Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ли Гу-Цян, Излучение Хокинга черной дыры Керра–Сена как процесс туннелирования, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 3, 358–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:18:12

© 2007 г.

Гу-Цян Ли*

ИЗЛУЧЕНИЕ ХОКИНГА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ КЕРРА–СЕНА КАК ПРОЦЕСС ТУННЕЛИРОВАНИЯ

Метод Парика–Вильчека применен для исследования излучения Хокинга черной дыры Керра–Сена как процесса туннелирования. Показано, что имеются поправки к интенсивности излучения и что поправленный радиационный спектр отличается от чисто термального. Данный результат находится в согласии с основополагающей унитарной теорией и с предыдущими результатами.

Ключевые слова: излучение Хокинга, черная дыра Керра–Сена, больцмановский множитель.

С тех пор как Хокинг доказал, что черная дыра может излучать частицы и что спектр ее излучения в точности совпадает с термальным [1], на исследование излучения черной дыры были направлены значительные усилия [2]. В недавней работе [3] Парик и Вильчек предложили метод вычисления степени излучения частиц с горизонта черной дыры. Они описали излучение Хокинга как процесс туннелирования, в ходе которого частица движется в динамической геометрии, а барьер образуется самой испускаемой частицей. Этот метод был применен к исследованию туннельного излучения разнообразных черных дыр [4], [5]. Эти результаты, как оказалось, находятся в согласии с основополагающей унитарной теорией. Цель данной работы состоит в том, чтобы расширить область применимости этого метода на стационарные аксиально-симметричные черные дыры Керра–Сена и вычислить поправки к спектру излучения Хокинга. Решение Керра–Сена [6], построенное из решения для зарядово нейтральной вращающейся черной дыры Керра, представляет собой точное классическое решение для четырехмерной черной дыры, возникающее в эффективной низкоэнергетической теории для гетеротической струнной теории поля.

В координатах Бойера–Линдквиста интервал в метрике Керра–Сена имеет вид [7]

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \\ + \frac{(\Delta + 2Mr)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi, \quad (1)$$

*Department of Physics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang, China.
E-mail: zsgqli@hotmail.com

где

$$\begin{aligned}\Sigma &= r^2 + 2br + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 - 2(M - b)r + a^2 = (r - r_{\text{H}})(r - r_{\text{I}}), \\ r_{\text{H}} &= M - b + \sqrt{(M - b)^2 - a^2}, \quad r_{\text{I}} = M - b - \sqrt{(M - b)^2 - a^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Эта метрика описывает черную дыру с массой M , зарядом Q и угловым моментом $J = Ma$. Параметр твиста b связан с параметром Сена α формулой $b = Q^2/2M = M \operatorname{th}^2(\alpha/2)$. Горизонт событий находится на расстоянии $r = r_{\text{H}}$.

В запаздывающих (dragging) координатах элемент пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = \tilde{g}_{00} dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (3)$$

где

$$\tilde{g}_{00} = g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = -\frac{\Delta \Sigma}{(\Delta + 2Mr)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}. \quad (4)$$

Запаздывающая угловая скорость черной дыры равна

$$\Omega_{\text{H}} = -\left. \frac{g_{03}}{g_{33}} \right|_{r=r_{\text{H}}} = \frac{a}{2Mr_{\text{H}}}. \quad (5)$$

Чтобы описать эффект туннелирования, произведем дальнейшее преобразование, которое приведет к системе координат, несингулярной на горизонте событий и представляющей собой плоское евклидово пространство в радиальных направлениях на срезах постоянного времени,

$$dt = dT + f(r, \theta) dr + g(r, \theta) d\theta \quad (6)$$

с условием интегрируемости

$$\frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial g(r, \theta)}{\partial r}. \quad (7)$$

Положим $\Sigma/\Delta + f^2 \tilde{g}_{00} = 1$ и получим новый интервал (интервал Пенлеве–Керра–Сена)

$$\begin{aligned}ds^2 &= \tilde{g}_{00} dT^2 + 2\sqrt{\tilde{g}_{00} \left(1 - \frac{\Sigma}{\Delta}\right)} dT dr + dr^2 + (\Sigma + g^2 \tilde{g}_{00}) d\theta^2 + \\ &+ 2\tilde{g}_{00} g dT d\theta + 2g\sqrt{\tilde{g}_{00} \left(1 - \frac{\Sigma}{\Delta}\right)} dr d\theta.\end{aligned}\quad (8)$$

Этот интервал, очевидно, имеет хорошее поведение на горизонте событий и задает плоское евклидово пространство в радиальном направлении на срезах постоянного времени, ∂_T – вектор Киллинга в глобальном пространстве-времени. Более того,

нетрудно показать, что в этих новых координатах метрика удовлетворяет условию Ландау синхронизации координатных часов [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{g_{0j}}{g_{00}} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Положив $\tilde{g}_{00} = 0$, получим следующее уравнение поверхности бесконечного красного сдвига: $\Delta = 0$. Это уравнение, очевидно, соответствует уравнению горизонта событий, т.е. горизонт событий и поверхность бесконечного красного сдвига совпадают, а потому в данном случае применим предел геометрической оптики. Из уравнения (8) получим, что радиальная выходящая геодезическая, отвечающая нулевому интервалу, имеет вид

$$\dot{r} = \frac{dr}{dT} = \frac{\Delta\sqrt{\Sigma}}{(\sqrt{\Sigma} + \sqrt{\Sigma - \Delta})\sqrt{(\Delta + 2Mr)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}}. \quad (10)$$

Если принять в расчет гравитационное самодействие частицы и законы сохранения энергии и углового момента, то при излучении частицы с энергией ω и угловым моментом $a\omega$ энергия и угловой момент черной дыры становятся равными $M - \omega$ и $a(M - \omega)$, соответственно, при этом во всех приведенных выше уравнениях, содержащих $r_H(M)$, следует произвести замену $M \rightarrow M - \omega$. Поскольку метрика аксиально симметрична, можно считать, что в процессе туннелирования излучаемая частица имеет эллипсоидальные поверхности энергии и углового момента. С другой стороны, координата φ не входит в интервал метрики (8), т.е. не участвует в функции Лагранжа. Чтобы устранить свободу в выборе φ , можно представить действие излучаемой частицы, пересекающей горизонт событий изнутри наружу с начальной радиальной координатой r_i и конечной радиальной координатой r_j , в виде [5]

$$Z = \int_{T_i}^{T_j} (L - P_\varphi \dot{\varphi}) dT = \int_{r_i}^{r_j} P_r dr - \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} P_\varphi d\varphi = \int_{r_i}^{r_j} \int_0^{P_r} dP_r dr - \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \int_0^{P_\varphi} dP_\varphi d\varphi, \quad (11)$$

где P_r и P_φ – канонические импульсы, сопряженные соответственно r и φ . В силу уравнений Гамильтона

$$\frac{dr}{dT} = \frac{dH}{dP_r} \Big|_{(r, \varphi, P_\varphi)}, \quad \frac{d\varphi}{dT} = \frac{dH}{dP_\varphi} \Big|_{(r, \varphi, P_r)}, \quad (12)$$

где

$$dH|_{(r, \varphi, P_\varphi)} = dM, \quad dH|_{(r, \varphi, P_r)} = \Omega_H dJ, \quad (13)$$

уравнение (11) примет вид

$$Z = \int_{r_i}^{r_j} \int_M^{M-\omega} \frac{2Mr_H - a^2}{2Mr_H} \frac{(\sqrt{\Sigma} + \sqrt{\Sigma - \Delta})\sqrt{(\Delta + 2Mr)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}}{\Delta\sqrt{\Sigma}} dM dr. \quad (14)$$

Легко видеть, что $r = r_H$ представляет собой полюс подынтегральной функции. Интеграл можно вычислить, деформируя контур интегрирования вокруг полюса

так, чтобы обеспечить убывание по времени решения с положительной энергией. Заметим, что все вещественные составляющие, как расходящиеся, так и конечные, можно опустить, поскольку они дают вклад только в фазу. Интегрируя по r , получим

$$Z = -2\pi i \int_M^{M-\omega} \frac{2Mr_H - a^2}{r_H - r_I} dM. \quad (15)$$

С другой стороны, энтропия Бекенштейна–Хокинга такой черной дыры имеет вид

$$S_{\text{BH}} = \frac{A_h}{4} = 2\pi M r_H, \quad (16)$$

где $A_h = \iint \{\sqrt{g_{22}g_{33}}\}_{r_H} d\theta d\varphi$ – площадь горизонта событий. Из уравнения (16) можно получить, что

$$dS_{\text{BH}} = 4\pi \frac{2Mr_H - a^2}{r_H - r_I} dM. \quad (17)$$

Поэтому

$$Z = -\frac{i}{2} \int_{S_{\text{BH}}(M)}^{S_{\text{BH}}(M-\omega)} dS_{\text{BH}} = -\frac{i}{2} \Delta S_{\text{BH}}, \quad (18)$$

где $\Delta S_{\text{BH}} = S_{\text{BH}}(M - \omega) - S_{\text{BH}}(M)$ – изменение энтропии Бекенштейна–Хокинга.

В ВКБ-приближении соответствие между вероятностью туннелирования частицы и мнимой частью действия имеет вид $\Gamma \sim e^{-2 \text{Im} Z}$. Тем самым имеем $\Gamma \sim e^{\Delta S_{\text{BH}}}$.

Это соотношение согласуется с основополагающей унитарной теорией и показывает, что если принять в расчет гравитационное самодействие, то спектр излучения перестает быть чисто термальным. Для сравнения с чисто термальным спектром разложим ΔS_{BH} по разности $\omega - \omega_0$, после чего интенсивность туннелирования запишется как

$$\Gamma \sim e^{\Delta S_{\text{BH}}} \approx \exp[-\beta(\omega - \omega_0) + a_2(\omega - \omega_0)^2 + O((\omega - \omega_0)^2)], \quad (19)$$

где $\omega_0 = a\Omega_H \omega$ (заметим, что $a\omega$ – угловой момент туннелирующей частицы),

$$a_2 = \frac{2M\sqrt{(M-b)^2 - a^2} - M^2 + b^2}{[(M-b)^2 - a^2](M+b+\sqrt{(M-b)^2 - a^2})} \beta, \quad (20)$$

а β – обратная температура Хокинга на горизонте черной дыры,

$$\beta = 4\pi M \left(1 + \frac{M-b}{\sqrt{(M-b)^2 + a^2}} \right). \quad (21)$$

Ведущий член в формуле (19), очевидно, совпадает с обычным больцмановским температурным множителем для излучения. Однако появление поправок старших порядков, которые можно легко вычислить вплоть до любого требуемого порядка по $\omega - \omega_0$, указывает на наличие множителя типа “серого тела” в спектре излучения [5]. Появление таких поправок знаменует собой возможность извлечения из спектра другой информации, кроме информации о температуре.

Если $a = b = 0$, то $\omega_0 = 0$, $\beta = 8\pi M$, $a_2 = 4\pi$, и из формулы (19) получаем вероятность туннелирования для черной дыры Шварцшильда, т.е. $\Gamma \sim e^{-8\pi\omega(M-\omega/2)}$, которая обсуждалась Париком и Вильчеком в [3].

Список литературы

- [1] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43** (1975), 199.
- [2] J. Y. Zhang, Z. Zhao, *Acta Phys. Sinica*, **52** (2003), 2096; S.-Q. Wu, X. Cai, *Chinese Phys. Lett.*, **18** (2001), 485; S. Q. Wu, M. L. Yan, *Chinese Phys. Lett.*, **20** (2003), 1913.
- [3] M. K. Parikh, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 5042.
- [4] H. Z. Fang, Y. P. Hu, Z. Zhao, *Chinese Phys. Lett.*, **22** (2005), 1611; J. Y. Zhang, Z. Zhao, *Phys. Lett. B*, **618** (2005), 14.
- [5] J. Y. Zhang, Z. Zhao, *Modern Phys. Lett. A*, **20** (2005), 1673; J. Y. Zhang, Z. Zhao, *Nucl. Phys. B*, **725** (2005), 173; J. Y. Zhang, Z. Zhao, *JHEP*, **10** (2005), 055; H. L. Li, Q. Q. Jiang, S. Z. Yang, *Acta Phys. Sinica*, **55** (2006), 539; Y. W. Han, S. Z. Yang, *Chinese Phys. Lett.*, **22** (2005), 2769; S. Z. Yang, *Chinese Phys. Lett.*, **22** (2005), 2492; G. Q. Li, *Europhys. Lett.*, **75** (2006), 216; G. Q. Li, *Europhys. Lett.*, **76** (2006), 203; G. Q. Li, *J. Phys. A*, **39** (2006), 11889.
- [6] A. Sen, *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992), 1006; [hep-th/9204046](#).
- [7] S. Q. Wu, X. Cai, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 1084; [gr-qc/0303075](#).
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 29.09.2006