Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, Некоммутативная грассманова $U(1)$ сигма-модель и пространство Баргмана–Фока, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 3, 347–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:29:28

© 2007 г.

А. В. Комлов*

НЕКОММУТАТИВНАЯ ГРАССМАНОВА $U(1)$ СИГМА-МОДЕЛЬ И ПРОСТРАНСТВО БАРГМАНА–ФОКА

Рассматривается грассманова версия некоммутативной $U(1)$ сигма-модели, которая задается функционалом энергии $E(P) = \|[a, P]\|_{\text{HS}}^2$, где P – ортогональный проектор в гильбертовом пространстве H , а оператор $a: H \rightarrow H$ – стандартный оператор уничтожения. С помощью реализации пространства H как пространства Баргмана–Фока описаны все решения с одномерным образом и доказано, что оператор $[a, P]$ плотно определен в H для некоторого класса проекторов P , которые имеют бесконечномерные образ и ядро.

Ключевые слова: некоммутативная $U(1)$ сигма-модель, пространство Баргмана–Фока.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем грассманову версию некоммутативной $U(1)$ сигма-модели, которая является некоммутативным аналогом классической вещественно-двумерной грассмановой сигма-модели. Сначала кратко опишем последнюю. Обозначим через $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ комплексный грассманиан, т.е. многообразие k -мерных комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что его точки – это ортогональные проекторы в пространстве $\mathbb{C}^n$ с k -мерным образом (и $(n - k)$ -мерным ядром). Рассмотрим произвольное отображение $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, т.е. при каждом z $f(z)$ – матрица k -мерного ортогонального проектора на $\mathbb{C}^n$. Энергия отображения $f(z)$ задается функционалом

$$E(f) := \int_{\mathbb{C}P^1} \|\partial_{\bar{z}} f\|_{\text{HS}}^2 dx dy = \int_{\mathbb{C}P^1} \text{tr}(\partial_{\bar{z}} f)^* \partial_{\bar{z}} f dx dy.$$

Экстремали данного функционала (решения этой модели) называются гармоническими отображениями (подробнее о модели см. [1]).

При изучении статических $D0$ -бран в $D2$ -бранах (см. [2]) возникает некоммутативный аналог приведенной выше модели, который рассматривается также в работах [3] и [4]. Чтобы его описать, мы переходим на некоммутативную плоскость

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: komlov@hotmail.ru

$\mathbb{R}_\theta^2$ с координатами x, y такими, что $[x, y] = i\theta$, где $\theta > 0$. Удобнее ввести комплексные координаты $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, а затем перейти к $z/\sqrt{2\theta}$ и $\bar{z}/\sqrt{2\theta}$. Тогда $[z/\sqrt{2\theta}, \bar{z}/\sqrt{2\theta}] = 1$. Другая реализация получившейся алгебры Гейзенберга основана на переходе от функций к операторам в гильбертовом пространстве H и введении стандартных операторов рождения a и уничтожения a^* (вместо $z/\sqrt{2\theta}$ и $\bar{z}/\sqrt{2\theta}$, соответственно). Точные определения операторов a и a^* даны в разделе 2. Переход основан на правилах исчисления Вейля псевдодифференциальных операторов (см. [5]) и приводит к следующему. Вместо отображений $f(\cdot): \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ рассматриваются ортогональные проекторы P на гильбертовом пространстве H (зависимость от переменной пропадает, $n = \infty$, а все k рассматриваются одновременно). Кроме того, $\partial_{\bar{z}}(\cdot)$ заменяется на $[a, \cdot]/\sqrt{2\theta}$, $\partial_z(\cdot)$ – на $-[a^*, \cdot]/\sqrt{2\theta}$ и $\int \text{tr}$ – на $2\theta \text{tr}$. Поэтому функционалу $E(f)$ соответствует функционал $E(P) = \|[a, P]\|_{\text{HS}}^2$. Экстремали этого функционала (которые являются аналогами гармонических отображений) и будут основным предметом нашего изучения.

Цель данной работы – показать, как некоторые математические трудности, связанные с описанием конфигурационного пространства и решений некоммутативной сигма-модели, преодолеваются с помощью перехода в пространство Баргмана–Фока. В разделе 4 мы описываем все решения с одномерным образом (а значит, и с одномерным ядром, так как $E(P) = E(I - P)$). При рассмотрении проектора P с бесконечномерными образом и ядром вопросы о плотности области определения $[a, P]$ (в разделе 2 это свойство называется допустимостью) и о конечности энергии P становятся неочевидными и неэквивалентными. В разделе 5 мы доказываем допустимость некоторого класса проекторов такого типа, а в разделе 6 мы вычисляем энергию нетривиального проектора из этого класса (она оказывается бесконечной).

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Обозначим через a стандартный оператор уничтожения в H : $\text{dom } a = \{x \in H : \sum_{j=0}^{\infty} j|x_j|^2 < \infty\}$, где $x_j := (x, e_j)$ и $a(e_j) = \sqrt{j}e_{j-1}$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$. Базис $\{e_0, e_1, \dots\}$ будем называть *каноническим* для оператора a . Заметим, что $\text{dom } a = \text{dom } a^* =: D$ и $a^*(e_j) = \sqrt{j+1}e_{j+1}$. Кроме того, для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ существует единственный (с точностью до умножения на θ с $|\theta| = 1$) нормированный вектор c_α , соответствующий собственному значению α , а именно $(c_\alpha, e_j) = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^j / \sqrt{j!}$. Эти векторы c_α называются *когерентными состояниями*. Отметим также, что $[a, a^*] = I$ и оператор a неприводим.

Назовем ортогональный проектор $P: H \rightarrow H$ (т.е. $P = P^2 = P^*$) *допустимым*, если подпространство $D_P := \{x \in D : Px \in D\}$ плотно в H . Это означает, что оператор $A := [a, P]$ плотно определен.

Имеется простой *критерий допустимости*: ортогональный проектор $P: H \rightarrow H$ допустим тогда и только тогда, когда пространства $D \cap \text{im } P$ и $D \cap \text{ker } P$ плотны в $\text{im } P$ и в $\text{ker } P$, соответственно.

Из этого критерия видно, что допустимость проектора P эквивалентна допустимости $I - P$. Также отсюда видно, что ортогональный проектор P с $\dim(\operatorname{im} P) < \infty$ (или с $\dim(\ker P) < \infty$) допустим тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} P \subset D$ (соответственно $\ker P \subset D$).

Итак, пусть проектор P допустим. Тогда будем говорить, что P – *проектор конечной энергии*, если оператор $A = [a, P]$ продолжается с D_P на все H по непрерывности до оператора Гильберта–Шмидта. В этом случае *энергия* P определяется формулой

$$E(P) := \|A\|_{\text{HS}}^2 = \|[a, P]\|_{\text{HS}}^2,$$

где $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ – норма Гильберта–Шмидта. В противном случае допустимый проектор P называется *проектором бесконечной энергии* и $E(P) := \infty$. Отметим, что $E(P) = E(I - P)$.

Заметим, что если P – проектор конечной энергии, то $A = PA + AP$, где PA и AP – операторы Гильберта–Шмидта, а также $(PA, AP)_{\text{HS}} = 0$. Поэтому в этом случае

$$E(P) = \|A\|_{\text{HS}}^2 = \|PA\|_{\text{HS}}^2 + \|AP\|_{\text{HS}}^2.$$

Следуя [3], определим для любого проектора конечной энергии P *топологический заряд* по формуле

$$Q(P) := \|PA\|_{\text{HS}}^2 - \|AP\|_{\text{HS}}^2.$$

В работе [3] доказано, что если P – допустимый проектор и $\dim(\operatorname{im} P) < \infty$ (или $\dim(\ker P) < \infty$), то $Q(P) = \dim(\operatorname{im} P)$ (соответственно $Q(P) = -\dim(\ker P)$). Следовательно, для любого допустимого проектора P с конечномерным образом

$$E(P) = Q(P) + 2\|AP\|_{\text{HS}}^2 = \dim(\operatorname{im} P) + 2\|[a, P]P\|_{\text{HS}}^2. \quad (1)$$

Будем говорить, что проектор конечной энергии P_0 – *решение*, если для любой гладкой кривой $P(t)$ проекторов конечной энергии с условием $P(0) = P_0$ ($-\varepsilon < t < \varepsilon$), имеем $\frac{d}{dt}|_{t=0} E(P(t)) = 0$ (гладкость понимается в смысле операторной нормы).

Будем называть *BPS-решением*¹⁾ допустимый проектор P , для которого в $\operatorname{im} P$ существует система векторов $\{g_1, g_2, \dots\}$ с условием $\overline{\operatorname{span}}\{g_1, g_2, \dots\} = \operatorname{im} P$ такая, что $ag_i \in \operatorname{im} P$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Ясно, что если $\dim(\operatorname{im} P) < \infty$, то условие того, что P – BPS-решение эквивалентно условию $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$ (т.е. $[a, P]P = 0$).

Из (1) видно, что BPS-решение P с $\dim(\operatorname{im} P) = n < \infty$ является минимумом функционала энергии на классе проекторов конечной энергии с n -мерным образом. Но так как проекторы с разными размерностями образов далеки друг от друга, то

¹⁾Термин “BPS-решение” (решение Богомольного–Прасада–Зоммерфельда) в коммутативном случае используется для решений, для которых неравенство $E(f) \geq Q(f)$ превращается в равенство. По аналогии (на основании (1)) в статье [3] этот термин был введен и в некоммутативном случае для проекторов P таких, что $[a, P]P = 0$. Поскольку a не имеет бесконечномерных инвариантных подпространств, наше определение является обобщением этого понятия.

BPS-решения с конечномерными образами являются локальными минимумами на пространстве всех допустимых проекторов, в частности они являются решениями.

Аналогично можно ввести понятие *анти-BPS-решения*, заменив в определении BPS-решения $\text{im } P$ на $\ker P$. Ясно, что оператор, дополнительный до BPS-решения, есть анти-BPS-решение, и наоборот. А так как $E(P) = E(I - P)$ для любого допустимого проектора P , то анти-BPS-решения с конечномерным ядром также являются локальными минимумами функционала энергии.

ПРИМЕР. Проектор P с $\text{im } P = \text{span}\langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle$ – это BPS-решение, и $E(P) = n + 1$ (напомним, что $\{e_j\}$ – канонический базис).

3. ПРОСТРАНСТВО БАРГМАНА–ФОКА

Пространство Баргмана–Фока – это функциональное пространство

$$\mathcal{F}_z := \left\{ f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dx dy < \infty \right\},$$

где $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ – пространство целых функций. Пространство $\mathcal{F}_z$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} dx dy.$$

Кроме того, функции $\{z^n/\sqrt{n!}\}_{n=0}^{\infty}$ образуют в нем ортонормированный базис.

Отображая канонический для a базис пространства H в базис $\{z^n/\sqrt{n!}\}_{n=0}^{\infty}$, мы получаем изоморфизм между H и $\mathcal{F}_z$. Этот изоморфизм переводит оператор a в оператор $\frac{d}{dz}(\cdot)$, a^* – в оператор умножения на z , когерентное состояние s_α – в функцию $e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha z}$.

Пространство $\mathcal{F}_z$ обладает следующим свойством: для любого $f \in \mathcal{F}_z$, для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ и для любого $n = 0, 1, \dots$

$$(f, z^n e^{\alpha z}) = f^{(n)}(\bar{\alpha}). \quad (2)$$

Для доказательства достаточно разложить обе функции с помощью ряда Тейлора по указанному выше базису (подробно о пространстве $\mathcal{F}_z$ см. [6]).

4. ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ С ОДНОМЕРНЫМ ОБРАЗОМ

Сначала опишем в несколько других терминах понятие решения. Пусть $P(t)$ – произвольная гладкая кривая проекторов конечной энергии такая, что $P(0) = P$. Тогда $P(t) = P + t\varphi + O(t^2)$, где $\varphi \in T_P \text{Pr}(H)$ ($T_P \text{Pr}(H)$ – касательное пространство к пространству ортогональных проекторов в точке P). Пространство $T_P \text{Pr}(H)$ состоит из ограниченных операторов φ таких, что $P + \varphi = (P + \varphi)^2 = (P + \varphi)^*$ с точностью до членов первого порядка по φ , т.е.

$$T_P \text{Pr}(H) = \{\text{ограниченные } \varphi : P\varphi + \varphi P = \varphi = \varphi^*\}.$$

Тогда с точностью до членов первого порядка по t

$$E(P(t)) = E(P + t\varphi) + O(t^2) = E(P) + 2t \operatorname{Re}([a, P], [a, \varphi])_{\text{HS}} + O(t^2).$$

Таким образом, проектор конечной энергии P является решением тогда и только тогда, когда *первая вариация энергии*

$$E_P^1(\varphi) := 2 \operatorname{Re}([a, P], [a, \varphi])_{\text{HS}} \quad (3)$$

равняется нулю для любого $\varphi \in T_P \operatorname{Pr}(H)$.

Пусть теперь P – допустимый проектор на нормированный вектор $p \in H$. Значит, как уже было отмечено в разделе 2, $p \in D = \operatorname{dom} a$. Применив формулу (1), получим $E(P) = 1 + 2\| [a, P]P \|_{\text{HS}}^2$. Выбирая ортонормированный базис в H , содержащий p , мы легко получаем

$$\| [a, P]P \|_{\text{HS}}^2 = \|ap\|^2 - |(ap, p)|^2.$$

Рассмотрим кривую P_t , которая состоит из проекторов на векторы $p_t = (p + th)/\sqrt{1+t^2}$, где $h \in D$ – нормированный и ортогональный p вектор, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$. Тогда P_t допустим и $P_0 = P$. Теперь вычислим $E(P_t)$ с точностью до членов второго порядка:

$$\begin{aligned} E(P_t) = E(P) + 4 \operatorname{Re}[(ap, ah) - (p, ap)((ap, h) + (ah, p))]t + \\ + 2[\|ah\|^2 + 2|(ap, p)|^2 - \|ap\|^2 - |(ap, h)|^2 - |(ah, p)|^2 - \\ - 2 \operatorname{Re}((ap, p)(h, ah) + (ap, h)(p, ah))]t^2 + O(t^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Определим функцию $L_P(h)$ формулой

$$L_P(h) = (ah, ap) - (ap, p)(h, ap) - (p, ap)(ah, p).$$

Тогда член при t – это $4 \operatorname{Re} L_P(h)$. Член при t^2 обозначим через $R_P(h)$.

Предположим, что P – решение. Тогда $\operatorname{Re} L_P(h)$ должно равняться нулю для любого нормированного вектора $h \in D \cap (\operatorname{span} p)^\perp$. Но так как h можно заменить на ih , а функция $L_P(h)$ линейна, мы получаем, что $L_P(h) = 0$ для всех таких h . В силу того, что $p \in D$ и $h \in D$, условие $L_P(h) = 0$ равносильно тому, что

$$(ah, ap) = (ap, p)(h, ap) + (p, ap)(h, a^*p). \quad (5)$$

Заметим, что правая часть (5) – это непрерывный линейный функционал по h на всем пространстве H . Кроме того, так как P – решение, равенство (5) верно для всех $h \in D \cap (\operatorname{span} p)^\perp$. Поэтому (ah, ap) продолжается до непрерывного линейного функционала по h на $(\operatorname{span} p)^\perp$. Так как $p \in D$, то (ah, ap) – линейный функционал на $\operatorname{span} p$. Таким образом, (ah, ap) продолжается до непрерывного линейного функционала на всем пространстве H . Поэтому оператор a^* определен на векторе ap , и, следовательно, соотношение (5) эквивалентно условию

$$(h, a^*ap) = (ap, p)(h, ap) + (p, ap)(h, a^*p) \quad \forall h \perp p.$$

То есть вектор $a^*ap - (p, ap)ap - (ap, p)a^*p$ должен быть коллинеарен p . Итак, мы получили необходимое условие того, что P – решение:

$$a^*ap - (p, ap)ap - (ap, p)a^*p = \mu p \quad \text{для некоторого} \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Теперь используем изоморфизм между H и пространством Баргмана–Фока $\mathcal{F}_z$ (построенный в разделе 3). Пусть функция $f(z) \in \mathcal{F}_z$ соответствует вектору p . Тогда, обозначая (ap, p) через λ , получаем, что условие (6) эквивалентно условию

$$zf'(z) - \bar{\lambda}f'(z) - \lambda zf(z) = \mu f(z) \quad \text{для некоторого} \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f(z) = Ce^{\lambda z}(z - \bar{\lambda})^{\mu + |\lambda|^2}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Но $f(z) \in \mathcal{F}_z$ (в частности, $f(z)$ – целая функция), тогда $m := \mu + |\lambda|^2$ должно быть неотрицательным целым числом. Константа C выбирается так, что $\|f(z)\| = 1$.

Итак, мы получили, что все решения с одномерным образом содержатся среди проекторов на векторы

$$f(z) = Ce^{\lambda z}(z - \bar{\lambda})^m, \quad (7)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, \dots$ и $C = (e^{-|\lambda|^2}/m!)^{1/2}$. Далее мы покажем, что все эти проекторы являются решениями.

Рассмотрим для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор *некоммутативного сдвига*

$$U_\lambda: f(z) \mapsto e^{-|\lambda|^2/2}e^{\lambda z}f(z - \bar{\lambda}).$$

Оператор U_λ унитарный (чтобы это доказать, достаточно сделать замену переменных в интеграле для $\|f(z)\|^2$).

Докажем, что для любого допустимого проектора P

$$E(P) = E(U_\lambda P U_\lambda^{-1}). \quad (8)$$

Для этого заметим, что $[a, U_\lambda] = \lambda U_\lambda$ и $U_\lambda^{-1} = U_{-\lambda}$. Поэтому $[a, U_\lambda P U_\lambda^{-1}] = U_\lambda[a, P]U_{-\lambda}$. (Напомним, что в пространстве $\mathcal{F}_z$ оператор a – это d/dz .) Так как оператор U_λ еще и унитарен, получаем требуемое равенство.

Теперь, переписывая (7), заключаем, что все решения с одномерным образом содержатся среди проекторов на $U_\lambda(e_m)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, \dots$, а $\{e_j\}$ – канонический базис для a (напомним, что $e_j = z^j/\sqrt{j!}$). Поскольку U_λ – унитарный оператор и справедливо соотношение (8), достаточно изучить проекторы на векторы e_j .

Мы знаем, что проектор на e_0 – минимум энергии (так как он является BPS-решением). Чтобы показать, что проектор P на e_j , $j = 1, 2, \dots$, – решение, достаточно, как отмечалось ранее, установить, что первая вариация энергии $E_P^1(\varphi)$ (определенная формулой (3)) равна нулю для любого $\varphi \in T_P \text{Pr}(H)$. Это можно проверить прямым вычислением матричных элементов $[a, P]$ и $[a, \varphi]$ в базисе $\{e_j\}$. А чтобы

показать, что этот же проектор P не является ни минимумом, ни максимумом, достаточно указать два вектора h_1 и h_2 из $D \cap (\text{span } e_j)^\perp$, для которых $R_P(h_1) > 0$ и $R_P(h_2) < 0$, где $R_P(h)$ определено формулой (4). Мы возьмем $h_1 = e_{j+2}$ и $h_2 = e_0$. Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Проектор P с одномерным образом является решением тогда и только тогда, когда*

$$\text{im } P = \text{span} \langle U_\lambda e_j \rangle = \text{span} \langle (a^* - \bar{\lambda})^j c_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Среди решений минимумы – это проекторы на $\text{span} \langle U_\lambda e_0 \rangle = \text{span} \langle c_\lambda \rangle$ ($j = 0$), т.е. все одномерные BPS-решения (когерентные состояния). Максимумы отсутствуют.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как было отмечено в разделе 2, BPS-решения с конечномерным образом (и анти-BPS-решения с конечномерным ядром) являются минимумами энергии. Продолжим коммутативную аналогию, построенную в разделе 1, где вместо проекторов рассматриваются отображения $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$. Условия $[a, P]P = 0$ (эквивалентно $-P[a^*, P] = 0$) и $P[a, P] = 0$ перейдут в $f\partial_z f = 0$ и $f\partial_{\bar{z}} f = 0$, соответственно. Последние условия выражают антиголоморфность и голоморфность f . В работе [7] показано, что гармоническое отображение $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ устойчиво (или, эквивалентно, является точкой минимума функционала энергии) тогда и только тогда, когда f голоморфно или антиголоморфно. Исходя из этой аналогии мы можем предположить, что все минимумы функционала энергии с конечномерным образом или ядром – это соответственно BPS-решения или анти-BPS-решения. Как мы только что видели, эта гипотеза подтверждается в простейшем случае, когда рассматриваются проекторы с одномерным образом (или с одномерным ядром).

5. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ BPS-РЕШЕНИЯ

Построим класс проекторов K , состоящий из BPS-решений с бесконечномерным ядром (допустимость будет доказана). Значительная часть этих проекторов будет иметь также и бесконечномерный образ (из описания K будет видно, какие именно это проекторы).

В этом разделе мы будем работать в пространстве Баргмана–Фока $\mathcal{F}_z$ (см. раздел 3). Напомним, что в пространстве $\mathcal{F}_z$ оператор a – это оператор дифференцирования, оператор a^* – это оператор умножения на z , а когерентное состояние c_α имеет вид $e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda z}$.

Опишем класс проекторов K . Пусть $\phi(z)$ – экспоненциальный полином, т.е. $\phi(z) = \sum_\lambda p_\lambda(z) e^{\lambda z}$, где $p_\lambda(z)$ – обычные полиномы, а сумма $\sum_\lambda$ конечна. Определим проектор P_ϕ . Пусть $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ – множество нулей $\phi(z)$ (возможно, конечное). Обозначим через n_i кратность нуля α_i . Тогда

$$\begin{aligned} \text{im } P_\phi &:= \overline{\text{span}} \langle e^{\bar{\alpha}_i z}, z e^{\bar{\alpha}_i z}, \dots, z^{n_i-1} e^{\bar{\alpha}_i z} \rangle_{i=0}^\infty = \\ &= \overline{\text{span}} \langle c_{\bar{\alpha}}, a^* c_{\bar{\alpha}}, \dots, (a^*)^{n_i-1} c_{\bar{\alpha}} \rangle_{i=0}^\infty. \end{aligned}$$

Класс K состоит из проекторов P_ϕ для всевозможных экспоненциальных полиномов $\phi(z)$.

Если доказать допустимость P_ϕ (это будет сделано ниже), то станет ясно, что P_ϕ являются BPS-решениями. Бесконечномерность ядра будет очевидна из его явного описания (см. ниже формулу (9)). Понятно, что проектор P_ϕ имеет бесконечномерный образ, если $\phi(z)$ имеет бесконечное число нулей.

Приведем примеры проекторов P_ϕ :

1) $\phi(z)$ – обычный полином, тогда $\dim(\operatorname{im} P_\phi) < \infty$; например, если $\phi(z) = z^2(z + 1 - i)$, то

$$\operatorname{im} P_\phi = \operatorname{span}\langle 1, z, e^{-(1+i)z} \rangle = \operatorname{span}\langle e_0, a^* e_0, c_{-(1+i)} \rangle;$$

2) $\phi(z) = \sin \pi z$, тогда

$$\operatorname{im} P_\phi = \overline{\operatorname{span}}\langle \{e^{nz}\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle = \overline{\operatorname{span}}\langle \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle;$$

3) $\phi(z) = z(z - i) \sin^2 z$, тогда

$$\operatorname{im} P_\phi = \overline{\operatorname{span}}\langle \{e^{\pi n z}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{ze^{\pi n z}\}_{n \in \mathbb{Z}}, z^2, e^{-iz} \rangle;$$

4) $\phi(z) = (z + \sqrt{2}) \cos(\pi z + i\pi) \operatorname{sh} \pi z$, тогда

$$\operatorname{im} P_\phi = \overline{\operatorname{span}}\langle \{e^{(n+\frac{1}{2}+i)z}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{e^{inz}\}_{n \in \mathbb{Z}}, e^{-\sqrt{2}z} \rangle.$$

Опишем ядро P_ϕ для произвольного экспоненциального полинома $\phi(z)$. Используя свойство (2) пространства Баргмана–Фока, мы видим, что функция $f(z)$ лежит в $\ker P_\phi$ тогда и только тогда, когда она заведомо имеет нули в нулях $\phi(z)$ и кратность такого нуля $f(z)$ не меньше кратности соответствующего нуля $\phi(z)$. Другими словами, условие $f(z) \in \ker P_\phi$ равносильно тому, что $f(z)/\phi(z)$ – целая функция. Таким образом,

$$\ker P_\phi = N_\phi := \{g(z) \in \mathcal{F}_z : g(z) = f(z)\phi(z), \text{ где } f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}. \quad (9)$$

Для доказательства допустимости проектора P_ϕ воспользуемся критерием допустимости, сформулированным в разделе 2. А именно, достаточно проверить, что $D \cap \operatorname{im} P_\phi$ плотно в $\operatorname{im} P_\phi$ и $D \cap \ker P_\phi$ плотно в $\ker P_\phi$. Первое очевидно, так как $z^n e^{\alpha z} \in D$. Для доказательства плотности $D \cap \ker P_\phi$ в $\ker P_\phi$ достаточно проверить плотность системы функций $\{e^{\alpha z} \phi(z)\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ в N_ϕ (так как $e^{\alpha z} \phi(z) \in D$), а этот факт доказан в работе [8].

6. ПРИМЕР BPS-РЕШЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Как и в разделе 5, здесь мы будем работать в пространстве Баргмана–Фока. Мы докажем, что проектор $P_{\sin \pi z}$, введенный в разделе 5, имеет бесконечную энергию. Напомним, что

$$\begin{aligned} \operatorname{im} P_{\sin \pi z} &= \overline{\operatorname{span}}\langle \{e^{nz}\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle = \overline{\operatorname{span}}\langle \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle, \\ \ker P_{\sin \pi z} &= \left\{ f(z) \in \mathcal{F}_z : \frac{f(z)}{\sin \pi z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \right\}. \end{aligned}$$

Итак, чтобы доказать, что $E(P_{\sin \pi z}) = \infty$, мы предъявим две ортонормированные системы: $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ в его образе и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ в ядре такие, что

$$\forall n = 0, 1, \dots \quad |(af_n, q_n)| \geq C > 0,$$

где C – константа. Покажем, что из этого следует бесконечность энергии проектора $P_{\sin \pi z}$. Так как $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированная система в $\ker P_{\sin \pi z}$ (не обязательно базис), имеем

$$E(P_{\sin \pi z}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} ([a, P_{\sin \pi z}] f_n, [a, P_{\sin \pi z}] f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{\sin \pi z} a f_n, P_{\sin \pi z} a f_n).$$

Пусть Q – проектор на $\overline{\text{span}}\langle \{q_n\}_{n=0}^\infty \rangle$, тогда $\text{im } Q \subseteq \text{im } P_{\sin \pi z}$. Поэтому

$$\begin{aligned} E(P_{\sin \pi z}) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} (P_{\sin \pi z} a f_n, P_{\sin \pi z} a f_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} (Q a f_n, Q a f_n) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |(af_n, q_k)|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |(af_n, q_n)|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} C^2 = \infty. \end{aligned}$$

В качестве $\{q_n\}$ возьмем результат ортогонализации системы $\{e^{nz}\}_{n=0}^\infty$, а в качестве $\{f_n\}$ – результат ортогонализации $\{e^{nz} \sin \pi z\}_{n=0}^\infty$. Ортогонализацию будем проводить методом Грама–Шмидта. Как известно (см., например, [9]), ортогонализация системы линейно независимых векторов $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ дает ортонормированную систему векторов $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ согласно формуле

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{\det G_{n-1}} \sqrt{\det G_n}} \det \begin{pmatrix} (g_0, g_0) & (g_1, g_0) & \dots & (g_n, g_0) \\ (g_0, g_1) & (g_1, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_0, g_{n-1}) & (g_1, g_{n-1}) & \dots & (g_n, g_{n-1}) \\ g_0 & g_1 & \dots & g_n \end{pmatrix},$$

где G_n – матрица Грама векторов $g_0, g_1, \dots, g_n$ (т.е. $(G_n)_{ij} = (g_j, g_i)$), а последний определитель понимается формально, в смысле разложения по последней строке.

Как отмечалось в (2), $(f(z), e^{\alpha z}) = f(\bar{\alpha})$. Следовательно, $(e^{\alpha z}, e^{\beta z}) = e^{\alpha \bar{\beta}}$. Поэтому матрица Грама системы векторов $1, e^z, \dots, e^{nz}$ имеет вид

$$Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e & e^2 & \dots & e^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^n & e^{2n} & \dots & e^{n^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что $\det Q_n$ – это определитель Вандермонда $V_n(1, e, \dots, e^n)$, где

$$V_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Поэтому имеем

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k} V_{n-1}(1, e, \dots, e^{k-1}, e^{k+1}, \dots, e^n) e^{kz}}{\sqrt{V_{n-1}(1, e, \dots, e^n)} \sqrt{V_n(1, e, \dots, e^n)}}.$$

Теперь вычислим векторы f_n . Аналогично предыдущему получаем, что для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$(e^{mz} \sin \pi z, e^{nz} \sin \pi z) = (-1)^{m+n} C_0 e^{mn},$$

где $C_0 = \operatorname{sh} \pi^2$. Поэтому матрица Грама системы векторов $\left\{ \frac{1}{\sqrt{C_0}} e^{kz} \sin \pi z \right\}_{k=0}^n$ практически не отличается от матрицы (10). Точнее, если в ней изменить знаки всех четных строк и четных столбцов, то они совпадут. А значит, их определители совпадают. Если же у этих двух матриц вычеркнуть последнюю строку и k -й столбец, то определители получившихся матриц совпадут при четном значении $n+k$ и будут отличаться знаком при нечетном $n+k$. Поэтому имеем

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{C_0}} \sum_{k=0}^n \frac{V_{n-1}(1, e, \dots, e^{k-1}, e^{k+1}, \dots, e^n) e^{kz} \sin \pi z}{\sqrt{V_{n-1}(1, e, \dots, e^n)} \sqrt{V_n(1, e, \dots, e^n)}}.$$

Осталось показать, что $|(af_n, q_n)| \geq C > 0$ для некоторой константы C . Заметим, что $q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \alpha_{n,k} e^{kz}$, где коэффициенты $\alpha_{n,k}$ положительны (так как соответствующие определители Вандермонда положительны). Аналогично

$$f_n = \sum_{k=0}^n \beta_{n,k} e^{kz} \sin \pi z,$$

где $\beta_{n,k} > 0$, а значит,

$$af_n = \sum_{k=0}^n \beta_{n,k} (k e^{kz} \sin \pi z + e^{kz} \cos \pi z).$$

Поэтому имеем

$$(af_n, q_n) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{n,l} \beta_{n,k} e^{kl}.$$

В силу того, что $\alpha_{n,l} \beta_{n,k} e^{kl} \geq 0$,

$$\begin{aligned} |(af_n, q_n)| &\geq \alpha_{n,n} \beta_{n,n} e^{n^2} = \frac{V_{n-1}^2(1, e, \dots, e^{n-1}) e^{n^2}}{\sqrt{C_0} V_{n-1}(1, e, \dots, e^{n-1}) V_n(1, e, \dots, e^n)} = \\ &= \frac{e^{n^2}}{\sqrt{C_0} \prod_{k=0}^{n-1} (e^n - e^k)} \geq \frac{1}{\sqrt{C_0}}. \end{aligned}$$

Тем самым получена требуемая оценка на $|(af_n, q_n)|$ (константа C равна $1/\sqrt{C_0}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На данный момент неизвестно, существует ли проектор конечной энергии с бесконечномерными образом и ядром. Мы попытались найти такой проектор среди BPS-решений. В разделе 5 был построен класс BPS-решений с бесконечномерными образом и ядром, но, к сожалению, проекторы этого класса, для которых удалось вычислить энергию, в частности $P_{\sin \pi z}$, оказались проекторами бесконечной энергии.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 05-01-00498) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-9429.2006.1).

Список литературы

- [1] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [2] J. A. Harvey, *Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes*, [hep-th/0102076](#).
- [3] O. Lechtenfeld, A. D. Popov, *JHEP*, **11** (2001), 040; [hep-th/0106213](#).
- [4] A. V. Domrin, O. Lechtenfeld, S. Petersen, *JHEP*, **03** (2005), 045; [hep-th/0412001](#).
- [5] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. III. *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.
- [6] V. Bargmann, *Commun. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 187.
- [7] F. E. Burstall, J. H. Rawnsley, *Commun. Math. Phys.*, **110** (1987), 311.
- [8] D. J. Newman, H. S. Shapiro, “Fisher spaces of entire functions”, *Entire Functions and Related Parts of Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 11 (La Jolla, California, 1966), AMS, Providence, RI, 1968, 360.
- [9] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

Поступила в редакцию 18.01.2007,
после доработки 9.03.2007