambda + h - \theta_- - (k+1)\theta_+)$ в выражениях (3.4) в “усилении” ослабленных условий старшего веса (3.3) до твистованных условий старшего веса (2.6) за счет подходящего выбора параметров (например, h). Далее мы несколько развиваем этот и некоторые другие несложные технические элементы (следующий пункт можно пропустить до тех пор, пока его результаты действительно не понадобятся).

3.1.1. Во-первых, очевидно, что

$$E_{\theta_- - \theta_+} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q_+ U_{\lambda, h, \theta_-, \theta_+}(z) = 0.$$

Более того, если это условие выполнено, состояние $|\lambda, h+1, \theta_-, \theta_+\rangle$ отображается оператором Q_+ (см. п. 2.4.2) в твистованное состояние старшего веса с твистом $\theta_- - \theta_+ + 1$. Это немедленно следует из операторного произведения

$$e^{\psi_+ \cdot \varphi(z)} U_{\lambda, h, \theta_-, \theta_+}(w) = (z-w)^{-h+\lambda-\theta_-(k+1)-\theta_+} e^{\psi_+ \cdot \varphi(z)} U_{\lambda, h, \theta_-, \theta_+}(w)$$

(с нормально упорядоченным произведением в правой части). Должное развитие этого наблюдения показывает, что

$$\begin{aligned} (E_{\theta_- - \theta_+ - 1})^N U_{\lambda, \lambda - \theta_-(k+1) - \theta_+, \theta_-, \theta_+}(z) &= \\ = (-1) \dots (-N) Q_+ U_{\lambda, \lambda - \theta_-(k+1) - \theta_+ + N, \theta_-, \theta_+ + 1}(z). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для оператора U в левой части имеем

$$U_{\lambda, \lambda - \theta_-(k+1) - \theta_+, \theta_-, \theta_+} \doteq \left| \lambda - (k+2) \frac{\theta_- + \theta_+}{2}; \theta_- - \theta_+ \right\rangle, \quad (3.6)$$

а кроме того, оказывается, что “старшая” F -мода действует на него как

$$\begin{aligned} (F_{\theta_+ - \theta_-})^N U_{\lambda, \lambda - \theta_- (k+1) - \theta_+, \theta_-, \theta_+}(z) = \\ = \frac{\Gamma(2\lambda + 1 - (\theta_- + \theta_+)(k+2))}{\Gamma(2\lambda + 1 - N - (\theta_- + \theta_+)(k+2))} U_{\lambda, \lambda - N - \theta_- (k+1) - \theta_+, \theta_-, \theta_+}(z). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь отношение Γ -функций, конечно, представляет собой просто произведение N множителей, следующих из (3.4). Однако выражение (3.7) можно аналитически продолжить на комплексные значения N , причем согласованным образом с продолжением, которое лежит в основе конструкции особых векторов MFF (см. формулы (2.10)). Аналогичным образом можно продолжить формулу (3.5) с точностью до (несущественного) знака, если $N!$ заменить на Γ -функцию.

Подобным же образом имеем $F_{\theta_+ - \theta_-} |\lambda, h, \theta_-, \theta_+\rangle = 0 \iff Q_- U_{\lambda, h, \theta_-, \theta_+}(z) = 0$ и

$$\begin{aligned} (F_{\theta_+ - \theta_-})^M U_{\lambda, -\lambda + \theta_- - 1 + (k+1)\theta_+, \theta_-, -1, \theta_+}(z) = \\ = (-1) \dots (-M) Q_- U_{\lambda, -\lambda + \theta_- - 1 - M + (k+1)\theta_+, \theta_-, \theta_+}(z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

С точностью до знака это выражение можно продолжить на комплексные M , заменив $M!$ на Γ -функцию. Для оператора в левой части (3.8) имеем

$$U_{\lambda, -\lambda + \theta_- - 1 + (k+1)\theta_+, \theta_-, -1, \theta_+} \doteq \left| -\lambda - 1 + (k+2) \frac{\theta_- + \theta_+}{2}; \theta_- - \theta_+ \right\rangle. \quad (3.9)$$

Кроме того, оказывается, что “старшая” E -мода действует на это состояние как

$$\begin{aligned} (E_{\theta_- - \theta_+ - 1})^N U_{\lambda, -\lambda + \theta_- - 1 + (k+1)\theta_+, \theta_-, -1, \theta_+} = \\ = \frac{\Gamma(2\lambda + 1 - (\theta_- + \theta_+ - 1)(k+2))}{\Gamma(2\lambda + 1 - N - (\theta_- + \theta_+ - 1)(k+2))} U_{\lambda, -\lambda + N + \theta_- - 1 + (k+1)\theta_+, \theta_-, -1, \theta_+}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1.2. Приведенные выше формулы устанавливают связь между особыми векторами MFF и скринингами в соответствии с хорошо известным фактом, что “половина” особых векторов в вакимотовских модулях обращается в нуль. Например, если выбрать λ в виде $\lambda = (r-1)/2$ с положительным целым r , то на состоянии (3.6) можно построить особый вектор $|\text{MFF}^+(r, \theta_- + \theta_+ + 1; \theta_- - \theta_+)\rangle$. Тогда, вспоминая выражение (2.8), вычисляем действие первого (самого правого) операторного множителя $(F_{-\theta_- + \theta_+})^{r - (\theta_- + \theta_+)(k+2)}$, используя (3.7). Как было отмечено выше, равенство (3.7) применимо для любого комплексного $k \neq -2$, а потому и для комплексной экспоненты $r - (\theta_- + \theta_+)(k+2)$. Результат обращается в нуль при вычислении в случае $N = r - (\theta_- + \theta_+)(k+2)$.

Комплексы-бабочки. Начиная с этого момента будем предполагать, что $p = k+2 \in \{1, 2, \dots\}$, и рассматривать $\widehat{s\ell}(2)$ -модули, элементы которых даются вертексными операторами (3.1) и их потомками, где

$$2\lambda + 1 \in \{1, \dots, 2p\}, \quad h - \lambda \in \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

при целых $\theta_{\pm}$. В дальнейшем рассмотрении интервал $2p$ различных значений λ (3.11) покрывается выбором $\lambda = (r - 1)/2$ при $r = 1, \dots, p - 1$ в п. 3.2 (что отвечает спискам интегрируемых представлений), $\lambda = p/2 + (r - 1)/2$ в п. 3.3 и двух остающихся значений в п. 3.4.

Первое следствие ограничения целочисленными $k \geq -1$ состоит в том, что два фермионных скрининга Q_- и Q_+ становятся локальными относительно друг друга и, более того, (супер)коммутируют. Действительно, имеем регулярное операторное произведение $e^{\psi_- \cdot \varphi(z)} e^{\psi_+ \cdot \varphi(w)} \propto (z - w)^{k+1}$.

3.2. Резольвенты-бабочки интегрируемых представлений. Цель данного раздела – построить резольвенты интегрируемых представлений вида (1.1) с отображением в центре, задаваемым композицией $Q_- \circ Q_+$.

В каждом крыле модули занумерованы целыми числами одного знака. При “глобальной” нумерации всех модулей (например, с помощью θ_- и θ_+ , принимающих значения от минус бесконечности до плюс бесконечности) для нумерации модулей в одном из крыльев придется использовать отрицательные целые числа; однако анализ структуры модулей, зависящих от выражений типа $-\theta_- - \theta_+ - 1$ с отрицательными θ_- и θ_+ , не выглядит интуитивно естественным, поэтому мы выберем “локальную” нумерацию в каждом из крыльев с помощью положительных целых чисел в каждом из случаев:

$$\begin{aligned} m, n &\geq 1 && \text{в левом крыле,} \\ m, n &\geq 0 && \text{в правом крыле,} \end{aligned} \quad (3.12)$$

но обозначения для объектов, относящихся к правому крылу, приобретут штрих.

3.2.1. Левое крыло. Для компактности формул мы будем использовать обозначение

$$j = \frac{r - 1}{2}. \quad (3.13)$$

Для положительных целых m и n определим оператор

$$U_{m,n}[r](z) = e^{([n-1+m(k+1)-j]\xi + j/(k+2)(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi(z)} \quad (3.14)$$

(который есть $U_{j,n-1+m(k+1)-j,n,m}(z)$ в обозначениях из п. 3.1). Пусть $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ – соответствующий модуль вакимотовского типа, т.е. $\widehat{sl}(2)_k$ -модуль на пространстве свободных полей, порожденном из $U_{m,n}[r]$ (злоупотребляя терминологией, мы для краткости иногда будем говорить, что $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ “порожден” из $U_{m,n}[r]$). Экстремальную диаграмму модуля (наклоненную в соответствии с твистом $n - m$) можно изобразить как

$$\quad (3.15)$$

Как следует из п. 3.1, $U_{m,n}[r]$ определяет ослабленное состояние старшего веса⁶⁾,

$$E_{n-m+1}U_{m,n}[r] = F_{m-n+1}U_{m,n}[r] = 0,$$

а действие $(F_{m-n})^{(m+n)(k+2)-(2j+1)}$ на $U_{m,n}[r]$ дает оператор/состояние

$$\begin{aligned} L_{m,n}[r](z) &= e^{([j-n(k+1)-m]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi(z)} \doteq \\ &\doteq \left| \frac{r-1}{2} - (k+2)\frac{m+n}{2}; n-m \right\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

– твистованное состояние старшего веса со спином $\lambda^+(r, n+m+1) = \lambda^-((m+n+1) \times (k+2)-r, 1)$. Стрелки E_{n-m} и F_{m-n} на диаграмме (3.15) отображают в твистованные состояния старшего веса (“заряженные” особые векторы): например, как легко проверить,

$$\begin{aligned} E_{n-m}U_{m,n}[r] &\equiv R_{m,n}[r](z) = e^{([n+m(k+1)-j]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi(z)} \doteq \\ &\doteq |\lambda^+((m+n+1)p-r, 1); n-m+1\rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отметим также операторное произведение $e^{\psi_+ \cdot \varphi(u)}L_{m+1,n}[r](z) = \text{reg}$, в силу которого $Q_+L_{m,n}[r](z) = 0$; аналогичным образом $Q_-R_{m,n}[r](z) = 0$.

Сугаваровские размерности операторов $L_{m,n}[r]$ и $R_{m,n}[r]$ равны

$$\begin{aligned} \Delta_{L_{m,n}[r]} &= \frac{(j-n(k+2))(j-n(k+2)+1)}{k+2} - \frac{1}{2}(m-n)(m-n+1), \\ \Delta_{R_{m,n}[r]} &= \frac{(j-m(k+2))(j-m(k+2)+1)}{k+2} - \frac{1}{2}(m-n-1)(m-n). \end{aligned}$$

Структура подфакторов модуля $\mathcal{L}_{m,n}[r]$, “порожденного” из $L_{m,n}[r]$, приведена на хорошо известном рис. 3.1. Мы используем то же соглашение, что и в приложении А, о том, что стрелки направлены к подмодулям. Структуру вложений модуля $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ можно рассматривать как результат обращения в нуль “половины” особых векторов в свободно-полевой реализации (2.17). Точки на рисунке представляют собой операторы вида

$$\mathcal{P}[\partial\varphi(z)]e^{(h\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi(z)}, \quad (3.18)$$

где $\mathcal{P}$ – дифференциальный многочлен (по трем токам $\partial\varphi_0(z)$, $\partial\varphi_-(z)$ и $\partial\varphi_+(z)$),

⁶⁾Для простоты обозначений мы больше не будем делать различия между операторами и соответствующими состояниями. Мы также будем опускать ненулевые множители в нормировке состояний.

Рис. 3.1. Структура подфакторов твистованного модуля Вакимото $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ из левого крыла. Для наглядности вся картина “откручена назад” спектральным потоком на $\theta = m - n$ (в исходной картине горизонтальные стрелки должны быть наклонены на угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = n - m$). Значения h для операторов (3.18) показаны в квадратных скобках (одно из них подчеркнуто для дальнейших ссылок). Стрелки $(a, 1)_{n-m}^-$ представляют ненулевые особые векторы $|\operatorname{MFF}^-(a, 1; n - m)\rangle$, задаваемые простой формулой (2.11).

а значения h указаны в квадратных скобках в соответствующих узлах. В частности, для операторов/состояний, обозначенных на рис. 3.1 как K_b^+ , $b = 2, 3, \dots$, имеем

$$K_b^+(z) = \mathcal{P}_b[\partial\varphi(z)] e^{(h_b\xi + j/(k+2)(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+)\cdot\varphi(z)},$$

где

$$h_b = \begin{cases} -\frac{r+1}{2} + n + \frac{b}{2} + \left(m + \frac{b}{2}\right)(k+1), & \text{если } b \text{ четное,} \\ \frac{r-1}{2} + n + \frac{b-1}{2} + \left(m + \frac{b-1}{2}\right)(k+1), & \text{если } b \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Характер неприводимого подфактора $\mathcal{H}_b$, соответствующего состоянию K_b^+ , следует из выражений (A.4), (A.5) и (2.5): для $b \geq 1$ имеем (с зависимостью от m и n ,

Рис. 3.2. Структура подфакторов твистованного модуля Вакимото $\mathcal{R}_{m,n}[r]$ из левого крыла. Для упрощения сравнения с рис. 3.1 рисунок “откручен” на спектральный поток с $\theta = m - n$. Как и на рис. 3.1, в квадратных скобках указаны значения h (одно из них подчеркнуто, чтобы сослаться на него в дальнейшем).

указанной в нижнем индексе)

$$\chi_{m,n}^{\mathcal{K}_{2b}}(q, z) = \frac{(-1)^{n-m}}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \left(\sum_{a \geq 0} + \sum_{a \leq -n-m-2b} \right) (q^{p(r/(2p)-(m+b+a))^2} \times \\ \times z^{-(r+1)/2+(m+b+a)p} - q^{p(r/(2p)-(n+b+a))^2} z^{(r-1)/2-(n+b+a)p}), \quad (3.20)$$

$$\chi_{m,n}^{\mathcal{K}_{2b+1}}(q, z) = \frac{(-1)^{n-m}}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \left(\sum_{a \geq 0} + \sum_{a \leq -n-m-2b-1} \right) (q^{p(r/(2p)+m+b+a)^2} \times \\ \times z^{(r-1)/2+(m+b+a)p} - q^{p(r/(2p)+n+b+a)^2} z^{-(r+1)/2-(n+b+a)p}). \quad (3.21)$$

Аналогично при тех же соглашениях структура подфакторов твистованного модуля Вакимото $\mathcal{R}_{m,n}[r]$, “порожденного” из $R_{m,n}[r]$, показана на рис. 3.2, где полный твист “откручен назад” на ту же величину, что и для модуля $\mathcal{L}_{m,n}[r]$. Поэтому для описания модуля $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ с экстремальной диаграммой (3.15) две диаграммы на рис. 3.1 и 3.2 следует наложить друг на друга в соответствии с градуировками так, чтобы верхний узел модуля $\mathcal{R}_{m,n}[r]$ расположился на $(m+n)p - r + 1$ единиц заряда

справа от верхнего узла модуля $\mathcal{L}_{m,n}[r]$. Тогда оказывается, что, начиная с уровня вложения K_2^+ , каждый узел модуля $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ имеет соответствующий узел модуля $\mathcal{R}_{m,n}[r]$ в качестве ближайшего соседа справа. Модуль $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ является расширением $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ и $\mathcal{R}_{m,n}[r]$. Мы не будем полностью описывать его структуру, которая нам не понадобится, а опишем возникновение ядра двух скринингов. Для этого сначала рассмотрим отображения, производимые скринингами.

Имеются $\widehat{sl}(2)_k$ -гомоморфизмы

$$Q_+ : \mathcal{R}_{m+1,n}[r] \rightarrow \mathcal{L}_{m,n}[r], \quad (3.22)$$

$$Q_- : \mathcal{L}_{m,n+1}[r] \rightarrow \mathcal{R}_{m,n}[r], \quad (3.23)$$

конструкцию которых можно в общих чертах описать следующим образом. На уровне экстремальных состояний (см. (3.15)) мы видели, что $L_{m+1,n}[r](z)$ аннулируется оператором Q_+ , но ближайшее соседнее состояние

$$V_{m+1,n}[r] = e^{([j-n(k+1)-m]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - (m+1)\psi_+) \cdot \varphi}$$

отображается под действием Q_+ как

$$Q_+ V_{m+1,n}[r](z) = e^{([j-n(k+1)-m]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi}(z) = L_{m,n}[r](z).$$

Дальнейшее действие операторами E_{n-m-1} дает (с точностью до ненулевого множителя)

$$Q_+ R_{m+1,n}[r](z) = (E_{n-m-1})^{(m+n+1)(k+2)-r} \times \\ \times e^{([j-n(k+1)-m]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi}(z), \quad (3.24)$$

что является в точности особым вектором $|\text{MFF}^-((m+n+1)(k+2)-r, 1; n-m) \rangle$, построенным на состоянии $L_{m,n}[r]$.

Рис. 3.3 представляет дальнейшие подробности, которые складываются в определение отображения $Q_+ : \mathcal{R}_{m+1,n}[r] \rightarrow \mathcal{L}_{m,n}[r]$. Здесь воспроизведен вид модулей $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ и $\mathcal{R}_{m',n}[r]$, причем для удобства сравнения последний показан в точности как на рис. 3.2, но с параметром m' , который следует положить равным $m+1$. Поэтому твист модуля $\mathcal{R}_{m',n}[r]$ равен $n-m'-1 = n-m-2$, и в результате наклонные $((m'+n+i)p \pm r, 1)^+$ -стрелки в нижней части рисунка (показанные жирными линиями) следует проводить горизонтально при использовании соглашений, соответствующих верхней части рисунка (повторим, что модуль $\mathcal{R}_{m',n}[r]$ просто скопирован из рис. 3.2). Однако отображение оператором Q_+ располагает эти наклонные стрелки $((m'+n+i)p \pm r, 1)^+$ ровно поверх горизонтальных стрелок в $\mathcal{L}_{m,n}[r]$ (которые по этой причине также выделены жирным), направленных противоположным образом из-за обращения в нуль особых векторов; поэтому наклонные $\mathcal{R}_{m',n}[r]$ -стрелки ведут в ядро оператора Q_+ .

Отображение $Q_- : \mathcal{L}_{m,n+1}[r] \rightarrow \mathcal{R}_{m,n}[r]$ описывается аналогичным образом (см. рис. 3.4). Имеем

$$Q_- U_{m,n+1}[r](z) = e^{([n+m(k+1)-j]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+) \cdot \varphi}(z) = R_{m,n}[r](z)$$

Рис. 3.3. Отображение $Q_+ : \mathcal{R}_{m+1,n}[r] \rightarrow \mathcal{L}_{m,n}[r]$ из левого крыла. Темные кружки в модуле $\mathcal{R}_{m+1,n}[r]$ обозначают подфакторы, лежащие в ядре Q_+ .

и

$$Q_- L_{m,n+1}[r](z) = (F_{m-n-1})^{(m+n+1)(k+2)-r} R_{m,n}[r](z), \quad (3.25)$$

что представляет собой не что иное, как построенный на состоянии $R_{m,n}[r]$ особый вектор $|\text{MFF}^+(r', 1; \theta)\rangle$, где $r' = (m+n+1)(k+2) - r$ и $\theta = n - m + 1$. Модуль

Рис. 3.4. Отображение $Q_- : \mathcal{L}_{m,n+1}[r] \rightarrow \mathcal{R}_{m,n}[r]$ из левого крыла. Темными кружками обозначены подфакторы в $\mathcal{L}_{m,n+1}[r]$, лежащие в ядре Q_- .

$\mathcal{L}_{m,n'}[r]$ изображен на рис. 3.4 таким же образом, как на рис. 3.1, причем n' следует положить равным $n + 1$. Наклонные $\mathcal{L}_{m,n'}[r]$ -стрелки ведут в ядро Q_- .

Экстремальная диаграмма и структура модуля $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ в пределах нескольких первых уровней вложения показаны на рис. 3.5 в “линейной комбинации” обозначений, использованных в диаграмме (3.15) и на рис. A.1, A.2. (Мы не даем полного

Рис. 3.5. Первый уровень вложения с ненулевым $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ в модуле $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ из левого крыла.

описания структуры первого уровня вложения. Там возникает подмодуль в ядре Q_- и подмодуль в ядре Q_+ , но пересечение ядер равно нулю.) Как и ранее, выражения в квадратных скобках указывают значения параметра h соответствующих операторов (3.18). Стрелки, ведущие к K_2^+ и K_2^- из соответствующих ближайших соседних состояний, попадают в *подмодуль*, порожденный одним из операторов в узлах, на которые нацелены эти стрелки:

$$\begin{aligned}
 K_2^+ &= \mathcal{P}_2^+ e^{([- (r+1)/2 + n+1 + (m+1)(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi} = \\
 &= (E_{n-m-1})^{(m+n+1)(k+2)-r} e^{([j-n(k+1)-m]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi}, \quad (3.26) \\
 K_2^- &= \mathcal{P}_2^- e^{([(r+1)/2 - m - 1 - (n+1)(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi} = \\
 &= (F_{m-n-1})^{(m+n+1)(k+2)-r} e^{([n+m(k+1)-j]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi}, \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_2^\pm$ – дифференциальные многочлены степени $(k+2)(m+n+1)-r$. Этот подмодуль находится в пересечении ядер $\ker Q_- \cap \ker Q_+$. Более того, на каждом следующем уровне вложения $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ порождается соответствующими операторами, которые для четных уровней вложения даются выражениями

$$K_{2i}^+ = \mathcal{P}_{2i}^+ e^{([- (r+1)/2 + (n+i) + (m+i)(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi}, \quad (3.28)$$

$$K_{2i}^- = \mathcal{P}_{2i}^- e^{([(r+1)/2 - (m+i) - (n+i)(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - n\psi_- - m\psi_+). \varphi}. \quad (3.29)$$

Нам в действительности понадобятся цоколь $\text{soc } \mathcal{U}_{m,n}[r]$ модуля $\mathcal{U}_{m,n}[r]$ и ядро

$$\mathcal{K}_{m,n}[r] = \ker Q_- \cap \ker Q_+|_{\text{soc } \mathcal{U}_{m,n}[r]} = \bigoplus_{b \geq 1} \mathcal{K}_{2b}. \quad (3.30)$$

В дальнейшем нам будет нужен характер ядра в диагональном случае $m = n$; из (3.20) следует, что

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{K}_{m,m}[r]}(q, z) &= \sum_{b \geq 1} \chi_{m,m}^{\mathcal{K}_{2b}}(q, z) = \frac{1}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ &\times \left[\sum_{a \geq m+1} (a - m) + \sum_{a \leq -m-1} (-a - m) \right] q^{p(r/(2p)-a)^2} (z^{-(r+1)/2+ap} - z^{(r-1)/2-ap}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2.2. Правое крыло. Структура соответствующих правому крылу модулей по существу дуальна структуре модулей, соответствующих левому крылу. Напомним нумерацию, которую мы использовали в (3.12). Для каждой пары неотрицательных целых m и n ключевые операторы на экстремальной диаграмме (m, n) -го модуля имеют вид

$$L'_{m,n}[r](z) = e^{([-j-1-n-m(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) + n\psi_- + m\psi_+) \cdot \varphi(z)}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} V'_{m,n}[r](z) &= e^{([-j-n-m(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) + n\psi_- + m\psi_+) \cdot \varphi(z)} \doteq \\ &\doteq |\lambda^+(p-r, m+n+1); m-n+1\rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} U'_{m,n}[r](z) &= e^{([j+m+n(k+1)]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) + n\psi_- + m\psi_+) \cdot \varphi(z)} \doteq \\ &\doteq |\lambda^+(r+p(m+n), 1); m-n\rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$R'_{m,n}[r](z) = e^{([j+n(k+1)+m+1]\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) + n\psi_- + m\psi_+) \cdot \varphi(z)}, \quad (3.35)$$

где мы помним, что $j = (r-1)/2$. Экстремальная диаграмма (наклоненная в соответствии с твистом $m-n$) “вывернута наизнанку” по сравнению с (3.15):

$$(3.36)$$

Спин твистованного состояния старшего веса $U'_{m,n}[r]$ равен $\lambda^+(r+p(n+m), 1)$. “Уголки”, нарисованные в соответствии с соглашениями из приложения А, изображают твистованные состояния старшего веса. Подмодуль, “ограниченный двумя уголками”, лежит в $\ker Q_- \cap \ker Q_+$: как легко видеть, имеются регулярные операторные произведения $e^{\psi_- \cdot \varphi(z)} U'_{m,n}[r](w) \propto (z-w)^{(m+n)p+r-1}$ и $e^{\psi_+ \cdot \varphi(z)} U'_{m,n}[r](w) \propto (z-w)^0$, поэтому

$$Q_- U'_{m,n}[r](w) = Q_+ U'_{m,n}[r](w) = 0.$$

Далее, имеем $Q_+ R'_{m,n}[r](w) = U'_{m+1,n}[r](w)$ и аналогично $Q_- L'_{m,n}[r](w) = V'_{m,n+1}[r](w)$, где получается правый сосед состояния $L'_{m,n+1}[r](w)$, как показано на диаграмме (3.36). Теперь нетрудно последовательно проследить отображения ниже лежащих подфакторов под действием Q_- и Q_+ . Примерно “половина” структуры подфакторов показана на рис. 3.6.

Рис. 3.6. Структура подфакторов твистованного модуля Вакимото $\mathcal{L}'_{m,n}[r]$ из правого крыла.

Получаем, что $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ в $\mathcal{U}'_{m,n}[r]$ линейно порождается неприводимыми подфакторами $\mathcal{K}'_b$, порожденными из состояний, занумерованных с помощью K'^+_{b+} , $b = 0, 1, 2, \dots$, на рис. 3.6. Их характеры легко найти (зависимость от m и n указана в нижнем индексе, а зависимость от r не указана для упрощения обозначений):

$$\chi_{m,n}^{\mathcal{K}'_{2b}}(q, z) = \chi_{n,m}^{\mathcal{K}_{2b+1}}(q, z), \quad b \geq 0, \quad (3.37)$$

$$\chi_{m,n}^{\mathcal{K}'_{2b-1}}(q, z) = \chi_{n,m}^{\mathcal{K}_{2b}}(q, z), \quad b \geq 1 \quad (3.38)$$

(см. формулы (3.20), (3.21)). В частности, полагая в (3.37) $b = m = n = 0$, получаем характер интегрируемого представления $\mathbb{J}_r$ (см. п. 2.3):

$$\chi_{0,0}^{\mathcal{K}'_0}(q, z) = \chi_r(q, z). \quad (3.39)$$

Характер ядра в цоколе

$$\mathcal{K}'_{m,n}[r] = \ker Q_- \cap \ker Q_+|_{\text{soc } \mathcal{U}'_{m,n}[r]} \quad (3.40)$$

для каждой диагональной вершины (m, m) на правом крыле имеет вид

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{K}'_{m,m}[r]}(q, z) &= \sum_{b \geq 1} \chi^{\mathcal{K}'_{2b-1}}_{m,m}(q, z) = \frac{1}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ &\times \left[\sum_{a \geq m+1} (a-m) + \sum_{a \leq -m-1} (-a-m) \right] q^{(r/(2p)-a)^2} (z^{-(r+1)/2+ap} - z^{(r-1)/2-ap}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.2.3. Середина. Двукрылое создание получается, если соединить два крыла посредством отображения

$$Q_+ \circ Q_- : \mathcal{U}_{1,1}[r] \rightarrow \mathcal{U}'_{0,0}[r].$$

В “углу” правого крыла в модуле $\mathcal{U}'_{0,0}[r]$ оператор $U'[r]$ (3.34) имеет вид

$$U'_{0,0}[r](z) = e^{(j\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+)) \cdot \varphi(z)}.$$

В “углу” левого крыла соответствующий оператор дается выражением (3.14) при $m = n = 1$. Очевидно, что

$$Q_- U_{1,1}[r](z) = e^{((k+1-j)\xi + (j/(k+2))\psi_- + (j/(k+2)-1)\psi_+) \cdot \varphi(z)},$$

и тогда из (3.5) следует

$$\begin{aligned} (-1)^{p-r} (p-r)! Q_+ e^{((k+1-j)\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+) - \psi_+) \cdot \varphi(z)} &= \\ = (E_{-1})^{p-r} e^{(j\xi + (j/(k+2))(\psi_- + \psi_+)) \cdot \varphi(z)}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$Q_+ Q_- U_{1,1}[r](z) = \frac{1}{(p-r)!} |\text{MFF}^-(p-r, 1; j)\rangle \in \mathcal{U}'_{0,0}[r](z).$$

Неприводимый фактор, порожденный из $\mathcal{U}'_{0,0}[r]$, лежит в когомологии. Нетрудно проследить действие $Q_+ Q_-$ на подфакторах в $\mathcal{U}_{1,1}[r]$.

Построенные выше отображения в итоге дают резольвенту-бабочку интегрируемых представлений.

3.3. Ациклические комплексы-бабочки. Теперь перейдем к свободно-полевым модулям, элементы которых представлены операторами (соответствующими состояниям) (3.1) и их потомками, где $2\lambda + 1 \in \{p+1, \dots, 2p-1\}$ (примерно вторая половина интервала значений в (3.11)); мы параметризуем λ как

$$\lambda = \frac{p}{2} + \frac{r-1}{2},$$

где $r \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. Сохраним обозначение (3.13).

Требуемые модули можно построить, сделав замену $j \mapsto j + p/2$ в формулах из п. 3.2. В соответствии с формулами (3.2) это эквивалентно сдвигам $m \mapsto m-1/2$, $n \mapsto$

$n - 1/2$ для каждого модуля в левом крыле. Следовательно, мы можем описывать каждый модуль из левого крыла так же, как и в формулах (3.14), (3.15) и на рис. 3.1 и 3.2, но считая, что

$$m, n \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\} \quad \text{в левом крыле.} \quad (3.42)$$

Если и m , и n взяты полуцелыми, то не возникает противоречий, поскольку целым должно быть только $m + n$ (см. рис. 3.1 и 3.2, где все стрелки (особые векторы) зависят только от $m + n$; в частности, модуль в “углу” левого крыла представляет собой модуль с $m = n = 1/2$, и поэтому $m + n = 1$). Из (3.20) следует, что характер ядра в цоколе $\mathcal{K}_{m,m}[r] = \ker Q_- \cap \ker Q_+|_{\text{soc } \mathcal{U}_{m,m}[r]}$ при полуцелом m имеет вид

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{K}_{m,m}[r]}(q, z) &= \sum_{b \geq 1} \chi^{\mathcal{K}_{2b}}_{m,m}(q, z) = \frac{1}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \left[\sum_{a \geq \mu+1} (a - \mu) + \sum_{a \leq -\mu} (1 - a - \mu) \right] \times \\ &\times q^{p(r/2p - a + 1/2)^2} (z^{-(r+1)/2 + (a-1/2)p} - z^{(r-1)/2 - (a-1/2)p}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $\mu = m + 1/2$ принимает положительные целые значения на левом крыле.

Аналогично на правом крыле модули, соответствующие значению спина $\lambda = p/2 + (r - 1)/2$, можно описывать формулами из п. 3.2.2 со сдвигом $m \mapsto m + 1/2$, $n \mapsto n + 1/2$, поэтому

$$m, n \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\} \quad \text{в правом крыле.} \quad (3.44)$$

Ядро $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ в цоколе имеет вид суммы пространств $\mathcal{K}'_{2b-1}$ по $b \geq 1$, а его характер легко выражается аналогично формуле (3.43).

В результате перехода к полуцелым m и n резольвента становится ациклической⁷⁾. Оказывается, что $U'_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[r]$ теперь лежит в образе $Q_- \circ Q_+$. Подробности таковы: рассмотрим в модуле $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[r]$ состояния на уровне r относительно верхушки и в градуировках $-(r + 1)/2 - p/2 + 1, \dots, (r + 1)/2 + p/2 - 1$. При наложении рис. 3.1 для $\mathcal{L}_{m,m}[r]$ и рис. 3.2 для $\mathcal{R}_{m,m}[r]$ так, как это объяснялось в п. 3.2.1, состояния в указанных градуировках лежат между узлами, градуировки которых подчеркнуты на рис. 3.1 и 3.2, в которых надо положить $m = n = 1/2$. Подмодуль коразмерности 1 в этой градуировке лежит в ядре $Q_- \circ Q_+$, но одномерный фактор отображается в состояния между (и включая) $V'_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[r]$ и $U'_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}[r]$ на диаграмме (3.36).

3.4. “Стейнберговские” модули.

3.4.1. Случай $\lambda = (k + 1)/2$. Этот случай отвечает взятию $r = p$ в операторах, рассмотренных в п. 3.2. В результате каждая диаграмма на рис. 3.1 и 3.2 сворачивается в одинарную цепочку вложений в соответствии с вырождением особых векторов MFF, обсуждавшимся в п. 2.2.2. Подробности этого вполне стандартны, и мы опустим их. Ядро $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ линейно порождено неприводимыми подфакторами,

⁷⁾Трудно противиться поверхностной аналогии и желанию называть этот случай случаем Неве–Шварца (напомним, что в предыдущем случае когомология возникала в “нулевом” модуле, который теперь отсутствует из-за полуцелой нумерации).

векторы старшего веса которых имеют заряды $n + b + m(k + 1 + b) + (k + 1)/2$, $b \geq 0$. Характер ядра в цоколе левого крыла равен

$$\chi^{\mathcal{K}_{m,n}[p]}(q, z) = \frac{(-1)^{n-m}}{q^{1/8}\vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ \times \sum_{b \geq 0} (q^{p(m+b+1/2)^2} z^{(p-1)/2+(m+b)p} - q^{p(n+b+1/2)^2} z^{-(p+1)/2-(n+b)p}). \quad (3.45)$$

В цоколе правого крыла несколько иная, но легко воспроизводимая структура подфакторов дает для характера $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ выражение

$$\chi^{\mathcal{K}'_{m,n}[p]}(q, z) = \frac{(-1)^{n-m}}{q^{1/8}\vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ \times \sum_{b \geq 0} (q^{p(n+b+1/2)^2} z^{(p-1)/2+(n+b)p} - q^{p(m+b+1/2)^2} z^{-(p+1)/2-(m+b)p}). \quad (3.46)$$

Заслуживает внимания то, как середина резольвенты перестраивается по сравнению со случаем, рассмотренным в п. 3.2 (и в результате делает комплекс ациклическим). В “углу” левого крыла имеем оператор

$$U_{1,1}[p](w) = e^{(((k+1)/2)\xi + ((k+1)/(2(k+2))) (\psi_- + \psi_+) - \psi_- - \psi_+) \cdot \varphi(w)}.$$

Он развивает полюс первого порядка в операторном произведении с $e^{\psi_- \cdot \varphi(u)}$ и, более того, получающийся оператор имеет полюс первого порядка с $e^{\psi_+ \cdot \varphi(z)}$, поэтому

$$Q_+ Q_- U_{1,1}[p](w) = e^{(((k+1)/2)\xi + ((k+1)/(2(k+2))) (\psi_- + \psi_+) \cdot \varphi(w)} = U'_{1,1}[p](w).$$

3.4.2. Случай $\lambda = (2k + 3)/2$. При $r = 2p$ структура модуля $\mathcal{U}_{m,n}[p]$ также вырождается; в частности, при $m = n = 1$ операторы (соответствующие им состояния)

$$L_{1,1}[p](z) = e^{(-\xi/2 - (1/(2p))(\psi_- + \psi_+) \cdot \varphi(z)}, \quad R_{1,1}[p](z) = e^{(\xi/2 - (1/(2p))(\psi_- + \psi_+) \cdot \varphi(z)}$$

“сидят” напротив друг друга, т.е. на диаграмме, аналогичной (3.15), между ними нет экстремальных состояний. Мы опускаем подробности, чтобы не удлиннять этот и так уже длинный раздел.

4. W -АЛГЕБРА, ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, ХАРАКТЕРЫ И МОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель данного раздела состоит в том, чтобы установить основной результат, заявленный во введении. В п. 4.1 мы сначала отождествим генераторы W -алгебры в централизаторе скринингов. В п. 4.2 мы построим $2p$ представлений W -алгебры $\mathcal{Y}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, вычислим их характеры $\chi_r^\pm(\tau, \nu)$ и установим их свойства относительно преобразований спектрального потока. Спектральный поток замыкается при добавлении $2p$ функций $\omega_r^\pm(\tau, \nu)$, $1 \leq r \leq p$. Свойства относительно модулярных преобразований изучаются в п. 4.3. Определенные комбинации $\chi_r^\pm(\tau, \nu)$,

$\omega_r^\pm(\tau, \nu)$ и интегрируемых характеров $\chi_r(\tau, \nu)$, $1 \leq r \leq p-1$, становятся частями мультиплетов, т.е. преобразуются в представлениях вида $\mathbb{C}^n \otimes \pi$, где π – некоторое $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, а $n = 2$ и 3 ; при этом представления $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ реализуются на многочленах по τ степеней 1 и 2, соответственно (см. п.п. В.2.1 и В.3.1). Кроме того, возникает некоторая треугольная структура, когда члены, имеющие вид произведения ν на “младшие” характеры, появляются в модулярных преобразованиях “старших” характеров. Точный результат приведен в леммах 4.3.3 и 4.3.5.

4.1. Токи $W^\pm(z)$. W -алгебра, представляющая симметрию модели, определяется как максимальная локальная алгебра, действующая в ядре. Как обсуждалось во введении, мы несколько ограничим это определение, взяв только те генераторы, которые отображают между $\widehat{sl}(2)_k$ -модулями с одним и тем же твистом.

4.1.1. *Локальность и вакуумное представление.* Сначала отберем операторы, являющиеся локальными относительно всех операторов в ядре. Ядро $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ линейно порождается операторами общего вида

$$(\text{моды}) \cdot e^{(a\xi + ((r-1)/(2p))(\psi_- + \psi_+) + m\psi_- + n\psi_+) \cdot \varphi(z)} \quad (4.1)$$

с целыми a , целыми r и одновременно целыми или полуцелыми m и n , где (моды) – дифференциальные многочлены по $\widehat{sl}(2)_k$ -токам. Поэтому в операторном произведении $e^{a\xi \cdot \varphi(z)} e^{(b\xi + ((r-1)/(2p))(\psi_- + \psi_+) + m\psi_- + n\psi_+) \cdot \varphi(w)} \propto (z-w)^{a(m-n)}$ показатель степени $a(m-n)$ всегда целочисленный; нецелочисленные показатели, таким образом, возникают только в операторных произведениях

$$e^{((r-1)/(2p))(\psi_- + \psi_+) \cdot \varphi(z)} e^{((r'-1)/(2p))(\psi_- + \psi_+) \cdot \varphi(w)} \propto (z-w)^{(r-1)(r'-1)/(2p)}$$

и в операторных произведениях, включающих $e^{(m\psi_- + n\psi_+) \cdot \varphi}$ в случае полуцелых m и n . Отсюда следует, что вертексные операторы (4.1) при $r = 1$ и целых m и n дают целочисленные показатели – не дают нелокальностей – в операторных произведениях со всеми вертексными операторами, встречающимися в ядре (при проверке операторных произведений с $e^{(m'\psi_- + n'\psi_+) \cdot \varphi}$ существенно, что m' и n' могут быть полуцелыми только одновременно). Поэтому мы отождествим вакуумное представление W -алгебры с ядром $\ker Q_- \cap \ker Q_+$ в цоколе резольвенты-бабочки интегрируемого представления с $r = 1$. Таким образом, вакуумное представление W -алгебры имеет вид суммы $\widehat{sl}(2)_k$ -представлений

$$\bigoplus_{m \geq 1} \mathcal{K}_{m,m}[1] \oplus \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{K}'_{m,m}[1],$$

где $\mathcal{K}_{m,n}[r]$ определены в (3.30), а $\mathcal{K}'_{m,n}[r]$ – в (3.40).

4.1.2. $W^\pm(z)$ -токи. Порождающие W -алгебру поля $W^-(z)$ и $W^+(z)$ ассоциированы с определенными особыми векторами следующим образом.

1. $W^-(z)$ отвечает особому вектору $|\text{MFF}^+(p-1, 3; 1)\rangle$, построенному на вертексном операторе $V'_{1,1}[1] = e^{(-p\xi + \psi_- + \psi_+) \cdot \varphi}$ (см. (3.33) и (3.36); из (3.33) следует, что

этот вертекс представляет твистованное состояние старшего веса $|\lambda^+(p-1, 3; 1)\rangle^8$. Поэтому $W^-(z) - (\theta = 1)$ -твистованный оператор старшего веса размерности $4p-2$ и заряда $-2p+1$ (его *спин* равен $-2p+1+k/2 = \lambda^+(1, 4) = \lambda^-(4p-1, 1)$). Более явным образом,

$$W^-(z) = (F_{-1})^{3p-1}(E_0)^{2p-1}(F_{-1})^{p-1}(E_0)^{-1}(F_{-1})^{-p-1}e^{(-p\xi+\psi_-+\psi_+)\cdot\varphi(z)}. \quad (4.2)$$

2. $W^+(z)$ отвечает особому вектору $|\text{MFF}^-(3p-1, 1)\rangle$, построенному на вертексном операторе $L_{1,1}[1] = e^{(-p\xi-\psi_- - \psi_+)\cdot\varphi}$ (см. (3.16)). На рис. 3.1 этот особый вектор показан стрелкой $((m+n+1)p-r, 1)_{;n-m}^-$, где мы теперь полагаем $m=n=1$ и $r=1$. Отсюда следует, что $W^+(z)$ – оператор старшего веса той же размерности $4p-2$ и заряда $\lambda^+(4p-1, 1) = \lambda^-(1, 4) = 2p-1$:

$$W^+(z) = (E_{-1})^{3p-1}e^{(-p\xi-\psi_- - \psi_+)\cdot\varphi(z)} = (\partial^{3p-1}e^{\psi_+\cdot\varphi(z)})e^{((2p-1)\xi-\psi_- - 2\psi_+)\cdot\varphi(z)} \quad (4.3)$$

(мы воспользовались выражением (3.24) для вычисления степени оператора E_{-1}).

Поясним еще раз, что смысл равенства (4.2) заключается в том, что $W^-(z)$ – это такой оператор, что отвечающее ему состояние дается особым вектором (выраженным как в формулах MFF), вычисленным на состоянии, отвечающем вертексу $e^{(-p\xi+\psi_- + \psi_+)\cdot\varphi(z)}$.

Операторное произведение токов начинается как

$$W^+(z)W^-(w) = \frac{\mathcal{O}_{p-1}(w)}{(z-w)^{7p-3}} + \dots,$$

где $\mathcal{O}_{p-1}$ – оператор заряда 0 и размерности $p-1$ на первом уровне вложения (уровень состояния K_1^{++}) на рис. 3.6 при $m=n=0$ и $r=1$, поэтому с точностью до ненулевого множителя имеем

$$\mathcal{O}_{p-1} = F_0^{p-1}|\text{MFF}^-(p-1, 1)\rangle = F_0^{p-1}E_{-1}^{p-1}U'_1[0, 0],$$

где $U'_1[0, 0](w) = 1$ – единичный оператор. При $k=0$ и 1, в частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(z) &= 2H(z) = \partial\varphi_-(z) - \partial\varphi_+(z), \\ \mathcal{O}_2(z) &= -4EF(z) + 8HH(z) + 4\partial H(z) = \\ &= \partial\varphi_+\partial\varphi_+(z) - 4\partial\varphi_+\partial\varphi_-(z) + \partial\varphi_-\partial\varphi_-(z) + \partial^2\varphi_+(z) + \partial^2\varphi_-(z) \end{aligned}$$

с точностью до ненулевых множителей.

4.1.3. ПРИМЕР. На рис. 4.1.3 приведены некоторые подробности вакуумного представления для случая $k=0$.

Что касается явных выражений для генераторов, то, понимая отрицательные степени в $W^-(z)$ стандартным MFF-способом (2.10), находим, что произведение пяти

⁸⁾Приведенный ниже пример с $k=0$ является уже достаточно общим и может помочь наглядно представить расположение различных состояний.

множителей в (4.2) вычисляется как

$$\begin{aligned} F_{-1}^{3p-1} E_0^{2p-1} F_{-1}^{p-1} E_0^{-1} F_{-1}^{-p-1} &= F_{-1}^5 E_0^3 F_{-1} E_0^{-1} F_{-1}^{-3} = \\ &= 120 F_{-3} + 60 H_{-2} F_{-1} + 120 H_{-1} F_{-2} + 60 H_{-1}^2 F_{-1} - 12 E_{-1} F_{-1}^2 + E_0^2 F_{-1}^3 - \\ &\quad - 30 E_0 F_{-2} F_{-1} - 18 E_0 H_{-1} F_{-1}^2. \end{aligned}$$

Соответствующее выражение в терминах свободных полей имеет вид

$$\begin{aligned} W^-(z) &= (-6\partial\varphi_-\partial^2\varphi_+(z) - 18\partial^2\varphi_-\partial\varphi_-(z) - 12\partial^2\varphi_-\partial\varphi_+(z) + 3\partial\varphi_-\partial\varphi_-\partial\varphi_-(z) + \\ &\quad + 6\partial\varphi_-\partial\varphi_-\partial\varphi_+(z) + 3\partial\varphi_-\partial\varphi_+\partial\varphi_+(z) + 12\partial^3\varphi_-(z))e^{(-3\xi+\psi_-+\psi_+)\cdot\varphi(z)}. \end{aligned}$$

Из (4.3) получаем также

$$\begin{aligned} W^+(z) &= (10\partial^3\varphi_+\partial^2\varphi_+(z) + 5\partial^4\varphi_+\partial\varphi_+(z) + 15\partial^2\varphi_+\partial^2\varphi_+\partial\varphi_+(z) + \\ &\quad + 10\partial^3\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+(z) + 10\partial^2\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+(z) + \\ &\quad + \partial\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+\partial\varphi_+(z) + \partial^5\varphi_+(z))e^{(3\xi-\psi_- - \psi_+)\cdot\varphi(z)}. \end{aligned}$$

4.2. “Узкие” представления W -алгебры $\mathcal{Y}_r^\pm$ и их характеры. Заметим сначала, что интегрируемые $\widehat{sl}(2)_k$ -представления $\mathcal{J}_r$, $1 \leq r \leq p-1$, являются также представлениями W -алгебры. Далее, резольвенты из раздела 3 позволяют построить $2p$ представлений W -алгебры, обозначаемых в дальнейшем через $\mathcal{Y}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$. Как векторные пространства они получаются суммированием неприводимых $\widehat{sl}(2)_k$ -подфакторов в ядре $\ker Q_- \cap \ker Q_+$, вычисленном в цоколе каждого модуля вдоль горизонтальной линии симметрии бабочки (1.1). А именно, $\mathcal{Y}_r^+$ представляет собой сумму $\mathcal{K}_{m,m}[r]$ из (3.30) и $\mathcal{K}'_{m,m}[r]$ из (3.40):

$$\mathcal{Y}_r^+ = \bigoplus_{m \geq 1} \mathcal{K}_{m,m}[r] \oplus \bigoplus_{m \geq 0}^* \mathcal{K}'_{m,m}[r],$$

где звездочка у прямой суммы – “ленивое обозначение” того факта, что при $m=0$ следует опустить подфактор, который совпадает с интегрируемым представлением $\mathcal{J}_r$ (см. (3.39)). Аналогично $\mathcal{Y}_r^-$ дается подобной же конструкцией в “секторе Неве–Шварца” с суммированием по полуцелым значениям:

$$\mathcal{Y}_r^- = \bigoplus_{m \geq \frac{1}{2}} \mathcal{K}_{m,m}[r] \oplus \bigoplus_{m \geq \frac{1}{2}} \mathcal{K}'_{m,m}[r].$$

Теперь найдем характеры

$$\chi_r^\pm(q, z) = \chi^{\mathcal{Y}_r^\pm}(q, z).$$

Ниже мы пишем θ_r вместо $\theta_{r,p}$ и аналогично для производных тета-функций (см. приложение Б по поводу соглашений, касающихся тета-функций).

4.2.1. ЛЕММА. *Характеры $\chi_r^\pm(q, z)$ W -алгебры выражаются формулами*

$$\chi_r^+(q, z) = \frac{1}{\Omega(q, z)} \left(\frac{r^2}{4p^2} (\theta_{-r} - \theta_r) + \frac{r}{p^2} (\theta'_{-r} + \theta'_r) + \frac{1}{p^2} (\theta''_{-r} - \theta''_r) \right),$$

$$\chi_r^-(q, z) = \frac{1}{\Omega(q, z)} \left(\left(\frac{r^2}{4p^2} - \frac{1}{4} \right) (\theta_{p-r} - \theta_{p+r}) + \frac{r}{p^2} (\theta'_{p-r} + \theta'_{p+r}) + \frac{1}{p^2} (\theta''_{p-r} - \theta''_{p+r}) \right)$$

при $1 \leq r \leq p-1$ (в правых частях выражений аргументы (q, z) у тета-функции опущены), а также

$$\chi_p^+(q, z) = \frac{2\theta'_p(q, z)}{p\Omega(q, z)}, \quad \chi_p^-(q, z) = \frac{2\theta'_0(q, z)}{p\Omega(q, z)}$$

(см. формулу (2.15) для $\Omega(q, z)$).

Эти формулы нетрудно получить прямым вычислением: при $1 \leq r \leq p-1$ сумма характеров (3.31) и (3.41) дает

$$\begin{aligned} \chi_r^+(q, z) &= \sum_{m \geq 1} \chi^{\mathcal{K}_{m,m}[r]}(q, z) + \sum_{m \geq 0}^* \chi^{\mathcal{K}'_{m,m}[r]}(q, z) = \\ &= \frac{1}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \sum_{a \in \mathbb{Z}} a^2 q^{p(r/(2p)+a)^2} (z^{-(r+1)/2-ap} - z^{(r-1)/2+ap}), \end{aligned}$$

где звездочка в сумме действует на слагаемое с $m = 0$, как и выше. Для $\mathcal{Y}_r^-$ нет исключенного члена при $m = 0$, и суммирование по полужелым m дает

$$\begin{aligned} \chi_r^-(q, z) &= \sum_{m \geq \frac{1}{2}} \chi^{\mathcal{K}_{m,m}[r]}(q, z) + \sum_{m \geq \frac{1}{2}} \chi^{\mathcal{K}'_{m,m}[r]}(q, z) = 2 \sum_{m \geq \frac{1}{2}} \chi^{\mathcal{K}'_{m,m}[r]}(q, z) = \\ &= \frac{1}{q^{1/8} \vartheta_{1,1}(q, z)} \sum_{a \in \mathbb{Z} + 1/2} \left(a^2 - \frac{1}{4} \right) q^{p(r/(2p)+a)^2} (z^{-(r+1)/2-ap} - z^{(r-1)/2+ap}). \end{aligned}$$

В терминах тета-функций это приводит к нужным формулам. При $r = p$ из (3.45) и (3.46) находим, что

$$\chi_p^+(q, z) = \sum_{m \geq 1} \chi^{\mathcal{K}_{m,m}[p]}(q, z) + \sum_{m \geq 0} \chi^{\mathcal{K}'_{m,m}[p]}(q, z) = \frac{2\theta'_p(q, z)}{p\Omega(q, z)},$$

и аналогичное вычисление дает $\chi_p^-(q, z)$.

4.2.2. Свойства относительно преобразований спектрального потока. Теперь рассмотрим орбиту приведенных выше характеров $\chi_r^\pm(q, z)$ под действием спектрального потока. Из формул (Б.5)–(Б.8) (см. приложение Б) следует, что их свойства относительно преобразования спектрального потока выражаются формулами

$$\begin{aligned} \chi_{r;1}^+(q, z) &= -\chi_r^-(q, z) - \omega_r^-(q, z) - \frac{1}{2} \chi_{p-r}(q, z), \\ \chi_{r;1}^-(q, z) &= -\chi_r^+(q, z) - \omega_r^+(q, z) \end{aligned}$$

при $1 \leq r \leq p-1$, а также

$$\begin{aligned}\chi_{p;1}^+(q, z) &= -\chi_p^-(q, z) - \omega_p^-(q, z), \\ \chi_{p;1}^-(q, z) &= -\chi_p^+(q, z) - \omega_p^+(q, z),\end{aligned}$$

где $\chi_r(q, z)$ – характеры интегрируемых представлений и

$$\begin{aligned}\omega_r^+(q, z) &= \frac{1}{\Omega(q, z)} \left(\frac{r}{2p} (\theta_r(q, z) + \theta_{-r}(q, z)) - \frac{1}{p} (\theta'_r(q, z) - \theta'_{-r}(q, z)) \right), \\ \omega_r^-(q, z) &= \frac{1}{\Omega(q, z)} \left(\frac{r}{2p} (\theta_{p-r}(q, z) + \theta_{r-p}(q, z)) - \frac{1}{p} (\theta'_{r-p}(q, z) - \theta'_{p-r}(q, z)) \right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

при $1 \leq r \leq p-1$, а также

$$\omega_p^+(q, z) = \frac{\theta_p(q, z)}{\Omega(q, z)}, \quad \omega_p^-(q, z) = \frac{\theta_0(q, z)}{\Omega(q, z)}.\quad (4.5)$$

Для $\omega_r^\pm$ мы определим правила преобразования под действием спектрального потока как для характеров (см. формулу (2.5)). Тогда их преобразования вычисляются как

$$\begin{aligned}\omega_{r;1}^+(q, z) &= -\omega_r^-(q, z) - \frac{1}{2} \chi_{p-r}(q, z), \\ \omega_{r;1}^-(q, z) &= -\omega_r^+(q, z) + \frac{1}{2} \chi_r(q, z)\end{aligned}$$

при $1 \leq r \leq p-1$, а также $\omega_{p;1}^\pm(q, z) = \omega_p^\pm(q, z)$. В настоящей работе мы не вдаемся в теоретико-представленческую интерпретацию $\omega_r^\pm$.

4.3. Свойства относительно модулярных преобразований. Теперь вычислим поведение при модулярных преобразованиях для $5p-1$ функций – найденных выше характеров W -алгебры $\chi_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, характеров интегрируемых представлений χ_r , $1 \leq r \leq p-1$, а также $\omega_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$.

4.3.1. “Минимальное” $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$. Начнем с напомним хорошо известных формул преобразований

$$\chi_r(\tau + 1, \nu) = \lambda_{r,p} \chi_r(\tau, \nu), \quad \lambda_{r,p} = e^{i\pi(r^2/(2p)-1/4)},\quad (4.6)$$

$$\chi_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)} \sum_{s=1}^{p-1} \sin \frac{\pi r s}{p} \chi_s(\tau, \nu),\quad (4.7)$$

которые сообщают нам, что характеры интегрируемых представлений χ_r линейно порождают $(p-1)$ -мерное $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$.

4.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Строго говоря, для определения $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$ следует “истребить” множитель $e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)}$ в выражении (4.7); это даст $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, однозначно определяемое T -преобразованиями в (4.6) и S -преобразованиями

$$S\chi_r = \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{s=1}^{p-1} \sin \frac{\pi r s}{p} \chi_s.\quad (4.8)$$

Связь между (4.7) и (4.8) можно выразить в терминах фактора автоморфности. Если опустить некоторые подробности (см. монографию [58], а также работу [10], п. 4.1), то суть дела сводится к тому факту, что функция $j(\gamma; \tau, \nu)$, определенная на $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ формулой

$$j(\gamma; \tau, \nu) = \zeta_{c,d}^{-1} (c\tau + d)^{-1/2} e^{-i\pi c\nu^2/(c\tau+d)}, \quad (4.9)$$

где $\zeta_{c,d}$ – некоторый корень восьмой степени из единицы [58], удовлетворяет условию коцикличности $j(\gamma\gamma'; \tau, \nu) = j(\gamma'; \tau, \nu)j(\gamma; \gamma'\tau, \gamma'\nu)$, $j(1; \tau, \nu) = 1$.

Далее мы будем записывать модулярные преобразования в том виде, как они следуют из вычислений для характеров, помня о том, что множители $e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)}$ должны быть опущены, если мы говорим о конечномерных $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлениях. Кроме того, для “распутывания” структуры вычисленных ниже представлений мы также используем *матричные* факторы автоморфности.

4.3.3. ЛЕММА. Функции

$$\begin{aligned} \pi_0(\tau, \nu) &= \omega_p^-(\tau, \nu), \\ \pi_r(\tau, \nu) &= \omega_r^+(\tau, \nu) + \omega_{p-r}^-(\tau, \nu), \quad 1 \leq r \leq p-1, \\ \pi_p(\tau, \nu) &= \omega_p^+(\tau, \nu) \end{aligned} \quad (4.10)$$

линейно порождают $(p+1)$ -мерное $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление $\mathcal{R}_{p+1}$:

$$\begin{aligned} \pi_r(\tau+1, \nu) &= \lambda_{r,p} \pi_r(\tau, \nu), \\ \pi_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) &= i\sqrt{\frac{2}{p}} e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)} \left(\frac{1}{2} \pi_0(\tau, \nu) + \frac{(-1)^r}{2} \pi_p(\tau, \nu) + \sum_{s=1}^{p-1} \cos \frac{\pi r s}{p} \pi_s(\tau, \nu) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

при $0 \leq r \leq p$. Функции

$$\begin{aligned} \varpi_r(\tau, \nu) &= (p-r)\omega_r^+(\tau, \nu) - r\omega_{p-r}^-(\tau, \nu), \\ \varsigma_r(\tau, \nu) &= \tau\varpi_r(\tau, \nu), \end{aligned} \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad (4.12)$$

преобразуются как

$$\varpi_r(\tau+1, \nu) = \lambda_{r,p} \varpi_r(\tau, \nu), \quad \varsigma_r(\tau+1, \nu) = \lambda_{r,p} (\varsigma_r(\tau, \nu) + \varpi_r(\tau, \nu)), \quad (4.13)$$

$$\varpi_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)} \sum_{s=1}^{p-1} \sin \frac{\pi r s}{p} \left(\varsigma_s(\tau, \nu) - \frac{p\nu}{2} \chi_s(\tau, \nu) \right), \quad (4.14)$$

$$\varsigma_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)} \sum_{s=1}^{p-1} \sin \frac{\pi r s}{p} \left(-\varpi_s(\tau, \nu) + \frac{p\nu}{2\tau} \chi_s(\tau, \nu) \right). \quad (4.15)$$

Это показывается прямым вычислением исходя из формул (Б.10)–(Б.12) для S -преобразования. Для T -преобразования формулы очевидны.

Для упрощения обозначений мы больше не будем вводить специальные символы для функций типа $\tau\varpi_r$ (4.12). Из п. В.2.1 (см. приложение В) ясно, как появление τ порождает тензорные множители $\mathbb{C}^2$ в $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлениях.

4.3.4. Структура $SL(2, \mathbb{Z})$ -представления: деформированное $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$. Примесь членов, имеющих вид произведения ν на характеры интегрируемых представлений (4.14), соответствует структуре представления, описанной в п. B.2.2 (см. приложение B), когда прямая сумма представлений деформируется матричным фактором автоморфности. Функции ϖ_r , $\tau\varpi_r$ и χ_r комбинируются в столбец $\begin{pmatrix} f(\tau)\varpi \\ \chi \end{pmatrix}$, где $f(\tau)$ – многочлен степени ≤ 1 и мы опускаем индексы, считая ϖ и χ векторами в $\mathbb{C}^{p-1}$. Поэтому столбец приведенного выше вида можно рассматривать (при прочтении снизу вверх) как элемент пространства $\mathbb{C}^{p-1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{p-1}$. $SL(2, \mathbb{Z})$ -Действие, задаваемое равенствами (4.13), (4.14) (в том варианте, когда это *правое* действие) отличается от действия на $\mathbb{C}^{p-1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{p-1} = \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$ матричным фактором автоморфности; оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varpi \\ \chi \end{pmatrix} \cdot \gamma = \begin{pmatrix} (c\tau + d)f(\gamma\tau)\varpi \cdot \gamma + \beta\nu c f(\gamma\tau)\chi \cdot \gamma \\ \chi \cdot \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta = -\frac{p}{2}, \quad (4.16)$$

где $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в правой части действует на каждом $\mathbb{C}^{p-1}$ как на характерах интегрируемых представлений, а $\gamma\tau$ определено в п. B.1 (см. приложение B). При $\beta = 0$ (или, формально, $\nu = 0$) очевидно, что матричный фактор автоморфности равен единице, и закон преобразования (4.16) принимает вид закона преобразования на $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$.

В следующей лемме мы встречаем $\tau^2\varphi_r$ и, тем самым, тензорный множитель $\mathbb{C}^3$ (ср. с п. B.3.1 в приложении B).

4.3.5. ЛЕММА. *Функции*

$$\begin{aligned} \rho_0(\tau, \nu) &= \chi_p^-(\tau, \nu), \\ \rho_r(\tau, \nu) &= \chi_r^+(\tau, \nu) + \chi_{p-r}^-(\tau, \nu) + \frac{r}{2p}\chi_r(\tau, \nu), \quad 1 \leq r \leq p-1, \\ \rho_p(\tau, \nu) &= \chi_p^+(\tau, \nu) \end{aligned}$$

преобразуются как

$$\begin{aligned} \rho_r(\tau + 1, \nu) &= \lambda_{r,p}\rho_r(\tau, \nu), \\ \rho_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) &= i\sqrt{\frac{2}{p}}e^{i\pi k\nu^2/(2\tau)}\left(\frac{1}{2}(\tau\rho_0(\tau, \nu) + \nu\pi_0(\tau, \nu)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^r}{2}(\tau\rho_p(\tau, \nu) + \nu\pi_p(\tau, \nu)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{p-1}\cos\frac{\pi rs}{p}(\tau\rho_s(\tau, \nu) + \nu\pi_s(\tau, \nu))\right). \end{aligned}$$

Функции

$$\varphi_r(\tau, \nu) = (p-r)\chi_r^+(\tau, \nu) - r\chi_{p-r}^-(\tau, \nu) - \left(\frac{r^2}{4p} + \frac{1}{8i\pi\tau}\right)\chi_r(\tau, \nu), \quad 1 \leq r \leq p-1,$$

преобразуются как

$$\varphi_r(\tau + 1, \nu) = \lambda_{r,p} \varphi_r(\tau, \nu),$$

$$\varphi_r\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{i\pi k \nu^2 / (2\tau)} \sum_{s=1}^{p-1} \sin \frac{\pi r s}{p} \left(\tau^2 \varphi_s(\tau, \nu) + \nu \tau \varpi_s(\tau, \nu) - \frac{p\nu^2}{4} \chi_s(\tau, \nu) \right).$$

Это также следует из прямого вычисления на основании формул (Б.10)–(Б.12) для S . Для T , помимо тех же собственных значений $\lambda_{r,p}$, преобразования сводятся к несложному вычислению – подстановке $\tau \mapsto \tau + 1$ в многочлены степени не выше 2.

4.3.6. Структура $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлений: деформированные $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p+1}$ и $\mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$. Из п.п. 4.3.5 и Б.2.2 (см. приложение Б) следует, что функции ρ (без индексов, т.е. рассматриваемые как вектор в $\mathbb{C}^{p+1}$) преобразуются под действием $SL(2, \mathbb{Z})$ как (снова для случая правого действия)

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\rho \\ \pi \end{pmatrix} \cdot \gamma = \begin{pmatrix} (c\tau + d)f(\gamma\tau)\rho \cdot \gamma + \alpha \nu c f(\gamma\tau)\pi \cdot \gamma \\ \pi \cdot \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \quad (4.17)$$

где $f(\tau)$ – многочлен степени ≤ 1 , а в правой части $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на каждом $\mathbb{C}^{p+1}$ такое же, как на $\mathcal{R}_{p+1}$ (см. формулы (4.11)). Это представление тоже имеет вид деформации $\mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p+1}$ с помощью матричного фактора автоморфности.

Аналогично, как следует из п.п. 4.3.5 и Б.3.2 (см. приложение Б), $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на элементах φ (рассматриваемых сейчас как вектор из пространства $\mathbb{C}^{p-1}$, несущего $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, изоморфное $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$) есть “композиция” конечномерных представлений и “еще большего” матричного фактора автоморфности: полученные в последней лемме преобразования эквивалентны $SL(2, \mathbb{Z})$ -действию вида

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi \\ \varpi \\ \chi \end{pmatrix} \cdot \gamma = \begin{pmatrix} (c\tau + d)^2 f(\gamma\tau)\varphi \cdot \gamma + \alpha \nu c (c\tau + d) f(\gamma\tau)\varpi \cdot \gamma + \frac{\alpha\beta}{2} \nu^2 c^2 f(\gamma\tau)\chi \cdot \gamma \\ \varpi \cdot \gamma \\ \chi \cdot \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где $f(\tau)$ – многочлен степени ≤ 2 , в правой части $SL(2, \mathbb{Z})$ действует на каждом $\mathbb{C}^{p-1}$ как на $\mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$ и

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{p}{2},$$

как и раньше. При нулевых значениях α и β воспроизводится прямая сумма конечномерных представлений, где “ φ ”-представление есть $\mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$.

4.3.7. ПРИМЕР: $k = 0$. При $k = 0$ (и $9p - 3 = 15$) генераторы W -алгебры приведены в п. 4.1.3. В этом случае имеется один характер интегрируемого представления $\chi_1 = 1$. Остальные $8 + 6 = 14$ обобщенных характеров составлены из триплета (π_0, π_1, π_2) , “ τ ”-дублета $(\varpi_1, \tau\varpi_1)$, представления $\mathbb{C}^2$ (вследствие появления τ), тензорно умноженного на другой триплет (ρ_0, ρ_1, ρ_2) , в S -преобразовании которого возникает $\nu\pi_r$, и, наконец, “ τ ”-триплета $(\varphi_1, \tau\varphi_1, \tau^2\varphi_1)$, в S -преобразовании которого возникают как ϖ_1 , так и χ_1 .

Отметим, что $(c = 0)$ -логарифмическая $\widehat{sl}(2)_0$ -модель несколько “меньше по размеру”, чем знаменитая логарифмическая $(3, 2)$ -модель с центральным зарядом $c = 0$ [59]. Логарифмическая $(p = 3, q = 2)$ -модель включает $(p-1)(q-1)/2 + 2pq = 13$ неприводимых представлений W -алгебры, в то время как пространство амплитуд на торе имеет (исходя из действия модулярной группы) размерность $(3p-1)(3q-1)/2 = 20$ [12]. Для $\widehat{sl}(2)_0$ эти два числа, видимо, равны $5p - 1 = 9$ и $9p - 3 = 15$, соответственно.

5. ГАМИЛЬТОНОВА РЕДУКЦИЯ К W -АЛГЕБРЕ $(p, 1)$ -МОДЕЛИ

В данном разделе мы применим функтор гамильтоновой редукции к W -алгебре логарифмической $\widehat{sl}(2)_k$ -модели. Мы покажем, что W -генераторы (4.2) и (4.3) редуцируются к генераторам триплетной W -алгебры [2], [7], [8] логарифмической $(p, 1)$ -модели, которые были построены в работе [10] в терминах вирасоровского скрининга.

Хорошо известно, что результат гамильтоновой редукции самой алгебры $\widehat{sl}(2)_k$ дается алгеброй Вирасоро

$$T(z)T(w) = \frac{d/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \quad (5.1)$$

с центральным зарядом

$$d = 13 - \frac{6}{k+2} - 6(k+2). \quad (5.2)$$

5.1. ТЕОРЕМА. *Гамильтонова редукция W -алгебры, порожденной токами (4.2) и (4.3), есть триплетная W -алгебра логарифмической $(p = k + 2, 1)$ -модели.*

5.2. Построение “обратной редукции”. Для доказательства этой теоремы, т.е. для нахождения того, как редуцируются представления W -алгебры, полезно вспомнить, как можно *реконструировать* $\widehat{sl}(2)$ -токи, исходя из результата редукции $T(z)$.

5.2.1. ЛЕММА (см. работу [60]). *Пусть ϕ и φ – два скалярных поля с операторными произведениями*

$$\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) = \frac{1}{(z-w)^2}, \quad \partial\phi(z)\partial\phi(w) = \frac{-1}{(z-w)^2}$$

и пусть $T(z)$ удовлетворяет соотношению (5.1), где d определено в (5.2). Тогда при $k \neq 0$ токи

$$E(z) = e^{\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))}, \quad (5.3)$$

$$H(z) = \sqrt{\frac{k}{2}} \partial\varphi(z), \quad (5.4)$$

$$F(z) = \left((k+2)T(z) - \frac{k}{2}\partial\phi\partial\phi(z) - \sqrt{\frac{k}{2}}(k+1)\partial^2\phi(z) \right) e^{-\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))} \quad (5.5)$$

удовлетворяют $\widehat{sl}(2)$ -операторным произведениям (2.2).

Подчеркнем, что здесь не требуется свободно-полевого представления $T(z)$.

Такое построение $E(z)$, $H(z)$ и $F(z)$ можно рассматривать как “обращение” гамильтоновой редукции исходя из ее результата – тензора энергии–импульса $T(z)$. Редукция любого выражения, построенного из $\widehat{sl}(2)$ -токов, таким образом, сводится просто к тому, чтобы выразить токи в терминах $T(z)$, $\varphi(z)$ и $\phi(z)$ (и, в зависимости от желания, в конце положить два свободных поля равными нулю). В частности, сугаваровский тензор энергии–импульса вычисляется в соответствии с этой процедурой как

$$T_{\text{Sug}}(z) = T(z) + \frac{1}{2}\partial\varphi\partial\varphi(z) - \frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi(z) - \sqrt{\frac{k}{2}}\partial^2\phi(z).$$

5.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенные выше формулы не допускают предела $k \rightarrow 0$. Однако это можно считать артефактом выбора скалярных полей в (5.3)–(5.5). Замена скалярных полей вида

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\bar{X} + \frac{\sqrt{k}}{2}X\right), \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\bar{X} - \frac{\sqrt{k}}{2}X\right),$$

где новые поля X и $\bar{X}$ имеют операторные произведения

$$\partial X(z)\partial\bar{X}(w) = \frac{1}{(z-w)^2}, \quad \partial X(z)\partial X(w) = \text{reg}, \quad \partial\bar{X}(z)\partial\bar{X}(w) = \text{reg},$$

преобразует (5.3)–(5.5) к такому виду, где k можно положить равным нулю, в результате чего получаем

$$\begin{aligned} E(z) &= e^{X(z)}, \\ H(z) &= \partial\bar{X}(z), \\ F(z) &= (2T(z) - \partial\bar{X}\partial\bar{X}(z) - \partial^2\bar{X}(z))e^{-X(z)} \end{aligned}$$

для $\widehat{sl}(2)_0$ -токов. Мы ограничимся наблюдением, что этой простой замены переменных достаточно для разрешения проблемы с $k = 0$, и будем работать с выражениями вида (5.3)–(5.5), предпочтительного главным образом по эстетическим причинам.

5.2.3. Редукция представлений. Простой рецепт “обращения” редукции распространяется на представления. Нетривиальные $\widehat{sl}(2)$ -состояния/операторы старшего веса $U_\lambda(z) \doteq |\lambda\rangle$ со спином λ получаются “одеванием” вирасоровского примарного поля $\mathcal{V}_\delta(z)$ размерности⁹⁾

$$\delta = \frac{\lambda(\lambda+1)}{k+2} - \lambda \tag{5.6}$$

как

$$U_\lambda(z) = \mathcal{V}_\delta(z)e^{\lambda\sqrt{2/k}(\varphi(z)-\phi(z))}.$$

⁹⁾ Здесь и далее все примарные поля алгебры Вирасоро и их размерности определены по отношению к $T(z)$ из формул (5.1), (5.2).

Выбор $\lambda = \lambda^+(r, s)$ (см. п. 2.2) отвечает вирасоровским размерностям

$$\delta_{r,s} = \frac{\lambda^+(r, s)(\lambda^+(r, s) + 1)}{k + 2} - \lambda^+(r, s) = \frac{r^2 - 1}{4(k + 2)} + (k + 2)\frac{s^2 - 1}{4} + \frac{1 - rs}{2}.$$

Например, состояние старшего веса со спином $1/2$ строится, таким образом, в виде $e^{(1/2)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))}\mathcal{V}_{[21]}(z)$, где $\mathcal{V}_{[21]}(z) \equiv \mathcal{V}_{\delta_{2,1}}(z)$ – “21”-вертексный оператор алгебры Вирасоро, отвечающей тензору энергии–импульса $T(z)$. При этом обращение в нуль особого вектора $F_0 F_0(e^{(1/2)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))}\mathcal{V}_{[21]}(z)) = 0$ следует из дифференциального уравнения $(k + 2)\partial^2 \mathcal{V}_{[21]}(z) - T(z)\mathcal{V}_{[21]}(z) = 0$, которому удовлетворяет $\mathcal{V}_{[21]}(z)$.

5.2.4. *Выражение $W^\pm(z)$ -токов.* Гамильтонова редукция полей (4.2) и (4.3), порождающих W -алгебру, особенно проста для $W^+(z)$ из-за простого вида формул для особых векторов $|\text{MFF}^-(r', 1)\rangle$, более того, она немедленно вычисляется явно в реализации (5.3). В соответствии с конструкцией нетвистованных состояний старшего веса из п. 5.2.3, имеем (вспомним обозначение (3.13))

$$L_{m,m}[r](z)|_{(5.3)-(5.5)} = \mathcal{V}_{[r, 2m+1]}(z)e^{(j-(k+2)m)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))};$$

поэтому при вычислении $W^+(z) = (E_{-1})^{3p-1}L_{1,1}[1](z)$ (см. формулу (4.3)) $L_{1,1}[1](z)$ выражается через $\mathcal{V}_{[1,3]}(z) = \mathcal{V}_{2k+3}(z)$; из (5.3) далее следует, что действие E_{-1} затрагивает только свободно-полевого сектор, поэтому

$$W^+(z)|_{(5.3)-(5.5)} = \mathcal{V}_{2k+3}(z)e^{(2k+3)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))}. \quad (5.7)$$

Это показывает, что гамильтонова редукция $W^+(z)$ есть вирасоровское примарное поле размерности $2p - 1$.

Гамильтонова редукция тока $W^-(z)$ вычисляется явно настолько, насколько “явной” является конструкция MFF особых векторов. Представляя операторы (3.34) при $n = m$ в рамках обратной гамильтоновой редукции как

$$U'_{m,m}[r](z)|_{(5.3)-(5.5)} = \mathcal{V}_{[r+2mp, 1]}(z)e^{(j+(k+2)m)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))},$$

мы вычисляем $W^-(z)$ в виде свободно-полевого вертекса, умноженного на ненулевой вирасоровский особый вектор, построенный на примарном поле $\mathcal{V}_{[2p+1, 1]}(z) = \mathcal{V}_1(z)$ размерности 1:

$$W^-(z)|_{(5.3)-(5.5)} = (D_{2k+2}(T)\mathcal{V}_1(z))e^{-(2k+3)\sqrt{2/k}(\varphi(z) - \phi(z))}, \quad (5.8)$$

где $D_{2k+2}(T)\mathcal{V}_1(z) = \alpha\partial^{2k+2}\mathcal{V}_1(z) + \dots + \gamma T(z)^{k+1}\mathcal{V}_1(z)$ – нормально упорядоченный дифференциальный многочлен по $T(z)$ и $\mathcal{V}_1(z)$ (и линейный по $\mathcal{V}_1(z)$) полной степени $2k + 2$, если считать $\deg T(z) = 2$, $\deg \mathcal{V}_1(z) = 1$ и $\deg \partial = 1$. Ясно, что $\oint \mathcal{V}_1$ – один из двух вирасоровских скринингов.

Таким образом, из равенств (5.7) и (5.8) мы видим, что два тока

$$\begin{aligned} w^+(z) &= \mathcal{V}_{2p-1}(z), \\ w^-(z) &= D_{2p-2}(T)\mathcal{V}_1(z) \end{aligned} \quad (5.9)$$

представляют собой результат гамильтоновой редукции $W^+(z)$ и $W^-(z)$. Более того, их конструкция в терминах генераторов Вирасоро и вертексов показывает, что они являются токами размерности $2p-1$, порождающими W -алгебру логарифмической $(p, 1)$ -модели конформной теории поля, которые были построены в работе [10] с использованием вирасоровского скрининга.

5.2.5. Если теперь использовать бозонизацию

$$T(z) = \frac{1}{2}\partial f(z)\partial f(z) + \frac{p-1}{\sqrt{2p}}\partial^2 f(z)$$

для тензора энергии-импульса и

$$\mathcal{V}_{[r,s]}(z) = e^{\sqrt{(2/p)}\lambda^+(r,s)f(z)} \quad (5.10)$$

для вертексов через свободное поле с операторным произведением $\partial f(z)\partial f(w) = 1/(z-w)^2$, то вертексные операторы (5.9) примут вид $\mathcal{V}_{[1,3]}(z) \equiv \mathcal{V}_{2p-1}(z) = e^{-\sqrt{2p}f(z)}$ и $\mathcal{V}_{[2p+1,1]}(z) \equiv \mathcal{V}_1(z) = e^{\sqrt{2p}f(z)}$, как и в свободно-полевой конструкции в работе [10], со скринингом $\oint e^{\sqrt{2p}f}$.

5.2.6. ПРИМЕР. При $k = 1$ дифференциальный многочлен в выражении (5.8) дается формулой

$$\begin{aligned} D_4\mathcal{V}_1(z) &= 9(-60T(z)\partial^2\mathcal{V}_1(z) - 6\partial T(z)\partial\mathcal{V}_1(z) - 18\partial^2T(z)\mathcal{V}_1(z) + \\ &+ 64T(z)T(z)\mathcal{V}_1(z) + 9\partial^4\mathcal{V}_1(z)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

(с вложенным нормальным упорядочением, как обычно, справа налево). Тогда в терминах бозонизации (5.10) находим

$$w^+(z) = e^{-\sqrt{6}f(z)},$$

а непосредственное вычисление (5.11) дает

$$\begin{aligned} w^-(z) &= (3120\partial^2 f(z)\partial^2 f(z) - 1440\partial^3 f(z)\partial f(z) - 960\sqrt{6}\partial^2 f(z)\partial f(z)\partial f(z) + \\ &+ 1440\partial f(z)\partial f(z)\partial f(z)\partial f(z) + 40\sqrt{6}\partial^4 f(z))e^{\sqrt{6}f(z)}, \end{aligned}$$

что равно произведению -80 на оператор $W^+(z)$ из $(p = 3, 1)$ -модели (см. работу [10], пример 2.2.1)¹⁰⁾.

¹⁰⁾Согласование $\pm$ -соглашений представляется особенно трудным.

5.3. “Редукция” характеров. Напомним, что согласно работе [61] взятие вычетов интегрируемых или допустимых $\widehat{sl}(2)$ -характеров при $z = q^n$ дает или нуль, или характеры вирасоровских представлений (умноженные на двухбозонный характер) в соответствии с гамильтоновой редукцией (под действием которой *некоторые* неприводимые $\widehat{sl}(2)$ -представления отображаются в тривиальные вирасоровские представления). Это можно рассматривать как “гамильтонову редукцию” на уровне характеров. Например, интегрируемые $\widehat{sl}(2)_k$ -характеры $\chi_r(q, z)$ являются голоморфными функциями z и поэтому имеют нулевые вычеты.

Это наблюдение следующим образом обобщается в логарифмических/ W -алгебраических терминах. Будем брать вычеты при $z = 1$. Как только что отмечалось, характеры интегрируемых представлений имеют, в частности, нулевой вычет в этой точке. Далее, для характеров W -алгебры из п. 4.2.1 мы также имеем

$$\text{res}_{z=1} \chi_r^\pm(q, z) = 0, \quad 1 \leq r \leq p$$

(хотя, как легко видеть, эти характеры имеют другие полюсы). С другой стороны, $\omega_r^\pm(q, z)$ в выражениях (4.4), (4.5) имеют ненулевые вычеты при $z = 1$, которые дают $2p$ характеров триплетной W -алгебры $(p, 1)$ -модели [10], умноженные на $1/\eta(q)^2$, что отвечает характеру двух свободных бозонов:

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=1} \omega_r^+(q, z) &= \frac{1}{\eta(q)^2} \frac{r\theta_{r,p}(q) - 2\theta'_{r,p}(q)}{p\eta(q)}, \\ \text{res}_{z=1} \omega_r^-(q, z) &= \frac{1}{\eta(q)^2} \frac{r\theta_{p-r,p}(q) + 2\theta'_{p-r,p}(q)}{p\eta(q)}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где тета-константы в правых частях суть соответствующие тета-функции при $z = 1$. Получающиеся характеры действительно являются характерами из работы [10] (отождествление требует коррекции соглашений для тета-производных и $\pm$ -обозначений).

Другую интерпретацию приведенных выше формул для вычетов можно получить в терминах *специализации* характеров W -алгебры к значению $z = 1$ ¹¹⁾. А именно (переходя на язык ν), полагая $\nu = 0$ в формулах модулярных преобразований (см. п.п. 4.3.3 и 4.3.5), получаем корректно определенные специализированные характеры:

$$\begin{aligned} \chi_r(\tau) &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \chi_r(\tau, \nu), \quad 1 \leq r \leq p-1, \\ \chi_r^\pm(\tau) &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \chi_r^\pm(\tau, \nu), \quad 1 \leq r \leq p. \end{aligned}$$

Взятие предела в определениях из п. 4.3.5 дает соответствующие функции $\rho_r(\tau)$, $1 \leq r \leq p+1$, и $\varphi_r(\tau)$, $1 \leq r \leq p-1$. Кроме того, определим

$$\widehat{\omega}_r^\pm(\tau) = \lim_{\nu \rightarrow 0} (\nu \omega_r^\pm(\tau, \nu)), \quad 1 \leq r \leq p,$$

¹¹⁾ Автор благодарен И. Ю. Типунину за это предложение.

что представляет собой не что иное, как вычеты (5.12), умноженные на несущественные постоянные множители. Согласно определениям из п. 4.3.3 это дает соответствующие функции $\hat{\pi}_r(\tau)$, $1 \leq r \leq p+1$, и $\hat{\omega}_r(\tau)$, $1 \leq r \leq p-1$.

Замечательно, что эти определения позволяют перейти к пределу $\nu \rightarrow 0$ в формулах для модулярных преобразований из п.п. 4.3.3 и 4.3.5 (поскольку ϖ_r входят в правые части преобразований в п. 4.3.5 только в комбинации $\nu \varpi_r(\tau, \nu)$). Однако формулы S -преобразований для “специализированных” таким образом характеров содержат отрицательные степени τ , например,

$$\hat{\pi}_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{2\tau}\hat{\pi}_0(\tau) + \frac{(-1)^r}{2\tau}\hat{\pi}_p(\tau) + \frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{p-1}\cos\frac{\pi rs}{p}\hat{\pi}_s(\tau)\right),$$

а также в неявном виде отрицательные степени τ в

$$\varphi_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{s=1}^{p-1}\sin\frac{\pi rs}{p}(\tau^2\varphi_s(\tau) + \tau\hat{\omega}_s(\tau)),$$

поскольку S -преобразование $\tau^2\varphi_r(\tau)$ приводит к появлению $\tau^{-1}\hat{\omega}_s(\tau)$ в правой части.

Переписывая формулы модулярных преобразований в терминах характеров $(p, 1)$ -модели $\tilde{\omega}_s(\tau) = \eta(\tau)^2\hat{\omega}_s(\tau)$ и $\tilde{\pi}_s(\tau) = \eta(\tau)^2\hat{\pi}_s(\tau)$, мы, в частности, воспроизводим $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление $\mathcal{R}_{p+1} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{R}_{p-1}^{\text{int}}$ на этих характерах из работы [10]:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= i\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{2}\tilde{\pi}_0(\tau) + \frac{(-1)^r}{2}\tilde{\pi}_p(\tau) + \sum_{s=1}^{p-1}\cos\frac{\pi rs}{p}\tilde{\pi}_s(\tau)\right), \\ \tilde{\omega}_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{s=1}^{p-1}\sin\frac{\pi rs}{p}\tau\tilde{\omega}_s(\tau).\end{aligned}$$

Преобразования оставшихся специализированных характеров содержат в правых частях как $(p, 1)$ -характеры, так и характеры свободных бозонов $\eta(\tau)^{-2}$:

$$\begin{aligned}\rho_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= i\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{2}\left(\tau\rho_0(\tau) + \frac{\tilde{\pi}_0(\tau)}{\eta(\tau)^2}\right) + \frac{(-1)^r}{2}\left(\tau\rho_p(\tau) + \frac{\tilde{\pi}_p(\tau)}{\eta(\tau)^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{p-1}\cos\frac{\pi rs}{p}\left(\tau\rho_s(\tau) + \frac{\tilde{\pi}_s(\tau)}{\eta(\tau)^2}\right)\right), \\ \varphi_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{s=1}^{p-1}\sin\frac{\pi rs}{p}\left(\tau^2\varphi_s(\tau) + \frac{\tau\tilde{\omega}_s(\tau)}{\eta(\tau)^2}\right).\end{aligned}$$

6. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

Данный раздел в основном представляет собой перечисление того, что предстоит сделать, или, в зависимости от взгляда, того, что автор не смог выполнить. Тем не менее изложенное здесь может быть полезно при рассмотрении логарифмических $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ -моделей с других точек зрения.

6.1. Три фермионных скрининга. Было бы исключительно интересно увидеть, как предложенная конструкция обобщается на случай с тремя фермионными скринингами, являющийся и в самом деле исключительным, поскольку коммутирующая с тремя фермионными скринингами W -алгебра представляет собой гамильтонову редукцию исключительной аффинной супералгебры Ли $\widehat{D}(2|1;\alpha)$. В то же время (см. работу [62]) она является алгеброй конформной теории поля косета

$$\frac{\widehat{sl}(2)_{k_1} \oplus \widehat{sl}(2)_{k_2}}{\widehat{sl}(2)_{k_1+k_2}},$$

что делает ее особенно интересной для приложений.

6.2. Соответствие Каждана–Люстига, двойственная квантовая группа и слияния. Напомним, что свойство киральной алгебры и связанной со скринингами квантовой группы быть централизаторами друг друга лежит в основе соответствия Каждана–Люстига [30] между категориями представлений алгебр вертексных операторов и квантовых групп.

У моделей ЛКТП имеются хорошие квантово-групповые аналоги, который ухватывают по крайней мере часть структуры логарифмических моделей и оказываются поэтому довольно полезными при их исследовании [11], [31], [32]. С квантово-групповой точки зрения центральную роль играют два объекта: *центр* и кольцо Гротендика. В известных примерах центр несет то же представление модулярной группы, которое реализуется на обобщенных характерах логарифмической модели¹²). Двойственная по Каждану–Люстигу квантовая группа в контексте $\widehat{sl}(2)_k$ – квантовая супергруппа $\overline{U}_q sl(2|1)$ в корне из единицы – может в действительности соответствовать логарифмической $\widehat{sl}(2)_k/u(1)$ -теории, поскольку число скринингов в этом случае равно числу свободных полей. Указания на сложную структуру ее центра можно найти уже в работе [64]. Чтобы центр вообще нес действие модулярной группы, квантовая группа должна быть ленточной и факторизуемой (ср. с работами [11], [32]); нахождение этих структур или, по крайней мере, некоторых их аналогов для квантовой супергруппы представляет собой отдельную довольно интересную задачу. Гамильтонова редукция ЛКТП, рассмотренная в разделе 5, также должна иметь ясный аналог для соответствующих двойственных по Каждану–Люстигу квантовых групп, или, по крайней мере, для их центров и действий модулярной группы на них.

Имеющийся опыт с двойственными по Каждану–Люстигу квантовыми группами показывает, что их кольца Гротендика дают “ K_0 -вариант” правил слияния для соответствующих W -алгебр [10]–[12], [28]. Хотя этот “экспериментальный закон” может потребовать модификации для рассматриваемого случая дуальной пары, состоящей из определенной выше W -алгебры и $\overline{U}_q sl(2|1)$ в корне из единицы, кольцо

¹²) Разложение $SL(2, \mathbb{Z})$ -представления на центре квантовой группы, включающее тензорные сомножители $\mathbb{C}^n$ (в действительности $\mathbb{C}^2$), насколько нам известно, было впервые обнаружено в работе [63].

Гротендика двойственной квантовой группы несомненно связано с теорией представлений W -алгебры, являясь в то же время объектом, который гораздо легче вычислить¹³⁾.

Другое, довольно спекулятивное следствие из (пока еще гипотетического) соответствия Каждана–Люстига с квантовой группой $sl(2|1)$ состоит в том, что, поскольку $sl(2|1)$ имеет типические (“широкие”) и атипические (“узкие”) представления, подобную же картину (в той мере, в какой она сохраняется при специализации к корню из единицы и при наложении связей в квантовой группе) можно ожидать для представлений W -алгебры. Тогда построенные выше представления $\mathcal{Y}_r^\pm$ определенно являются “узкими”. Задачу о “типических/широких/массивных” представлениях и о роли, которую они могут играть, мы оставляем на будущее (их $\widehat{sl}(2)$ -“кирпичики” могут иметь экстремальные диаграммы, похожие на диаграммы для допустимых или даже ослабленных представлений, ср. с работой [5]).

6.3. Более общие модели: “триpletные” W -алгебры вместо $\widehat{sl}(2)$. При целых k должны существовать логарифмические модели, которые дают иное обобщение логарифмической $\widehat{sl}(2)_k$ -модели, чем первое приходящее на ум $\widehat{sl}(2) \rightarrow \widehat{sl}(n)$. Бозонизация алгебры $\widehat{sl}(2)_k$, рассмотренная в п. 2.4, представляет собой $(n=2)$ -случай общей схемы для алгебр $\mathcal{W}_n^{(2)}(k)$, $n \geq 1$, которые строятся очень похожим образом [52]¹⁴⁾. При $n > 2$ набор $n+1$ векторов из $\mathbb{C}^{n+1}$, обобщающий данные ξ, ψ_-, ψ_+ из п. 2.4.1, — это $\xi, a_{n-2}, \dots, a_1, \psi_-, \psi_+$, причем матрица Грама обобщает (2.16) как

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \xi \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \dots \\ a_1 \\ \psi_- \\ \psi_+ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2(k+n) & -k-n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k-n & 2(k+n) & -k-n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k-n & 2(k+n) & -k-n & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -k-n & 1 & k+n-1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & k+n-1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ее определитель равен $-n(k+n)^{n-1}$). Эти векторы и набор $n+1$ скалярных полей φ используются для построения скринингов (точка обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$)

$$E_i = \oint e^{a_i \cdot \varphi}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad Q_- = \oint e^{\psi_- \cdot \varphi}, \quad Q_+ = \oint e^{\psi_+ \cdot \varphi},$$

которые представляют нильпотентную подалгебру в $\mathcal{U}_q sl(n|1)$. Централизатор скринингов является W -алгеброй $\mathcal{W}_n^{(2)}(k)$, порожденной двумя токами $E(z)$ и $F(z)$

¹³⁾ Недавно мы узнали о результатах работы [65], авторы которой продвинулись намного дальше кольца Гротендика для квантовых групп, тесно связанных с двойственными логарифмическими $(p, 1)$ -моделями: там вычислены тензорные произведения различных неразложимых представлений квантовой группы. Автор благодарен К. Эрдману за это сообщение.

¹⁴⁾ Случай $n = 1$ — просто $\beta\gamma$ -система, а случай $n = 3$ — алгебра Бершадского–Полякова [66], [67].

$$E(z)F(w) = \frac{\lambda_{n-1}(n, k)}{(z-w)^n} + \frac{n\lambda_{n-2}(n, k)H(w)}{(z-w)^{n-1}} + \dots,$$

где $\lambda_m(n, k) = \prod_{i=1}^m (i(k+n-1)-1)$, и, далее,

$$H(z)E(w) = \frac{E(w)}{z-w}, \quad H(z)F(w) = -\frac{F(w)}{z-w}, \quad H(z)H(w) = \frac{(n-1)k/n + n-2}{(z-w)^2}.$$

Достаточно явная конструкция токов $E(z)$ и $F(z)$ приведена в работе [52].

Элементы приведенных выше матриц Грама являются целыми при целых k , а фермионные скрининги коммутируют при $k+n \geq 1$; тогда “интегрируемые” представления алгебры $\mathcal{W}_n^{(2)}(k)$, упомянутые в работе [52] (см. также [48]), являются хорошей отправной точкой для построения логарифмических моделей.

6.4. Другие логарифмические $\widehat{sl}(2)_k$ -модели. Имеются два аспекта, касающиеся “других” логарифмических $\widehat{sl}(2)_k$ -моделей с неотрицательными целыми k . Во-первых, есть различные возможности построения “существенно больших” моделей с помощью, например, взятия ядра только одного скрининга. Во-вторых, в случае в точности двух скринингов априори отличное логарифмическое расширение конформных $\widehat{sl}(2)_k$ -моделей с целыми $k \geq -1$ может быть основано на “несимметричной” бозонизации $\widehat{sl}(2)_k$ (с фермионным и бозонным скринингами). Было бы не вполне тривиально, если бы эти результаты совпали с результатами настоящей работы.

Еще одна возможность состоит в том, чтобы “бозонизовать” $\widehat{sl}(2)_k$ с помощью конструкции (5.4) в терминах двух свободных полей и тензора энергии-импульса $T(z)$, который не выражен через свободное поле. Тогда подход на основе скринингов и ядра будет включать скрининг S , построенный в терминах полей из п. 5.2.1 как [23]

$$S = \oint e^{\sqrt{k/2}\phi} \mathcal{V}_{[12]}, \quad (6.1)$$

где $\mathcal{V}_{[12]}(z)$ – “12”-вертексный оператор для $T(z)$ размерности $\delta_{12} = 3k/4 + 1$. При доказательстве того, что S является скринингом, используется дифференциальное уравнение $\partial^2 \mathcal{V}_{[12]}(z) - (k+2)T(z)\mathcal{V}_{[12]}(z) = 0$, которому удовлетворяет $\mathcal{V}_{[12]}(z)$. Нетрудно видеть, что S – фермионный скрининг. Более того, подобно вирасоровскому вертексному оператору $\mathcal{V}_{[12]}$, он имеет две компоненты, различным образом отображающие между вирасоровскими модулями. Тогда построение логарифмической $\widehat{sl}(2)_k$ -модели можно повторить с действием такого скрининга.

6.5. Рациональные k . Построение логарифмической $\widehat{sl}(2)_k$ -теории для рациональных k кажется более сложной (и без сомнения более объемной) задачей. Для рациональных k бозонизация (2.17) по-прежнему применима, и существуют два фермионных скрининга, определяемых выражениями (2.18), но соответствующие вертексные операторы $e^{\psi \pm \cdot \varphi(z)}$ больше не локальны по отношению друг к другу. Может

оказаться, что обобщения на рациональные k будет легче достичь в “несимметричной” бозонизации $\widehat{sl}(2)$ с одним бозонным и одним фермионным скринингами, но эта задача во всяком случае представляется достаточно сложной. Окончательная логарифмическая теория должна включать элегантные конструкции из работ [3], [5].

6.6. Проективные модули. Взятие ядра скринингов и отождествление актуальной W -алгебры и ее неприводимых представлений составляет только первый шаг в построении (кирального сектора) модели ЛКТП, поскольку следует брать *расширения* этих представлений для получения модулей, в которых соответствующие генераторы (например, L_0) действуют ненулевым образом. Расширения надо строить “до упора”, что означает построение проективных накрывающих неприводимых модулей над W -алгеброй. Полное пространство состояний в данном киральном секторе есть при этом сумма всех неизоморфных неразложимых проективных модулей. В этом состоит еще одно отличие от полупростого/рационального случая, где киральное пространство состояний исчерпывается неприводимыми представлениями. Для выбранных конкретных значений k конструкции некоторых неразложимых $\widehat{sl}(2)$ -модулей были приведены в работах [3], [5]. Определенных сложностей можно ожидать применительно к W -алгебре из настоящей работы из-за того, что до отделения матричных факторов автоморфности представление модулярной группы бесконечномерно, что может указывать на некоторые патологии в проективных модулях над W -алгеброй.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Структура вложений $\widehat{sl}(2)_k$ -модулей Верма

Напомним структуру вложений некоторых $\widehat{sl}(2)_k$ -модулей Верма с положительным целым $k+2$. Она, разумеется, хорошо известна и приводится здесь для удобства ссылок; читатель может также найти рисунок твистованного модуля Верма полезным для расшифровки рисунков в основной части данной работы.

Для состояния старшего веса в модуле Верма будем использовать обозначение $\bullet$, напоминающее экстремальную диаграмму модуля Верма: в соответствии с условиями уничтожения (2.6) при $\theta = 0$ $\widehat{sl}(2)$ -операторы действуют на вектор старшего веса как

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \xleftarrow{F_0} & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \searrow E_{-1} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}, \quad (A.1)$$

где заселенные состояния, показанные точками, простираются с запада на юго-восток, но не на восток или север. Такое обозначение естественным образом распространяется на $(\theta = 1)$ -твистованные модули Верма, экстремальная диаграмма которых

 Рис. А.1. Структура вложений в модуле Верма $\mathcal{M}_{\lambda+(r,s)}$.

имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & E_0 & & & & \\
 & & \bullet & \rightarrow & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & F_{-1} & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array}, \quad (A.2)$$

и поэтому мы используем $\nearrow$ для обозначения твистованного вектора старшего веса с твистом 1.

Пусть $p = k + 2 \in \{2, 3, \dots\}$ и $\lambda = \lambda^+(r, s) = (r-1)/2 - p(s-1)/2$. Тогда подмодули в модуле Верма $\mathcal{M}_\lambda$ организованы, как это показано на рис. А.1. Стрелки, несущие надпись $(r', s')^\pm$, обозначают особые векторы $|\text{MFF}^\pm(r', s')\rangle$ (см. п. 2.2). Надписи рядом с подмодулями Верма, представленными точками, указывают спин соответствующего вектора старшего веса. В самом правом столбце указан относительный уровень по отношению к вектору старшего веса модуля:

$$\ell_i = \begin{cases} \frac{i}{2}((s + \frac{i}{2} - 1)p - r) & \text{для четных } i, \\ (s + \frac{i-3}{2})(r + \frac{i-1}{2}p) & \text{для нечетных } i. \end{cases} \quad (A.3)$$

Почтительно рассмотрим диаграмму на рис. А.1, преобразованную спектральным потоком при $\theta = 1$. Более точно, возьмем твистованный модуль Верма $\mathcal{M}_{\lambda+1+k/2;1}$, вектор старшего веса которого лежит в градуировке $(\lambda+1, \ell)$, где (λ, ℓ) – градуировка вектора старшего веса модуля $\mathcal{M}_\lambda$ (см. формулы (2.6)). При том же $\lambda = (r-1)/2 - p(s-1)/2$ диаграмма вложений модуля $\mathcal{M}_{\lambda+1+k/2;1}$ приведена на рис. А.2, где стрелки, обозначенные $(a, b)_{;1}^\pm$, соответствуют особым векторам $|\text{MFF}^\pm(a, b; 1)\rangle$. Надписи рядом с твистованными векторами старшего веса *указывают их заряд, а не спин* (т.е. собственное значение H_0 , а не λ из (2.6)).

Мы оставляем читателю возможность поместить две диаграммы, для $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{M}_{\lambda+p/2;1}$, в соответствующие градуировки на одном и том же рисунке и увидеть, как строится расширение одного модуля другим (ключевым является совпадение длин горизонтальных стрелок на двух диаграммах).

Напомним еще характеры некоторых неприводимых подфакторов, появляющихся на рис. А.1. Пусть $\mathcal{N}_i$ обозначает правый из двух неприводимых подфакторов

Рис. А.2. Структура вложений $(\theta = 1)$ -твистованного модуля Верма $\mathcal{M}_{\lambda+(r,s);1}$. Надписи рядом с вершинами указывают *заряд* соответствующего твистованного вектора старшего веса.

на i -м уровне вложения (т.е. на уровне ℓ_i относительно вершины диаграммы). Из резольвенты Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда следует выражение для его характера:

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{N}_i}(q, z) &= \frac{q^{r^2/(4p) - ((s-1)/2)r + ((s-1)^2/4)p}}{q^{1/8}\vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ &\times \left(\sum_{a \geq 0} + \sum_{a \leq -s-i-1} \right) q^{(i+2a)/2((s-1+(i+2a)/2)p-r)} \times \\ &\times (z^{-(r+1)/2 + ((s+i+2a-1)/2)p} - z^{(r-1)/2 - ((s+i+2a-1)/2)p}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

для четных i и

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{N}_i}(q, z) &= \frac{q^{r^2/(4p) - ((s-1)/2)r + ((s-1)^2/4)p}}{q^{1/8}\vartheta_{1,1}(q, z)} \times \\ &\times \left(\sum_{a \geq 1} + \sum_{a \leq 1-s-i} \right) q^{(i+1+2a)/2((s+(i+2a-1)/2)p-r)} \times \\ &\times (z^{(r-1)/2 - ((s+i+2a)/2)p} - z^{-(r+1)/2 + ((s+i+2a)/2)p}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

для нечетных i .

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Соглашения относительно тета-функций

Тета-функции высшего уровня определяются как

$$\theta_{r,p}(q, z) = \sum_{\iota \in \mathbb{Z} + \frac{r}{2p}} q^{p\iota^2} z^{p\iota}. \quad (\text{B.1})$$

Положим

$$\theta'_{r,p}(q, z) = z \frac{\partial}{\partial z} \theta_{r,p}(q, z), \quad \theta''_{r,p}(q, z) = \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \theta_{r,p}(q, z), \quad (\text{B.2})$$

а также введем классические тета-функции

$$\vartheta_{1,1}(q, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{(m^2-m)/2} (-z)^{-m} = \prod_{m \geq 0} (1 - z^{-1}q^m) \prod_{m \geq 1} (1 - zq^m) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m), \quad (\text{B.3})$$

$$\vartheta(q, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2/2} z^m, \quad (\text{B.4})$$

которые связаны с (B.1) как

$$\theta_{r,p}(q, z) = z^{r/2} q^{r^2/(4p)} \vartheta(q^{2p}, z^p q^r).$$

Свойства квазипериодичности тета-функций выражаются как

$$\theta_{r,p}(q, zq^n) = q^{-pn^2/4} z^{-pn/2} \theta_{r+pn,p}(q, z), \quad (\text{B.5})$$

где $\theta_{r+pn,p}(q, z) = \theta_{r,p}(q, z)$ для четных n , и

$$\vartheta_{1,1}(q, zq^n) = (-1)^n q^{-(n^2+n)/2} z^{-n} \vartheta_{1,1}(q, z), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Б.6})$$

Отсюда следует, что

$$\theta'_{r,p}(q, zq^n) = q^{-pn^2/4} z^{-pn/2} \left(\theta'_{r+pn,p}(q, z) - \frac{pn}{2} \theta_{r+pn,p}(q, z) \right), \quad (\text{Б.7})$$

$$\theta''_{r,p}(q, zq^n) = q^{-pn^2/4} z^{-pn/2} \left(\theta''_{r+pn,p}(q, z) - pn \theta'_{r+pn,p}(q, z) + \frac{p^2 n^2}{4} \theta_{r+pn,p}(q, z) \right). \quad (\text{Б.8})$$

Мы прибегаем к стандартному злоупотреблению обозначениями, используя запись $f(\tau, \nu)$ для $f(e^{2i\pi\tau}, e^{2i\pi\nu})$; молчаливо предполагая, что $q = e^{2i\pi\tau}$ (где τ лежит в верхней комплексной полуплоскости) и $z = e^{2i\pi\nu}$.

Модулярное T -преобразование тета-функции выражается как

$$\theta_{r,p}(\tau + 1, \nu) = e^{i\pi r^2/(2p)} \theta_{r,p}(\tau, \nu), \quad (\text{Б.9})$$

а S -преобразование – как

$$\theta_{r,p}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = e^{i\pi p\nu^2/(2\tau)} \sqrt{\frac{-i\tau}{2p}} \sum_{s=0}^{2p-1} e^{-i\pi rs/p} \theta_{s,p}(\tau, \nu). \quad (\text{Б.10})$$

Поэтому

$$\theta'_{r,p}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = e^{i\pi p\nu^2/(2\tau)} \sqrt{\frac{-i\tau}{2p}} \sum_{s=0}^{2p-1} e^{-i\pi rs/p} \left(\tau \theta'_{s,p}(\tau, \nu) + \frac{p\nu}{2} \theta_{s,p}(\tau, \nu) \right) \quad (\text{Б.11})$$

(цена за злоупотребление обозначениями состоит в том, что $\theta'_{r,p}(\tau, \nu) = (1/2i\pi) \times (\partial/\partial\nu) \theta_{r,p}(\tau, \nu)$) и

$$\begin{aligned} \theta''_{r,p}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) &= e^{i\pi p\nu^2/(2\tau)} \sqrt{\frac{-i\tau}{2p}} \times \\ &\times \sum_{s=0}^{2p-1} e^{-i\pi rs/p} \left(\tau^2 \theta''_{s,p}(\tau, \nu) + p\nu\tau \theta'_{s,p}(\tau, \nu) + \left(\frac{p^2\nu^2}{4} + \frac{p\tau}{4i\pi} \right) \theta_{s,p}(\tau, \nu) \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Отметим также формулу

$$\Omega\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}\right) = -i\sqrt{-i\tau} e^{i\pi\nu^2/(2\tau)} \Omega(\tau, \nu)$$

для функции $\Omega(q, z) = q^{1/8} z^{1/2} \vartheta_{1,1}(q, z)$.

Эта-функция

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \quad (\text{Б.13})$$

преобразуется как

$$\eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau). \quad (\text{Б.14})$$

При вычислении вычетов в п. 5.3 требуется также формула

$$\left. \frac{\partial \vartheta_{1,1}(q, z)}{\partial z} \right|_{z=q^n} = (-1)^n q^{-1/8} \eta(q)^3 q^{-n^2/2-3n/2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Некоторые простые трюки с $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлениями

В.1. Действие $SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$. Сначала напомним стандартное $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ (где $\mathfrak{h}$ – верхняя полуплоскость):

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad (\tau, \nu) \mapsto \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\nu}{c\tau + d} \right).$$

Пространство $\mathcal{F}$ подходящих (например, мероморфных или просто дробно-линейных по τ) функций на $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ тогда наделяется $SL(2, \mathbb{Z})$ -действием.

В.2. Случай $\mathbb{C}^2$.

В.2.1. Определяющее двумерное представление – дублет – группы $SL(2, \mathbb{Z})$ – это представление, в котором

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

действуют на $\mathbb{C}^2$ в точности этими матрицами. Выберем такой базис $\underline{1}, \underline{\tau}$ в $\mathbb{C}^2$, что $S\underline{\tau} = -\underline{1}$, $S\underline{1} = \underline{\tau}$, $T\underline{\tau} = \underline{\tau} + \underline{1}$, и $T\underline{1} = \underline{1}$.

Если π – любое конечномерное $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление, в котором $S_\pi = \mathbf{s}$ и $T_\pi = \mathbf{t}$ действуют на векторы, обозначаемые как ω , то $\mathbb{C}^2 \otimes \pi$ линейно порождено элементами $\underline{1}\omega$ и $\underline{\tau}\omega$, причем действие имеет вид

$$S(\underline{\tau}\omega) = -\mathbf{s}\omega, \quad S(\underline{1}\omega) = \underline{\tau}\mathbf{s}\omega, \quad T(\underline{\tau}\omega) = \underline{\tau}\mathbf{t}\omega + \underline{1}\mathbf{t}\omega, \quad T(\underline{1}\omega) = \underline{1}\mathbf{t}\omega.$$

Это представление $\mathbb{C}^2 \otimes \pi$ можно реализовать, используя $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на $\mathcal{F}$ следующим образом: отождествим $\underline{1} = 1$ и $\underline{\tau} = \tau$, будем считать ω функцией τ , что позволяет рассматривать $f(\tau)\omega$, где $f \in \mathcal{F}$, и переопределим действие S и T как¹⁵⁾

$$S(f(\tau)\omega) = \tau f\left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathbf{s}\omega, \quad T(f(\tau)\omega) = f(\tau + 1)\mathbf{t}\omega \quad (\text{Б.1})$$

(другими словами, букве f предписано преобразовываться с весом 1). Действительно, из этих формул немедленно следует, например, что $S(\tau\omega) = -(1/\tau)\tau\mathbf{s}\omega = -\mathbf{s}\omega$.

¹⁵⁾Под $f(-1/\tau)$ мы везде понимаем $f(\tau)|_{\tau \rightarrow -1/\tau}$ и аналогично для $f(\tau + 1)$. Например, операция $\tau \rightarrow -1/\tau$ переводит $f(\tau/(\tau + 1))$ в $f(-1/(\tau - 1))$.

Если мы хотим иметь дело с более привычным множителем $c\tau + d$ (а не $-c\tau + a$ для обратной матрицы), нам придется рассмотреть *правое* действие, которое определяется формулами (B.1) как

$$\gamma: f(\tau)\omega \mapsto (c\tau + d)f(\gamma\tau)\omega \cdot \gamma, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Ясно, что если для $f(\tau)$ не ограничиться многочленами первой степени, то это приведет к бесконечномерному $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлению на пространстве подходящих функций, умноженному на π , в котором $\mathbb{C}^2 \otimes \pi$ содержится как подпредставление.

В.2.2. Если π' – другое $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление той же размерности, что и π , в котором $S_{\pi'} = s'$ и $T_{\pi'} = t'$ действуют на векторы, обозначаемые как χ , то прямая сумма $\pi' \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \pi$ допускает семейство деформаций, реализуемых введением (матричного) фактора автоморфности следующим образом. Начнем с реализации прямой суммы $\pi' \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \pi$ в виде

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\omega \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

где ω лежит в пространстве представления π , χ – в π' , а $f(\tau)$ – многочлен первой или нулевой степени в соответствии с приведенной выше реализацией дублета. Все пространство представления линейно порождается элементами $\begin{pmatrix} f(\tau)\omega + \beta\nu g(\tau)\chi \\ \chi \end{pmatrix}$.

Члены, содержащие ν в верхней строке, всегда линейны по ν и пропорциональны некоторому выбранному параметру β вследствие своего происхождения, как это будет сейчас объяснено.

$SL(2, \mathbb{Z})$ -действие однозначно определяется формулами, задающими действие T и S :

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} f(\tau)\omega + \beta\nu g(\tau)\chi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(\tau+1)t\omega + \beta\nu g(\tau+1)t'\chi \\ t'\chi \end{pmatrix}, \\ S \begin{pmatrix} f(\tau)\omega + \beta\nu g(\tau)\chi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tau f(-\frac{1}{\tau})s\omega + \beta\frac{\nu}{\tau}g(-\frac{1}{\tau})s'\chi + \beta\nu f(-\frac{1}{\tau})s'\chi \\ s'\chi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Третий член в верхней строке формулы для S -преобразования и есть источник членов, пропорциональных $\beta\nu$. Предписание для S -преобразования состоит в том, что оно должно действовать с дополнительным множителем τ и без него на члены в верхней строке, не содержащие ν и содержащие его. А именно, букве f в $f(\tau)\omega$, как и раньше, приписывается вес 1, а всякое g в $\nu g(\tau)\chi$ рассматривается как имеющее вес 0.

Легко видеть, что $SL(2, \mathbb{Z})$ -орбиту (снова в варианте с правым действием) элементов (B.2) можно тогда записать в виде (4.16).

В.3. Случай $\mathbb{C}^3$.

В.3.1. Взятие симметризованного квадрата представления $\mathbb{C}^2$ дает представление $\mathbb{C}^3$; следуя п. В.2.1, базис в нем можно представить как $\underline{1} \otimes \underline{1}$, $\underline{\tau} \otimes \underline{1} + \underline{1} \otimes \underline{\tau}$ и $\underline{\tau} \otimes \underline{\tau}$. Несколько более компактные обозначения для того же базиса имеют вид $\underline{1}$, $\underline{2\tau}$ и $\underline{\tau^2}$, при этом мы немедленно находим $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие в виде

$$\begin{aligned} S\underline{1} &= \underline{\tau^2}, & S\underline{2\tau} &= -\underline{2\tau}, & S\underline{\tau^2} &= \underline{1}, \\ T\underline{1} &= \underline{1}, & T\underline{2\tau} &= \underline{2\tau} + 2 \cdot \underline{1}, & T\underline{\tau^2} &= \underline{\tau^2} + \underline{2\tau} + \underline{1}. \end{aligned}$$

Такой вид подсказывает “функциональную реализацию” представления $\mathbb{C}^3 \otimes \pi$ (для конечномерного $SL(2, \mathbb{Z})$ -представления π , определенного действием $\varphi \mapsto s\varphi$ и $\varphi \mapsto t\varphi$) как представления, линейно порожденного элементами φ , $2\tau\varphi$ и $\tau^2\varphi$ с $SL(2, \mathbb{Z})$ -действием, определяемым формулами

$$S(f(\tau)\varphi) = \tau^2 f\left(-\frac{1}{\tau}\right)s\varphi, \quad T(f(\tau)\varphi) = f(\tau+1)t\varphi.$$

Другими словами, f приписывается вес 2, а $SL(2, \mathbb{Z})$ действует (в варианте с правым действием) как

$$\gamma: f(\tau)\varphi \mapsto (c\tau + d)^2 f(\gamma\tau)\varphi \cdot \gamma.$$

Если для $f(\tau)$ не ограничиться многочленами второй степени, то это приведет к бесконечномерному $SL(2, \mathbb{Z})$ -представлению, в котором $\mathbb{C}^3 \otimes \pi$ содержится как подпредставление.

В.3.2. Для $\mathbb{C}^3 \otimes \pi$, реализованного как в п. В.3.1, и трех представлений π'' , π' и π одинаковой размерности мы построим деформацию представления $\pi'' \oplus \pi' \oplus \mathbb{C}^3 \otimes \pi$. Произвольный элемент пространства $\pi'' \oplus \pi' \oplus \mathbb{C}^3 \otimes \pi$ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{В.3})$$

где $f(\tau)$ – многочлен степени не больше двух. “Новое” $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на такие элементы порождает элементы вида

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi + \nu g(\tau)\omega + \nu^2 h(\tau)\chi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix},$$

где зависящие от ν члены в действительности пропорциональны параметрам α и β , как это будет видно из приведенной ниже формулы для S -действия.

Генератор T действует как (мы опускаем штрихи, различающие действия на π , π' и π'')

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi + \nu g(\tau)\omega + \nu^2 h(\tau)\chi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} f(\tau+1)t\varphi + \nu g(\tau+1)t\omega + \nu^2 h(\tau+1)t\chi \\ t\omega \\ t\chi \end{pmatrix},$$

а генератор S – как

$$\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi + \nu g(\tau)\omega + \nu^2 h(\tau)\chi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} \tau^2 f(-\frac{1}{\tau})\mathbf{s}\varphi + \nu g(-\frac{1}{\tau})\mathbf{s}\omega + \frac{\nu^2}{\tau^2} h(-\frac{1}{\tau})\mathbf{s}\chi + \alpha\nu\tau f(-\frac{1}{\tau})\mathbf{s}\omega + \nu^2(\frac{\alpha\beta}{2}f(-\frac{1}{\tau}) + \frac{\beta}{\tau}g(-\frac{1}{\tau}))\mathbf{s}\chi \\ \mathbf{s}\omega \\ \mathbf{s}\chi \end{pmatrix}.$$

Правило S -преобразования в верхней строке можно описать следующим образом. Не зависящий от ν член преобразуется как триплет (с множителем τ^2 , как в п. В.3.1); член, линейный по ν , преобразуется как “ ν , умноженное на дублет”, т.е. $S: \nu \cdot g(\tau)\omega \mapsto (\nu/\tau) \cdot \tau g(-1/\tau)\mathbf{s}\omega$ (с дополнительным множителем τ , как в п. В.2.1); член, квадратичный по ν , не содержит дополнительных зависящих от τ множителей: он преобразуется в соответствии с действием на функциях на $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$; и, кроме того, пара $\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi \\ \omega \end{pmatrix}$ порождает дополнительный член $\alpha\nu\tau f(-1/\tau)\mathbf{s}\omega$, пара $\begin{pmatrix} \nu g(\tau)\omega \\ \chi \end{pmatrix}$ – дополнительный член $\nu^2(\beta/\tau)g(-1/\tau)\mathbf{s}\chi$, а пара $\begin{pmatrix} f(\tau)\varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ – член $(\alpha\beta/2)\nu^2 f(-1/\tau)\mathbf{s}\chi$.

Нетрудно видеть, что (в варианте с правым действием) $SL(2, \mathbb{Z})$ -орбиту элементов (В.3) можно записать в виде (4.18).

Благодарности. Я благодарен своим “логарифмическим коллабораторам” на протяжении нескольких последних лет – Б. Л. Фейгину, Ю. Фуксу, А. М. Гайнутдинову, С. Вангу и И. Ю. Типунину – без которых эта работа не была бы написана, и которые всегда были вместе со мной морально, даже если не географически, пока она писалась. Я также признателен Ю. Фуксу и А. А. Досовицкому за полезные замечания. С. Е. Пархоменко показал мне, что применение спектрального потока к бабочке заставляет ее “лететь”. Данная работа была (почти) закончена и испытала несомненное влияние стимулирующей атмосферы конференции “Themes in the Interface of Representation Theory and Physics”, и я благодарен К. Халлу и П. Мартину за теплый прием в Лондоне. Также хотелось бы выразить благодарность А. П. Исаеву и П. Н. Пятову за гостеприимство на конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” в Дубне, где работа была окончательно завершена. Данная работа была частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00523), а также Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4401.2006.2).

Список литературы

- [1] V. Gurarie, *Nucl. Phys. B*, **410** (1993), 535; [hep-th/9303160](#).
- [2] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386** (1996), 131; [hep-th/9606050](#).
- [3] M. R. Gaberdiel, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18** (2003), 4593; [hep-th/0111260](#).
- [4] A. Nichols, *JHEP*, **04** (2002), 056; [hep-th/0112094](#); *J. Stat. Mech.*, **09** (2004), 006; [hep-th/0307050](#).
- [5] F. Lesage, P. Mathieu, J. Rasmussen, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **686** (2004), 313; [hep-th/0311039](#).

- [6] J. Rasmussen, *Nucl. Phys. B*, **736** (2006), 225; [hep-th/0508179](#).
- [7] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259** (1991), 448.
- [8] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **538** (1999), 631; [hep-th/9807091](#).
- [9] A. Nichols, *JHEP*, **01** (2003), 022; [hep-th/0205170](#).
- [10] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **247** (2004), 713; [hep-th/0306274](#).
- [11] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **265** (2006), 47; [hep-th/0504093](#).
- [12] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **757** (2006), 303; [hep-th/0606196](#).
- [13] M. R. Gaberdiel, I. Runkel, *J. Phys. A*, **39** (2006), 14745; [hep-th/0608184](#).
- [14] T. Creutzig, T. Quella, V. Schomerus, *New boundary conditions for the $c = -2$ ghost system*, [hep-th/0612040](#).
- [15] M. Miyamoto, *Duke Math. J.*, **122** (2004), 51; [math.QA/0209101](#).
- [16] N. Carqueville, M. Flohr, *J. Phys. A*, **39** (2006), 951; [math-ph/0508015](#).
- [17] J. Fuchs, *On non-semisimple fusion rules and tensor categories*, [hep-th/0602051](#).
- [18] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, L. Zhang, *Logarithmic tensor product theory for generalized modules for a conformal vertex algebra, Part I*, [math.QA/0609833](#).
- [19] P. A. Pearce, J. Rasmussen, J.-B. Zuber, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), 017; [hep-th/0607232](#).
- [20] M. Jeng, G. Piroux, P. Ruelle, *J. Stat. Mech.*, **10** (2006), 015; [cond-mat/0609284](#).
- [21] N. Read, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **777** (2007), 316; [hep-th/0701117](#).
- [22] A. Nichols, *JHEP*, **08** (2003), 040; [hep-th/0302075](#).
- [23] J. Fjelstad, J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **633** (2002), 379; [hep-th/0201091](#).
- [24] J. Rasmussen, *J. Stat. Mech.*, **09** (2004), 007; [math-ph/0408011](#).
- [25] V. Gurarie, A. W. W. Ludwig, “Conformal field theory at central charge $c = 0$ and two-dimensional critical systems with quenched disorder”, *From Fields to Strings. Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan Memorial Collection, vol. 2, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Weater, World Scientific, Singapore, 2005, 1384; [hep-th/0409105](#).
- [26] M. Flohr, M. R. Gaberdiel, *J. Phys. A*, **39** (2006), 1955; [hep-th/0509075](#).
- [27] V. Schomerus, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **734** (2006), 221; [hep-th/0510032](#).
- [28] H. Eberle, M. Flohr, *J. Phys. A*, **39** (2006), 15245; [hep-th/0604097](#).
- [29] M. Flohr, C. Grabow, M. Koehn, *Nucl. Phys. B*, **768** (2007), 263; [hep-th/0611241](#).
- [30] D. Kazhdan, G. Lusztig, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 905; **7** (1994), 335; 383.
- [31] A. М. Гайнутдинов, А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 398; [math.QA/0512621](#).
- [32] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 032303; [math.QA/0606506](#).
- [33] G. Moore, N. Seiberg, “Lecture on RCFT”, *Physics, Geometry, and Topology* (Banff, Canada, 1989), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B. Phys., **238**, Plenum, New York, 1990, 263.
- [34] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Math. Surveys Monogr., **88**, AMS, Providence, 2001.
- [35] B. Bakalov, A. A. Kirillov, *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, Univ. Lecture Ser., **21**, AMS, Providence, 2001.
- [36] J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Nucl. Phys. B*, **646** (2002), 353; [hep-th/0204148](#); **678** (2004), 511; [hep-th/0306164](#).
- [37] G. Felder, *Nucl. Phys. B*, **317** (1989), 215.
- [38] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *Lett. Math. Phys.*, **23** (1991), 193; [hep-th/9108023](#).
- [39] V. G. Кас, М. Wakimoto, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **85** (1988), 4956.
- [40] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, V. A. Sirota, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **536** (1998), 617; [hep-th/9805179](#).
- [41] A. M. Semikhatov, A. Taormina, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **255** (2005), 469; [math.QA/0311314](#).

- [42] F. Lesage, P. Mathieu, J. Rasmussen, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **647** (2002), 363; [hep-th/0207201](#).
- [43] А. М. Семихатов, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 244; [hep-th/9810059](#).
- [44] S. E. Parkhomenko, *Nucl. Phys. B*, **671** (2003), 325; [hep-th/0301070](#); **731** (2005), 360; [hep-th/0412296](#).
- [45] Ф. Г. Маликов, Б. Л. Фейгин, Д. В. Фукс, *Функци. анализ и его прилож.*, **20**:2 (1986), 25.
- [46] P. Bowcock, B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, A. Taormina, *Commun. Math. Phys.*, **214** (2000), 495; [hep-th/9907171](#).
- [47] B. Feigin, T. Miwa, “Extended vertex operator algebras and monomial bases”, *Statistical Physics on the Eve of the 21st Century*, Ser. Adv. Statist. Mech., **14**, World Scientific, River Edge, 1999, 366; [math.QA/9901067](#).
- [48] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, “Vertex operator algebra arising from the minimal series $M(3, p)$ and monomial basis”, *MathPhys Odyssey 2001*, Prog. Math. Phys., **23**, Birkhäuser, Boston, 2002, 179; [math.QA/0012193](#).
- [49] P. Jacob, P. Mathieu, *Nucl. Phys. B*, **733** (2006), 205; [hep-th/0506074](#).
- [50] P. Mathieu, D. Ridout, *Nucl. Phys. B*, **765** (2007), 201; [hep-th/0609226](#).
- [51] P. Furlan, A. Ch. Ganchev, R. Paunov, V. B. Petkova, *Nucl. Phys. B*, **394** (1993), 665; [hep-th/9201080](#); A. Ch. Ganchev, V. B. Petkova, *Phys. Lett. B*, **293** (1992), 56; [hep-th/9207032](#); **318** (1993), 77; [hep-th/9308037](#).
- [52] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, *Nucl. Phys. B*, **698** (2004), 409; [math.QA/0401164](#).
- [53] A. M. Semikhatov, *Higher string functions, higher-level Appell functions, and the logarithmic $\widehat{sl}(2)_k/u(1)$ CFT model*, [arXiv: 0710/2028v2](#).
- [54] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [55] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, *Adv. Math.*, **34** (1979), 97.
- [56] M. Wakimoto, *Commun. Math. Phys.*, **104** (1986), 605.
- [57] Б. Л. Фейгин, Е. В. Френкель, *УМН*, **43**:5 (1988), 227.
- [58] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, vol. 1, Progr. Math., **28**, Birkhäuser, Boston, 1983; vol. 2, Progr. Math., **43**, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [59] J. Cardy, *J. Phys. A*, **25** (1992), L201; [hep-th/9111026](#).
- [60] A. M. Semikhatov, *Inverting the Hamiltonian reduction in string theory*, Talk at the 28th Symposium on the Theory of Elementary Particles (Wendisch-Rietz, 1994); [hep-th/9410109](#).
- [61] S. Mukhi, S. Panda, *Nucl. Phys. B*, **338** (1990), 263.
- [62] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, *Nucl. Phys. B*, **610** (2001), 489; [hep-th/0102078](#).
- [63] T. Kerler, *Commun. Math. Phys.*, **168** (1995), 353; [hep-th/9402017](#).
- [64] B. Abdesselam, D. Arnaudon, M. Bauer, *J. Phys. A*, **30** (1997), 867; [q-alg/9605015](#).
- [65] K. Erdmann, E. L. Green, N. Snashall, R. Taillefer, *J. Pure Appl. Algebra*, **204** (2006), 413; [math.RT/0410017](#).
- [66] A. M. Polyakov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5** (1990), 833.
- [67] M. Bershadsky, *Commun. Math. Phys.*, **139** (1991), 71.

Поступила в редакцию 18.01.2007,
после доработки 15.04.2007