Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О сверхтекучести классической жидкости в нанотрубке для четного и нечетного числа нейтронов в молекуле, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 3, 388–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:30:04

© 2007 г.

В. П. Маслов*

О СВЕРХТЕКУЧЕСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В НАНОТРУБКЕ ДЛЯ ЧЕТНОГО И НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА НЕЙТРОНОВ В МОЛЕКУЛЕ

Показано, что в нанотрубках возникает явление сверхтекучести для классических жидкостей.

Ключевые слова: сверхтекучесть, бозоны, фермионы.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Случай четного числа нейтронов. Отметим прежде всего, что решения уравнения в вариациях для уравнения Власова не совпадают с классическим пределом для уравнений в вариациях для уравнений среднего поля в квантовой теории.

Рассмотрим уравнения среднего поля вида

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi^t(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + W_t(x) \right) \varphi^t(x), \quad W_t(x) = U(x) + \int dy V(x, y) |\varphi^t(y)|^2 \quad (1)$$

при начальном условии $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, где $\varphi_0 \in W_2^\infty(\mathbb{R}^\nu)$, $\int dx |\varphi_0(x)|^2 = 1$.

Для получения асимптотики типа комплексного роста [1] рассмотрим систему, состоящую из уравнения Хартри и уравнения, ему сопряженного. Затем рассмотрим для нее систему в вариациях и, наконец, заменим вариации $\delta\varphi$ и $\delta\varphi^*$ на независимые функции F и G . Для функций F и G получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial F^t(x)}{\partial t} &= \int dy \left(\frac{\delta^2 H}{\delta\varphi^*(x)\delta\varphi(y)} F^t(y) + \frac{\delta^2 H}{\delta\varphi^*(x)\delta\varphi^*(y)} G^t(y) \right), \\ -i \frac{\partial G^t(x)}{\partial t} &= \int dy \left(\frac{\delta^2 H}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} F^t(y) + \frac{\delta^2 H}{\delta\varphi(x)\delta\varphi^*(y)} G^t(y) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Классические уравнения получаются из квантовых, грубо говоря, путем подстановки вида $\varphi = \chi e^{iS/\hbar}$ (метод ВКБ), $\varphi^* = \chi^* e^{-iS^*/\hbar}$, $S = S^*$, $\chi = \chi(x, t) \in C^\infty$, $S = S(x, t) \in C^\infty$.

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Для уравнения в вариациях естественно варьировать не только предельное уравнение для χ и χ^* , но и функции S и S^* . Это дает новый важный член решения уравнения для коллективных колебаний.

Проследим этот факт на простейшем примере, который исследуется в знаменитой работе Боголюбова о слабонеидеальном бозе-газе [2].

Пусть в уравнении (1) $U = 0$ в трехмерном ящике с длиной ребра L , при этом на волновые функции наложено условие периодичности (т.е. речь идет о задаче на торе с образующими L, L, L). Тогда функция

$$\varphi(x) = L^{-3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(px - \Omega t)}, \quad (3)$$

где $p = 2\pi n/L$, n – целочисленный вектор, удовлетворяет уравнению (1) при

$$\Omega = \frac{p^2}{2m} + L^{-3} \int dx V(x). \quad (4)$$

Рассмотрим функции $F^{(\lambda)}(x)$ и $G^{(\lambda)}(x)$, где $\lambda = 2\pi n/L$, $n \neq 0$, следующего вида:

$$\begin{aligned} F^{(\lambda)t}(x) &= L^{-3/2} \rho_\lambda e^{\frac{i}{\hbar}[(p+\lambda)x + (\beta - \Omega)t]}, \\ G^{(\lambda)t}(x) &= L^{-3/2} \sigma_\lambda e^{\frac{i}{\hbar}[(-p+\lambda)x + (\beta + \Omega)t]}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} -\beta_\lambda \rho_\lambda &= \left(\frac{(p+\lambda)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + \tilde{V}_\lambda \right) \rho_\lambda + \tilde{V}_\lambda \sigma_\lambda, \\ \beta_\lambda \rho_\lambda &= \left(\frac{(p-\lambda)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + \tilde{V}_\lambda \right) \sigma_\lambda + \tilde{V}_\lambda \rho_\lambda, \\ |\sigma_\lambda|^2 - |\rho_\lambda|^2 &= 1, \quad \tilde{V}_\lambda = L^{-3} \int dx V(x) e^{\frac{i}{\hbar}\lambda x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из системы (6) находим

$$\beta_\lambda = -p\lambda + \sqrt{\left(\frac{\lambda^2}{2m} + \tilde{V}_\lambda \right)^2 - \tilde{V}_\lambda^2}. \quad (7)$$

В этом примере $u = e^{\frac{i}{\hbar}s(x,t)}$, $u^* = e^{-\frac{i}{\hbar}s(x,t)}$, где $s(x,t) = px + \beta t$, а вариация действия для вектора $(\delta u, \delta u^*)$ равна $\lambda x \pm \Omega t$. При более тщательном переходе к пределу $\tilde{V}_\lambda \rightarrow V_0 = L^{-3} \int dx V(x)$.

Таким образом, в классическом пределе мы получаем знаменитое соотношение Боголюбова (7). В этом случае $u(x) = 0$, как и в линейном уравнении Шредингера, точное решение совпадает с квазиклассическим. В работе [3] исследуется случай $u(x) \neq 0$, и оказывается, что соотношение, аналогичное (7), является классическим пределом при $\hbar \rightarrow 0$ для уравнения в вариациях в этом общем случае. Кривая зависимости β_λ от λ называется кривой Ландау и определяет сверхтекучее состояние. Значение $\lambda_{\text{кр}}$, при котором сверхтекучесть пропадает, называется критерием Ландау. Боголюбов объясняет явление сверхтекучести следующим образом: «вырожденный конденсат» может двигаться без трения относительно элементарных возмущений с произвольной достаточно малой скоростью» ([2], с. 210).

Однако о бозе-эйнштейновском конденсате в этом математическом рассмотрении речи не идет, а просто спектр квазичастиц, определяемый при $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, является положительным. Это означает его метастабильность (см. [4]). Бозе-эйнштейновский конденсат здесь упоминается лишь для того, чтобы в силу вышеизложенного не возникала мысль, что это рассуждение подходит для классической жидкости.

Действительно, например, молекулы классической неразряженной жидкости являются бозе-частицами, если число нейтронов в молекуле четно. Для такой жидкости можно написать N -частичное уравнение, имея в виду, что каждая частица (молекула) нейтральна и состоит из четного числа l нейтронов. Таким образом, каждая i -я частица $3(2k + l)$ -мерна, где k – число электронов, имеется зависимость от потенциала $u(x_i)$, $x_i \in \mathbb{R}^{6k+3l}$, и можно рассмотреть уравнение для N частиц x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, с парным взаимодействием $V(x_i - x_j)$.

Однако Боголюбов нашел лишь одну серию спектра многочастичной задачи. Ландау писал: “*Н. Н. Боголюбову недавно удалось с помощью остроумного применения вторичного квантования определить в общем виде энергетический спектр бозе-эйнштейновского газа со слабым взаимодействием между частицами*” ([5], с. 43). Но эта серия не является единственной, т.е. она не исчерпывает весь энергетический спектр.

Автор в 2001 г. предложил метод ультравторичного квантования ([6]; см. также [7]–[11]). Ультравторично-квантованные уравнения Шредингера, как и вторично-квантованные, являются некоторым представлением N -частичного уравнения Шредингера, а это значит, что, по существу, ультравторично-квантованное уравнение тождественно исходному N -частичному уравнению: совпадает с ним на $3N$ -мерном пространстве. Однако замена операторов рождения и уничтожения c -числами, в отличие от вторично-квантованного случая, еще не дает правильной асимптотики, но оказывается, она совпадает с результатом применения вариационного принципа Шредера или вариационного метода Боголюбова.

Для экзотического потенциала Бардина правильное асимптотическое решение совпадает с тем, которое получается в результате применения вышеуказанного метода ультравторичного квантования. Для потенциалов общего вида, например для парного взаимодействия, ответ оказывается другой. В частности, метод ультравторичного квантования дает другие асимптотические серии собственных значений, отвечающих N -частичному уравнению Шредингера, которые, в отличие от боголюбовской серии (7), не являются метастабильными. Они отвечают вихревым нитям [12].

Оказывается, дело не в бозе-эйнштейновском конденсате, а в толщине капилляра (нанотрубки), по которому течет жидкость. Если мы рассматриваем жидкость в капилляре или нанотрубке, то при достаточно малом их радиусе скорость, отвечающая метастабильным состояниям, оказывается не малой. Значит, с меньшей скоростью течение будет происходить без трения.

Условие непротекания через границу нанотрубки (отсутствие потока) есть краевое условие Дирихле или краевое условие Борна–фон Кармана. Оно порождает

стоячую волну, которую можно трактовать как пару частица–античастица: частица с импульсом p , ортогональным стенке трубки, и античастица с импульсом $-p$.

В бозонном случае мы рассматриваем короткодействующий потенциал взаимодействия $V(x_i - x_j)$. Это означает, что при числе частиц $N \rightarrow \infty$ взаимодействие возможно лишь с конечным числом частиц. А значит, потенциал зависит от N следующим образом: $V_N = V((x_i - x_j)N^{1/3})$. Если $V(y)$ финитно с носителем Ω_V , то при $N \rightarrow \infty$ носитель захватывает конечное число частиц, не зависящее от N . В результате оказывается, что при скоростях, меньших $\min(\lambda_{\text{кр}}, h/(2mR))$, где R – радиус нанотрубки, имеет место сверхтекучесть. Ограничение сверху определяется условием, что радиус действия молекулы должен быть меньше, чем радиус нанотрубки.

Теперь приведу мои собственные соображения, не имеющие отношения к математическому изложению. Вязкость связана со столкновением частиц: чем больше температура, тем больше столкновений. В нанотрубке столкновений мало, происходят только столкновения со стенками, что учитывается полученной ниже серией. Именно это обстоятельство, а не наличие бозе-конденсата, приводит к ослаблению вязкости и, следовательно, к сверхтекучести. То есть основным фактором явления сверхтекучести даже жидкого He^4 является не конденсат, а наличие тонкого капилляра [13], [14].

1.2. Случай нечетного числа нейтронов. В этом случае важна не отталкивающая часть потенциала, а его притягивающая часть, и, значит, необходимо более точное знание поведения потенциала на бесконечности.

Для рассмотрения системы, в которой число нейтронов в молекуле нечетно, а значит, спин ее равен $1/2$, что приводит к антисимметрии собственных функций, мы используем потенциал взаимодействия, который обеспечивает отталкивание на близких расстояниях и притяжение на далеких расстояниях. Таким свойством обладает, в частности, потенциал взаимодействия в ферми-жидкости He^3 .

Потенциал $V(\xi)$ будем считать сферически-симметричным. Отсюда следует, что и его фурье-образ $\tilde{V}(\xi)$ будет также сферически-симметричным. Далее мы поставим чисто математическое условие, которое назовем свойством зеркальности. Как потенциал $V(\xi)$, так и его образ $\tilde{V}(\xi)$ должны иметь ветвление вида $\sqrt{|x|} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Возможно даже, что это условие является лишним для приведенных ниже результатов, но оно возникает в целом ряде других задач, и в нем заложен глубокий смысл при аналитическом продолжении (см., например, [15]). Это означает, что $V(r)$ существенно зависит от первой степени радиуса r , и его фурье-образ обладает тем же свойством относительно $|p|$.

Переход к сферическим координатам приводит к соотношению¹⁾

$$V(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \tilde{V}(\xi) \sin(\xi r) \xi d\xi. \quad (8)$$

¹⁾Эту формулу мне сообщил М. В. Карасёв.

В предположении, что $\tilde{V}(|\xi|)$ стремится к бесконечности как $\text{const}/|\xi|^2$, мы получим, что

$$V(r) = \frac{\text{const}}{r} + O(1)$$

при $r \rightarrow 0$ и $V(r) \rightarrow \infty$ как const/r^4 .

Условие зеркальности подразумевает, что $\tilde{V}'_{|\xi|}(|\xi|)|_{|\xi|=0} \neq 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{V}_{|\xi|}|_{|\xi|=0} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r).$$

Известно, что в свободном пространстве потенциал взаимодействия убывает как r^{-6} , однако если добавить произвольно малый радиально-симметричный потенциал, то почти наверняка убывание будет иметь порядок r^{-4} .

2. УЛЬТРАВОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

В работах [6], [16]–[18] было введено ультраволичное квантование для задач квантовой механики и статистической физики. Напомним обозначения и основные факты в случае квантования по парам частица–номер частицы и по парам из двух частиц. Квантование с учетом пар позволит далее учесть парные корреляции частиц при построении асимптотики. Пространством ультраволичного квантования является бозонное пространство Фока $\mathcal{F}$, $\hat{b}^+(x, s)$ – оператор рождения частиц с номером s , $\hat{b}^-(x, s)$ – оператор уничтожения частиц с номером s в пространстве $\mathcal{F}$ [19], $\hat{B}^+(x, x')$ – оператор рождения пары частиц, $\hat{B}^-(x, x')$ – оператор уничтожения пары частиц в этом пространстве. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{b}^-(x, s), \hat{b}^+(x', s')] &= \delta_{ss'} \delta(x - x'), & [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{b}^\pm(x', s')] &= 0, \\ [\hat{B}^-(x_1, x_2), \hat{B}^+(x'_1, x'_2)] &= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), \\ [\hat{B}^\pm(x_1, x_2), \hat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= 0, \\ [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= [\hat{b}^\pm(x, s), \hat{B}^\mp(x'_1, x'_2)] = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть Φ_0 – вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{F}$, обладающий следующими свойствами:

$$\hat{b}^-(x, s)\Phi_0 = 0, \quad \hat{B}^-(x_1, x_2)\Phi_0 = 0. \tag{10}$$

Переменная x лежит на трехмерном торе $L \times L \times L$, который будем обозначать $\mathbf{T}$. Дискретная переменная $s = 0, 1, \dots$ называется номером или статистическим спином. Любой вектор Φ пространства $\mathcal{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \\ &\quad \times \Phi_{k,M}(x_1, s_1; \dots; x_k, s_k; y_1, y_2; \dots; y_{2M-1}, y_{2M}) \times \\ &\quad \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \Phi_0, \end{aligned} \tag{11}$$

где функция $\Phi_{k,M}(x_1, s_1; \dots; x_k, s_k; y_1, y_2; \dots; y_{2M-1}, y_{2M})$ симметрична относительно перестановок пар переменных (x_j, s_j) и (x_i, s_i) и относительно перестановок пар переменных (y_{2j-1}, y_{2j}) и (y_{2i-1}, y_{2i}) . В бозонном случае вводится подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$, состоящее из векторов Φ , у которых $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq (k, M)$, а $\Phi_{k,M}$ является симметричной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_{2M}$. В фермионном случае вводится подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$, состоящее из векторов Φ таких, что $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq (k, M)$ и $\Phi_{k,M}$ – антисимметричная функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_{2M}$. Ортогональный проектор пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$ имеет вид [6]–[11], [13]–[18]

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Symm}} = & \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \\ & \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \times \\ & \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\hat{b}^-(x_1, s_1) \dots \hat{b}^-(x_k, s_k) \hat{B}^-(y_1, y_2) \dots \hat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}}$ – оператор симметризации по переменным $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2M}$, а операторы $\hat{b}^+(x, s)$, $\hat{b}^-(x, s)$, $\hat{B}^+(y, y')$, $\hat{B}^-(y, y')$ упорядочены по Вику [19]. Ортогональный проектор пространства $\mathcal{F}$ на подпространство $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}} = & \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \\ & \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \times \\ & \times \text{Asymm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\hat{b}^-(x_1, s_1) \dots \hat{b}^-(x_k, s_k) \hat{B}^-(y_1, y_2) \dots \hat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right), \end{aligned}$$

где $\text{Asymm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}}$ – оператор антисимметризации по переменным $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2M}$. Здесь и везде далее, если не оговорено особо, операторы $\hat{b}^+(x, s)$, $\hat{b}^-(x, s)$, $\hat{B}^+(y, y')$, $\hat{B}^-(y, y')$ упорядочены по Вику.

Рассмотрим систему N тождественных частиц на торе $\mathbf{T}$. Будем считать, что гамильтониан N бозонов или фермионов имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \Delta_j + \sum_{j=1}^N \sum_{l=j+1}^N V(x_j - x_l). \quad (13)$$

Согласно [6] этому оператору в бозонном случае отвечает ультравторично-квантованный гамильтониан следующего вида:

$$\widehat{H}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \hat{H}_{k+2M} \times \\
& \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\hat{b}^-(x_1, s_1) \dots \hat{b}^-(x_k, s_k) \hat{B}^-(y_1, y_2) \dots \hat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \times \\
& \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right), \quad (14)
\end{aligned}$$

а в фермионном случае соответствующий оператор $\widehat{\bar{H}}_F$ выражается аналогичной формулой, в которой оператор Symm заменяется на Asymm. По аналогии с (13) и (14) ультравторично-квантованный оператор $\widehat{\bar{A}}$ сопоставляется [6] любому N -частичному оператору

$$\hat{A}_N \left(x_1^2, \dots, x_N^2; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_N} \right).$$

Например, единичному оператору в бозонном случае сопоставляется ультравторично-квантованный единичный оператор вида

$$\begin{aligned}
\widehat{\bar{E}}_B &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \\
& \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \times \\
& \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (\hat{b}^-(x_1, s_1) \dots \hat{b}^-(x_k, s_k) \hat{B}^-(y_1, y_2) \dots \hat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M})) \times \\
& \times \exp \left(- \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dy' \hat{B}^+(y, y') \hat{B}^-(y, y') \right), \quad (15)
\end{aligned}$$

который есть сумма проекторов (12). Аналогично ультравторично-квантованный единичный оператор в фермионном случае есть

$$\widehat{\bar{E}}_F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}},$$

а в формуле (15) оператор Symm заменяется на Asymm.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\widehat{\bar{H}}_{B,F} \Phi = \lambda \widehat{\bar{E}}_B \Phi, \quad \widehat{\bar{E}} \Phi \neq 0, \quad (16)$$

в бозонном и фермионном случаях. Справедливо утверждение, доказанное в [6]: на подпространствах $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Symm}}$ и $\mathcal{F}_{k,M}^{\text{Asymm}}$ пространства $\mathcal{F}$ операторы $\widehat{\bar{H}}_B$ и $\widehat{\bar{H}}_F$, соответственно, совпадают с оператором $\widehat{H}_{k+2M}$, если действовать на них проектором на N -мерное подпространство (см. формулу (22) ниже). Поэтому собственные значения λ задачи (16) в бозонном и фермионном случаях совпадают с соответствующими собственными значениями операторов $\widehat{H}_N$ (13). В случае, когда коммутаторы между операторами $\hat{b}^-(x, s)$ и $\hat{b}^+(x, s)$, а также $\hat{B}^-(x, y)$ и $\hat{B}^+(x, y)$

имеют порядок малости $1/N$, асимптотика решений задачи (16) определяется точками экстремума псевдосимвола, отвечающего задаче (16). Для произвольного вторично-квантованного оператора $\hat{A}$ псевдосимвол отвечающего ему ультравторично-квантованного оператора $\hat{\bar{A}}$ выражается следующей формулой [6]:

$$A_{B,F}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\hat{\rho}_{B,F}\hat{A})}{\text{Sp}(\hat{\rho}_{B,F})}.$$

В бозонном случае псевдосимвол имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = & \\ = & \left\{ \sum_{k,M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \times \right. \\ & \times b^*(x_1, s_1) \dots b^*(x_k, s_k) B^*(y_1, y_2) \dots B^*(y_{2M-1}, y_{2M}) H_{k+2M} \times \\ & \times \text{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} (b(x_1, s_1) \dots b(x_k, s_k) B(y_1, y_2) \dots B(y_{2M-1}, y_{2M})) \Big\} \times \\ & \times \left\{ \sum_{k',M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!M'!} \sum_{s'_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s'_{k'}=0}^{\infty} \int \cdots \int dx'_1 \dots dx'_{k'} dy'_1 \dots dy'_{2M'} \times \right. \\ & \times b^*(x'_1, s'_1) \dots b^*(x'_{k'}, s'_{k'}) B^*(y'_1, y'_2) \dots B^*(y'_{2M'-1}, y'_{2M'}) \times \\ & \times \text{Symm}_{x'_1 \dots x'_{k'} y'_1 \dots y'_{2M'}} (b(x'_1, s'_1) \dots b(x'_{k'}, s'_{k'}) B(y'_1, y'_2) \dots B(y'_{2M'-1}, y'_{2M'})) \Big\}^{-1}. \quad (17) \end{aligned}$$

В фермионном случае псевдосимвол выражается аналогично, только Symm в формуле (17) заменяется на Asymm. Следующее тождество для псевдосимвола (17) имеет место в бозонном случае:

$$\mathcal{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\hat{\rho}_B \hat{H})}{\text{Sp}(\hat{\rho}_B)}, \quad (18)$$

где $\hat{H}$, $\hat{\rho}_B$ – вторично-квантованные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int dx \hat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}^-(x) + \\ & + \frac{1}{2} \iint dx dy V(x, y) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x). \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\rho}_B$ зависит от функций $b(x, s)$, $B(y, y')$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_B = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!(k+2M)!} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \iint dx dx' b(x, s) b^*(x', s) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x') \right)^k \times \\ & \times \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \hat{\psi}^+(y_1) \hat{\psi}^+(y_2) \right)^M \times \\ & \times \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \hat{\psi}^-(y'_1) \hat{\psi}^-(y'_2) \right)^M \exp \left(- \int dz \hat{\psi}^+(z) \hat{\psi}^-(z) \right), \quad (20) \end{aligned}$$

где $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ – бозонные операторы рождения и уничтожения, упорядоченные по Вику [19]. В фермионном случае имеет место аналогичное тождество

$$\mathcal{H}_F[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\text{Sp}(\hat{\rho}_F \hat{H})}{\text{Sp}(\hat{\rho}_F)},$$

где $\hat{H}$, $\hat{\rho}_F$ – следующие вторично-квантованные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int dx \hat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}^-(x) + \frac{1}{2} \iint dx dy V(x, y) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x), \\ \hat{\rho}_F &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M! (k+2M)!} \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \hat{\psi}^+(y_1) \hat{\psi}^+(y_2) \right)^M \times \\ &\times \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dx'_1 \dots dx_k dx'_k b(x_1, s_1) b^*(x'_1, s_1) \dots b(x_k, s_k) b^*(x'_k, s_k) \times \\ &\times \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_k) \hat{P}_0 \hat{\psi}^-(x'_k) \dots \hat{\psi}^-(x'_1) \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \hat{\psi}^-(y'_2) \hat{\psi}^-(y'_1) \right)^M, \end{aligned} \quad (21)$$

где в данном случае $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ – фермионные операторы рождения и уничтожения, $\hat{P}_0$ – проектор на вакуумный вектор фермионного фоковского пространства.

В пространстве $\mathcal{F}$ вводятся [6] ультравторично-квантованные операторы числа частиц

$$\widehat{N}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} (k+2M) \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Symm}}, \quad \widehat{N}_F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} (k+2M) \hat{\Pi}_{k,M}^{\text{Asymm}}. \quad (22)$$

В бозонном случае псевдосимвол оператора $\widehat{N}_B$ имеет вид

$$\begin{aligned} N_B &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{k+2M}{k! M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{k+2M} \times \right. \\ &\times b^*(x_1, s_1) \dots b^*(x_k, s_k) B^*(x_{k+1}, x_{k+2}) \dots B^*(x_{k+2M-1}, x_{k+2M}) \times \\ &\times \text{Symm}_{x_1 \dots x_{k+2M}} (b(x_1, s_1) \dots b(x_k, s_k) B(x_{k+1}, x_{k+2}) \dots B(x_{k+2M-1}, x_{k+2M})) \left. \right\} \times \\ &\times \left\{ \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'! M'!} \sum_{s'_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s'_{k'}=0}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \dots dz_{k'+2M'} b^*(z_1, s'_1) \dots b^*(z_{k'}, s'_{k'}) \times \right. \\ &\times B^*(z_{k'+1}, z_{k'+2}) \dots B^*(z_{k'+2M'-1}, z_{k'+2M'}) \times \\ &\times \text{Symm}_{z_1 \dots z_{k'+2M'}} (b(z_1, s'_1) \dots B(z_{k'+2M'-1}, z_{k'+2M'})) \left. \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

В соответствующей формуле в фермионном случае Symm заменяется на Asymm.

3. СИМВОЛ УЛЬТРАВОРИЧНО-КВАНТОВАННОГО ОПЕРАТОРА

Заметим прежде всего, что определение псевдосимвола, данное выше, не совсем отражает термодинамическую асимптотику, хотя это определение и согласуется с правилом Боголюбова–Дирака, согласно которому операторы рождения и уничтожения в главном асимптотическом члене надо положить s -числами. Поэтому определим символ правильно (введем истинный символ). Пусть оператор $\hat{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{l=1}^L \int \dots \int dx_1 \dots dx_l \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}^+(x_l) \times \\ & \times H_l \left(\overset{2}{x}_1, \dots, \overset{2}{x}_l; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \hat{\psi}^-(x_l) \dots \hat{\psi}^-(x_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда в случае ультраволичного квантования без операторов рождения и уничтожения пар частиц $\hat{B}^\pm(x, y)$ для операторов $\overline{\hat{H}}$ и $\overline{\hat{E}}$, определенных выше, имеет место тождество

$$\overline{\hat{H}} = \overline{\hat{E}} \overline{\hat{A}}, \quad (25)$$

где $\overline{\hat{A}}$ – некоторый оператор в пространстве $\mathcal{F}$, который задается равенством

$$\begin{aligned} \overline{\hat{A}} = & \sum_{l=1}^L \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_l=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_l \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{\psi}^+(x_l, s_l) \times \\ & \times H_l \left(\overset{2}{x}_1, \dots, \overset{2}{x}_l; -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \hat{b}^-(x_l, s_l) \dots \hat{b}^-(x_1). \end{aligned} \quad (26)$$

В случае, если ультраволичное квантование учитывает также операторы рождения и уничтожения пар частиц, тождество (25) справедливо, но оператор $\overline{\hat{A}}$ имеет более сложный вид, чем (26). Например, если оператор $\hat{H}$ является частным случаем оператора (24) при $L = 2$, оператор $\overline{\hat{A}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\hat{A}} = & \sum_{s=0}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, s) \left(-\frac{h^2}{2m} \Delta \right) \hat{b}^-(x, s) + \\ & + \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \left(-\frac{h^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \right) \hat{B}^-(x, y) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \iint dx dy V(x, y) \hat{b}^+(x, s_1) \hat{b}^+(y, s_2) \hat{b}^-(y, s_2) \hat{b}^-(x, s_1) + \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \iiint dx dy dz (V(x, y) + V(x, z)) \hat{b}^+(x, s) \hat{B}^+(y, z) \hat{B}^-(y, z) \hat{b}^-(x, s) + \\ & + \iint dx dy V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^-(x, y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \iiint \int dx dy dz dw V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^+(z, w) \times \\
& \times (\hat{B}^-(y, w) \hat{B}^-(x, z) + \hat{B}^-(w, y) \hat{B}^-(z, x) + \\
& + \hat{B}^-(y, z) \hat{B}^-(w, x) + \hat{B}^-(z, y) \hat{B}^-(x, w)).
\end{aligned} \tag{27}$$

Если в выражениях (26), (27) положить операторы $\hat{B}^\pm(x, y)$, $\hat{b}^\pm(x, y)$ c -числами, то получится (истинный) символ, который отвечает асимптотике в термодинамическом пределе.

4. СЛУЧАЙ ЧЕТНОГО ЧИСЛА НЕЙТРОНОВ

Рассмотрим систему N тождественных бозонов массы m , которые находятся на торе $\mathbf{T}$, диаметры которого равны L_1, L_2, L_2 . Будем считать, что бозоны взаимодействуют между собой и потенциал взаимодействия имеет вид

$$V(N^{1/3}(x - y)), \tag{28}$$

где $V(\xi)$ – финитная четная функция, x, y – координаты бозонов на торе $\mathbf{T}$. Граничные условия вдоль стороны L_1 будем считать периодическими, а вдоль L_2 наложим условия равенства производных нулю. Отметим, что потенциал взаимодействия (28) зависит от N так, что его радиус уменьшается с увеличением числа частиц N , при этом в среднем число частиц, с которыми взаимодействует одна частица, остается постоянным.

При ультравторичном квантовании по парам рассматриваемой бозонной системе соответствует ультравторично-квантованный оператор $\widehat{\widehat{H}}$, явный вид которого приведен в (24). Как обсуждалось выше, для этого ультравторично-квантованного оператора имеет место тождество

$$\widehat{\widehat{H}} = \widehat{\widehat{E}} \widehat{A}, \tag{29}$$

где $\widehat{\widehat{E}}$ – ультравторично-квантованный единичный оператор, а $\widehat{A}$ – оператор в пространстве ультравторичного квантования. Нетрудно убедиться, что тождеству (29) удовлетворяет оператор следующего вида:

$$\begin{aligned}
\widehat{A} = & \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + V(N^{1/3}(x - y)) \right) \hat{B}^-(x, y) + \\
& + 2 \iiint \int dx dy dx' dy' V(N^{1/3}(x - y)) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^+(x', y') \hat{B}^-(x, x') \hat{B}^-(y, y'),
\end{aligned} \tag{30}$$

где $\hat{B}^+(x, y)$ и $\hat{B}^-(x, y)$ – соответственно бозонные операторы рождения и уничтожения пары частиц в фоковском пространстве ультравторичного квантования. В силу тождества (29) для нахождения асимптотики спектра рассматриваемой бозонной системы в пределе при $N \rightarrow \infty$ нужно найти соответствующую асимптотику для оператора (30).

Так как функция (28), умноженная на N , в пределе при $N \rightarrow \infty$ в слабом смысле сходится к дельта-функции Дирака, то в операторе (30) при втором слагаемом в этом

предельном случае стоит малый параметр $1/N$. Это означает, что для нахождения асимптотики собственных значений и собственных функций оператора $\hat{A}$ можно применить квазиклассические методы, развитые в [4]. Асимптотика собственных значений и собственных функций определяется символом оператора (30), этот символ является истинным символом ультравторично-квантованной задачи. Истинным символом, соответствующим оператору (30), является следующий функционал, определенный для пары функций $\Phi^+(x, y)$ и $\Phi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi^+(\cdot), \Phi(\cdot)] = & \iint dx dy \Phi^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \right) \Phi(x, y) + \\ & + 2 \iiint dx dy dx' dy' (NV(N^{1/3}(x-y))) \Phi^+(x, y) \Phi^+(x', y') \Phi(x, x') \Phi(y, y'). \end{aligned} \quad (31)$$

Из закона сохранения числа частиц в системе следует условие для функций $\Phi^+(x, y)$ и $\Phi(x, y)$

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y) \Phi(x, y) = \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Согласно асимптотическим методам [4] каждому решению системы уравнений

$$\Omega \Phi(x, y) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi^+(x, y)}, \quad \Omega \Phi^+(x, y) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi(x, y)}, \quad (33)$$

удовлетворяющему также условию (32), в пределе при $N \rightarrow \infty$ соответствует асимптотическая серия собственных функций и собственных значений оператора (30). Из явного вида истинного символа (31) следует, что система уравнений (33) записывается как

$$\begin{aligned} \Omega \Phi(x, y) = & -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \Phi(x, y) + \\ & + \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x-y)) + NV(N^{1/3}(x'-y'))) \Phi^+(x', y') \Phi(x, x') \Phi(y, y'), \\ \Omega \Phi^+(x, y) = & -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) \Phi^+(x, y) + \\ & + 2 \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x-x')) + NV(N^{1/3}(y-y'))) \Phi(x', y') \Phi^+(x, x') \Phi^+(y, y'). \end{aligned}$$

Пусть v_q – коэффициенты разложения в ряд Фурье на торе (L_1, L_2, L_2) потенциала $NV(N^{1/3}x)$:

$$v_q = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbf{T}} e^{-iqx} NV(\sqrt[3]{N}x) dx, \quad v_{-q} = v_q. \quad (34)$$

Точным решением системы (34) будут следующие функции:

$$\Phi_{k_1, k_2}^+ = \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik_1(x+y)} \cos(k_2(x-y)), \quad (35)$$

$$\Phi_{k_1, k_2} = \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{k_2, l} e^{ik_1(x+y)} e^{il(x-y)} \quad (36)$$

с собственным значением

$$\Omega = \frac{h^2}{m}(k_1^2 + k_2^2) + v_0 + v_{2k_2}, \quad (37)$$

где функция $\varphi_{k_2, l}$ имеет вид

$$\varphi_{k_2, l} = \begin{cases} -\frac{b_l}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_l^2 - 1}, & l^2 > k_2^2, \\ -\frac{b_l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b_l^2 - 1}, & l^2 < k_2^2, \\ \frac{1}{2}, & l = k_2, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$b_l = \frac{(h^2/m)(l^2 - k_2^2) - (v_0 + v_{2k_2})}{v_{l-k_2} + v_{l+k_2}},$$

причем $b_l = b_{-l}$, $\varphi_{k_2, l} = \varphi_{k_2, -l}$ (если $V(\xi) \rightarrow 0$, то $\varphi_{k_2, l} \rightarrow 0$). Векторы k_1 , k_2 играют роль параметров, нумерующих различные решения этой системы; вектор $\hbar k_1/m$ равен скорости течения бозонной системы вдоль капилляра, вектор k_2 – волновой вектор поперечной моды.

Отметим, что $b_l \rightarrow \infty$ при $|l| \rightarrow \infty$, поскольку

$$|v_l| = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{N\mathbf{T}} e^{-il\xi/N} V(\xi) d\xi \leq \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{N\mathbf{T}} |V(\xi)| d\xi < \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbb{R}^3} |V(\xi)| d\xi \quad (39)$$

(здесь $N\mathbf{T}$ – тор с диаметрами NL_1 , NL_2 , NL_2), а следовательно,

$$\varphi_{k, l} \cong \frac{1}{b_l^2}, \quad (40)$$

и, значит, ряд (36) сходится абсолютно.

Разобьем ряд (36) на две части: суммы по $l \leq N^{1/6}$ и по $l > N^{1/6}$. Члены в первой сумме при $N \rightarrow \infty$ сходятся с точностью до $(N^{-1/6})$ к

$$\begin{aligned} b_l &\rightarrow \frac{h^2(l^2 - k_2^2)}{2mV_0} - 1 \stackrel{\text{def}}{=} b_l^0, \\ \varphi_{k_2, l} &\rightarrow -\frac{b_l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b_l^2 - 1} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{k_2, l}^0. \end{aligned} \quad (41)$$

Это легко получается после замены в (34) вида $\sqrt[3]{N}x = \xi$.

Вторая сумма стремится к нулю в силу (40) как $O(N^{-1/6})$. Следовательно, в пределе при $N \rightarrow \infty$ система уравнений (34), дополненная условием (32), имеет при $k_1 = 0$ следующее семейство решений:

$$\begin{aligned} \Phi_k^+(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \cos(k(x - y)), \\ \Phi_k(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_l \varphi_{k, l} e^{il(x - y)}, \end{aligned} \quad (42)$$

где k и l – трехмерные векторы вида $2\pi(0, n_2/L_2, n_3/L_2)$, n_2, n_3 – целые числа, $\varphi_{k,l}$ в формуле (38) в этом случае принимают вид

$$\varphi_{k_2,l}^0 = \frac{1}{2V_0} \left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_2^2 - l^2) + V_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_2^2 - l^2) + V_0 \right)^2 - V_0^2} \right), \quad (43)$$

где выбирается знак плюс в силу правила отбора; наконец, V_0 здесь обозначает величину

$$V_0 = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbb{R}^3} dx V(x). \quad (44)$$

Вектор k в формулах (42) играет роль параметра, нумерующего различные решения системы уравнений (34), (32). Решения (42) представляют собой стоячие волны, и им соответствуют серии, в которых нет течения.

Главный член асимптотики собственных значений серии, соответствующей решению (35), (36), равен значению символа (31) на этих функциях, умноженному на N :

$$E_{k_1,k_2} = N \left(\frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2)}{2m} + \frac{V_0}{2} \right). \quad (45)$$

Асимптотика собственных значений и собственных функций, в частности следующие после E_{k_1,k_2} члены, помимо системы уравнений (34) определяется также решениями системы уравнений в вариациях для системы уравнений Гамильтона. Система уравнений в вариациях для (34) имеет вид

$$\begin{aligned} (\Omega - \lambda)F(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)F(x, y) + \\ &+ 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x - y)) + V(\sqrt[3]{N}(x' - y'))) \times \\ &\times (G(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y, y') + \Phi^+(x', y')F(x, x')\Phi(y, y') + \\ &+ \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')F(y, y')), \\ (\Omega + \lambda)G(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)G(x, y) + \\ &+ 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x - x')) + V(\sqrt[3]{N}(y - y'))) \times \\ &\times (F(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y, y') + \Phi(x', y')G(x, x')\Phi^+(y, y') + \\ &+ \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')G(y, y')). \end{aligned} \quad (46)$$

Для нахождения спектра квазичастиц из всех решений системы уравнений в вариациях необходимо выделить те, которые удовлетворяют определенному в [20] правилу отбора для комплексного ростка для несамосопряженных операторов с действительным спектром.

Если $k_2 = 0$, то соответствующая этому решению асимптотическая серия является боголюбовской серией, отвечающей скорости течения $\hbar k_1/m$. Спектр квазичастиц этой серии выражается известной формулой

$$\lambda_l = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + V_0 \right)^2 - V_0^2} - \frac{\hbar^2 l k_1}{m}. \quad (47)$$

Рассмотрим случай $k_2 \neq 0$. Подставим решения (35), (36) в (46) и учтем симметрию. Тогда получим, что решения системы уравнений в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_l(x, y) &= u_{1,l}(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y} + e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}) + \\
 &\quad + u_{2,l}(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y} + e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}), \\
 F_l(x, y) &= -v_{1,l}(e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y} + e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x}) - \\
 &\quad - v_{2,l}(e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y} + e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x}) + \\
 &\quad + \sum_{l' \neq l, l+2k_2} w_{l,l'}(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y} + e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}),
 \end{aligned} \tag{48}$$

где $l \neq -k_2$, а числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$ определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в стандартном виде

$$\tilde{\lambda}X = MX, \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda} &= \lambda + \frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l), \quad X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix}, \\
 M &= \begin{pmatrix} B_l & V_0 & -V_0 & 0 \\ V_0 & B_{l+2k_2} & 0 & -V_0 \\ 4V_0\varphi_{k_2,l} & 2V_0(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & -B_l & -V_0 \\ 2V_0(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & 4V_0\varphi_{k_2,l+2k_2} & -V_0 & -B_{l+2k_2} \end{pmatrix}, \\
 B_l &= \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + 2V_0\varphi_{k_2,l}.
 \end{aligned}$$

Матрицу M можно представить в виде блочной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} C & -V_0E \\ D & -C \end{pmatrix},$$

состоящей из (2×2) -матриц

$$C = \begin{pmatrix} B_l & V_0 \\ V_0 & B_{l+2k_2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4V_0\varphi_{k_2,l} & 2V_0(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) \\ 2V_0(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & 4V_0\varphi_{k_2,l+2k_2} \end{pmatrix}$$

и единичной матрицы E .

Такое представление позволяет записать уравнение (49) в виде

$$\tilde{\lambda}^2 u = (C^2 - V_0D)u$$

для вектор-столбца $u = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \end{pmatrix}$.

Правила отбора для решений (48) системы уравнений в вариациях [1] выделяют первую серию собственных значений из нижеприведенных:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l) + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{k_2^4 + \frac{l^4}{2} + \frac{l_1^4}{2} - k_2^2(l^2 + l_1^2) + \frac{1}{2}(l^2 + l_1^2 - 2k_2^2)\sqrt{(l^2 - l_1^2)^2 + \left(\frac{4mV_0}{\hbar^2}\right)^2}}, \\ \lambda_{2,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l) \pm \\ &\pm \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{k_2^4 + \frac{l^4}{2} + \frac{l_1^4}{2} - k_2^2(l^2 + l_1^2) - \frac{1}{2}(l^2 + l_1^2 - 2k_2^2)\sqrt{(l^2 - l_1^2)^2 + \left(\frac{4mV_0}{\hbar^2}\right)^2}},\end{aligned}\quad (50)$$

где $l_1 = l + 2k_2$ и $l \neq k_2$.

Формулы (50) при $l \neq -k_2$ задают спектр квазичастиц серии, отвечающей решениям (35), (36). Из явного вида (50) после применения правил отбора для комплексного ростка в несамосопряженной ситуации [20] следует, что в спектре квазичастиц присутствуют только положительные значения. Следовательно, серия, соответствующая гладкому решению (35), (36) при $k_2 \neq 0$, является метастабильной. Будем считать далее, что $L_1 \gg L_2$. Рассмотрим боголюбовскую серию, соответствующую течению вдоль капилляра со скоростью $\hbar k_0/m$, где $k_0 = 2\pi(n_1/L_1, 0, 0)$. Для рассматриваемой системы бозонов главный член асимптотики собственных значений этой серии равен

$$N\left(\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} + \frac{V_0}{2}\right). \quad (51)$$

Допустим теперь, что соотношение между L_1 и L_2 таково, что существует пара векторов $k_1, k = 2\pi(0, n_2/L_2, n_3/L_2)$ такая, что соответствующее ей значение (45) в точности совпадает с главным членом (51). Это означает, что между сверхтекучими состояниями боголюбовской серии и несверхтекучими состояниями неметастабильной серии, соответствующей ветвящимся решениям [12], возможен резонанс. Если L_1 очень велико, резонанс также возможен в случае, когда значение серии, отвечающей ветвящимся решениям, близко к (51) и не обязательно точно с ним совпадает. Существование такого резонанса означает возможность перехода из сверхтекучего состояния в неметастабильное, из которого система перейдет на нижний энергетический уровень, что означает потерю сверхтекучести. Минимальная энергия, отвечающая неметастабильной серии, соответствует случаю $k = 2\pi(0, 1/L_2, 0)$ и согласно формуле (45) равна

$$E_{\min} = N\left(\frac{\hbar^2(2\pi)^2}{2mL_2^2} + \frac{V_0}{2}\right). \quad (52)$$

Сравнивая (52) с (51), получаем, что резонанс невозможен, если скорость течения v по модулю меньше некоторой величины:

$$|v| < v_c(L_2) \equiv \frac{2\pi\hbar}{mL_2} = \frac{h}{mL_2}, \quad (53)$$

что отвечает появлению вихревой нити. Величина $v_c(L_2)$ в правой части неравенства (53) увеличивается с уменьшением толщины капилляра L_2 . Если L_2 меньше величины $2\pi\hbar/(mv_{cL})$, где v_{cL} – критическая скорость Ландау, определяемая из (50) (она существенно больше, чем критическая скорость Ландау, определенная из (47)), и в этом случае сверхтекучесть исчезает при достижении скорости Ландау. Однако при увеличении L_2 резонанс между сверхтекучим и неметастабильным состояниями наступает при скоростях, меньших скорости Ландау, и это объясняет зависимость критической скорости от толщины капилляра.

Поскольку кривая Ландау и квазичастицы Боголюбова, как мы показали в [3], сохраняются в классическом пределе, то все условия остаются справедливыми для классической жидкости, а значит, при условии $v < \hbar/(mL_2)$, где L_2 – диаметр нанотрубки, имеет место математический факт: классическая жидкость в нанотрубке должна быть сверхтекучей.

При конечных l мы получили серии, которые дают затухание. Однако в формуле Боголюбова большие l играют роль, поэтому мы рассмотрим случай больших l . В этом случае V_l при $N \rightarrow \infty$ не сходится к V_0 . Следовательно, уравнения (48), (49) приводят к более точной матрице M , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11} &= B_l + \frac{v_{l-k_2}}{2}, & M_{12} &= M_{21} = \frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2}, \\ M_{13} &= -\frac{v_{l+k_2} + v_{l-k_2}}{2}, & M_{14} &= M_{23} = 0, & M_{22} &= B_{l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \\ M_{24} &= -\frac{v_{l+k_2} + v_{l+3k_2}}{2}, & M_{31} &= 2(v_0 + v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l}, \\ M_{32} &= M_{41} = (v_{2k_2} + v_{l+k_2})(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}), & M_{33} &= -B_l - \frac{v_{l-k_2}}{2}, \\ M_{34} &= M_{43} = -\frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2}, & M_{42} &= 2(v_0 + v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2}, \\ M_{44} &= -B_{l+2k_2} - \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \end{aligned}$$

где

$$B_l = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + (v_{l-k_2} + v_{l+k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}.$$

Очевидно, что

$$v_{l+k_2} + v_{l+3k_2} = v_{l-k_2} + v_{l+k_2} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (54)$$

равномерно по l при $l \rightarrow \infty$ (достаточно сделать замену типа (39)). Тогда матрицу M приближенно можно представить в виде блочной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} C & -V_l E \\ D & -C \end{pmatrix},$$

где E – единичная (2×2) -матрица, $V_l = (v_{l-k_2} + v_{l+k_2})/2$. Введем также обозначения $V_l^+ = (v_{l+k_2} + v_{2k_2})/2$, $V_l^- = (v_{l-k_2} + v_0)/2$. Собственные значения, соответствующие

уравнению (49), после применения правил отбора принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1, k_2, l} = & -2ak_1(k_2 + l) + \\ & + \left(\frac{1}{2}(a(l^2 - k_2^2) + V_l - V_l^+)^2 + \frac{1}{2}(a(l_1^2 - k_2^2) + V_l - V_l^+)^2 + V_l^{+2} - V_l^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(a(l_1^2 + l^2 - 2k_2^2) + 2V_l - 2V_l^+) \sqrt{a^2(l_1^2 - l^2)^2 + 4V_l^{+2}} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $a = \hbar^2/(2m)$, $l_1 = l + 2k_2$. В этом случае при $k_2 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1, k_2, l} = & -2ak_1l + ((al^2 + V_l - V_l^+)^2 + V_l^{+2} - V_l^2 + 2(al^2 + V_l - V_l^+)|V_l^+|)^{1/2}, \\ & V_l = v_l, \quad V_l^+ = V_l^- = \frac{v_l + v_0}{2}. \end{aligned}$$

Формально, положив $k_2 = 0$, мы приходим к известной формуле Боголюбова

$$\lambda_{1, l} = -\frac{\hbar^2}{m}k_1l + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l\right)^2 - v_l^2}, \quad (56)$$

где фурье-образ потенциала v_l при $l \gg \sqrt[3]{N}$ стремится к нулю, и тогда основную роль начинает играть кинетический член.

Мы полагаем, что L_2 много больше некоторой стандартной длины, например радиуса электрона r_0 , и хотя $L_1 \gg L_2$, мы можем выбрать достаточно большое целое число n . Иначе говоря, $L_2/r_0 \rightarrow \infty$, $L_1/r_0 \rightarrow \infty$, но вектор $k_1 = (n/L_1, 0, 0)$ конечен, так как $n \rightarrow \infty$. На языке нестандартного анализа это означает следующее: L_2 – бесконечно большое (нестандартное) число, L_1 и n_1 – нестандартные числа более высокого порядка, а $k_1 = (n/L_1, 0, 0)$ – стандартное конечное число. Тогда k_2 равно бесконечно малому (нестандартному) нулю: $k_2 \cong 0$, а k_1 – стандартное число.

5. СЛУЧАЙ НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА НЕЙТРОНОВ

Рассмотрим систему уравнений Гамильтона для фермионов

$$\begin{aligned} \Omega\Phi(x, y) = & -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi(x, y) + \\ & + 2N \iint dx' dy' (V(x - y) + V(x' - y'))\Phi^+(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y', y), \\ \Omega\Phi^+(x, y) = & -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi^+(x, y) + \\ & + 2N \iint dx' dy' (V(x - x') + V(y - y'))\Phi(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y', y). \end{aligned} \quad (57)$$

Функции $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ являются антисимметричными и удовлетворяют условию нормировки (32). Представим потенциал взаимодействия в виде ряда Фурье:

$$NV(x) = \sum_p v_p e^{ipx}, \quad v_p = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int dx NV(x) e^{-ipx}, \quad v_p = v_{-p}. \quad (58)$$

Решение системы уравнений (57), (32) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{k_1, k_2}^+(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik_1(x+y)} \sin(k_2(x-y)), \\ \Phi_{k_1, k_2}(x, y) &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_l \varphi_{k_2, l} e^{il(x-y) + ik_1(x+y)},\end{aligned}\quad (59)$$

где k_1, k_2, l – трехмерные векторы вида $2\pi(n_1/L_1, n_2/L_2, n_3/L_2)$, n_1, n_2, n_3 – целые числа. Числа $\varphi_{k_2, l}$ должны удовлетворять условию $\varphi_{k_2, l} = -\varphi_{k_2, -l}$. После подстановки получаем, что собственное значение равно

$$\Omega = \frac{\hbar^2}{m}(k_1^2 + k_2^2) + v_{2k_2} - v_0,$$

а $\varphi_{k_2, l}$ имеют вид

$$\varphi_{k_2, l} = -\frac{ib_{k_2, l}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - b_{k_2, l}^2}, \quad b_{k_2, l} \equiv \frac{\frac{\hbar^2}{m}(l^2 - k_2^2) + v_0 - v_{2k_2}}{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}.$$

Отметим, что $b_{k_2, l} = -b_{k_2, -l}$. Положим

$$\varphi_{k_2, l} = -\frac{ib_{k_2, l}}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}{|v_{l-k_2} - v_{l+k_2}|} \sqrt{1 - b_{k_2, l}^2}.$$

Тогда $\varphi_{k_2, l}$ будет равно $-\varphi_{k_2, -l}$.

Рассмотрим систему уравнений в вариациях для фермионов

$$\begin{aligned}(\Omega - \lambda)F(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)F(x, y) + \\ &+ 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x-y)) + V(\sqrt[3]{N}(x'-y')) \times \\ &\times r(G(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y', y) + \Phi^+(x', y')F(x, x')\Phi(y', y) + \\ &+ \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')F(y', y)), \\ (\Omega + \lambda)G(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)G(x, y) + \\ &+ 2N \iint dx' dy' (V(\sqrt[3]{N}(x-x')) + V(\sqrt[3]{N}(y-y')) \times \\ &\times (F(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y', y) + \Phi(x', y')G(x, x')\Phi^+(y', y) + \\ &+ \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')G(y', y)).\end{aligned}\quad (60)$$

Решения системы уравнений в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}G_l(x, y) &= u_{1, l}(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y} - e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}) + \\ &+ u_{2, l}(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y} - e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}), \\ F_l(x, y) &= v_{1, l}(e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y} - e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x}) + \\ &+ v_{2, l}(e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y} - e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x}) + \\ &+ \sum_{l' \neq l, l+2k_2} w_{l, l'}(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y} - e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}),\end{aligned}\quad (61)$$

где $l \neq -k_2$, а числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$ определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в стандартном виде (49).

Матрица M имеет элементы

$$\begin{aligned} M_{11} &= B_l + \frac{v_{l-k_2}}{2}, & M_{12} &= M_{21} = \frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2}, \\ M_{13} &= \frac{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}{2}, & M_{14} &= M_{23} = 0, \\ M_{22} &= B_{l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2}, & M_{24} &= \frac{v_{l+3k_2} - v_{l+k_2}}{2}, \\ M_{31} &= 2i(v_{l-k_2} - v_0)\varphi_{k_2,l}, & M_{32} &= M_{41} = i(v_{2k_2} - v_{l+k_2})(\varphi_{k_2,l+2k_2} - \varphi_{k_2,l}), \\ M_{33} &= -B_l - \frac{v_{l-k_2}}{2}, & M_{34} &= M_{43} = -\frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2}, \\ M_{42} &= 2i(v_0 - v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2}, & M_{44} &= -B_{l+2k_2} - \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \end{aligned}$$

где

$$B_l = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + i(v_{l+k_2} - v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}.$$

Собственные значения, соответствующие уравнению (49), при $k_2 \neq 0$ также содержат после применения правил отбора положительные квазичастицы.

При $k_2 = 0$ собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 \pm \frac{\hbar^2 l^2}{2m}, \quad \lambda_{2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 \pm \left| \frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l - v_0 \right|.$$

Это значит, что мы выбираем векторы $k_2 = (0, 1/L_2, 0)$, $k_1 = (n/L_1, 0, 0)$. Если $n \gg 1$, а следовательно, $k_1 \gg k_2$, это значит, что вектор скорости жидкости в основном направлен вдоль трубки. Пусть, как и ранее, $L_1 = \infty$, $L_2 = \infty$, $n = \infty$ – нестандартные числа, $L_1 \gg L_2$, k_1 – стандартное число. Тогда $k_2 \cong 0$, $\varphi_{k_2,l}$ принимает при $k_2 \cong 0$ нестандартные значения. Однако если $0 \leq l \leq \sqrt{k_2}M$, где $M \leq \infty$, т.е. $0 \leq l \leq \infty$, то $\varphi_{k_2,l}$ можно считать стандартным числом. При $k_2 \cong 0$, учитывая правило отбора, мы получаем аналогично формуле (56) в бозонном случае

$$\lambda_{2,l} = -\frac{\hbar^2}{m}lk_1 + \left| \frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l - v_0 \right|. \quad (62)$$

При $|l| \rightarrow 0$ в силу п. 1.2

$$v_l - v_0 \sim -4\pi|l| \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r).$$

а так как $V(r)$ при $r \rightarrow \infty$ – притягивающий потенциал, то

$$-4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^4 V(r) = c > 0.$$

При $l \rightarrow \infty$ выражение под знаком модуля стремится к бесконечности как $\hbar^2 l^2 / (2m)$, так как $v_l \rightarrow \infty$ как $1/|l|^2$. Таким образом, поведение выражения под знаком модуля в (62) аналогично изменению кривой Ландау для бозонов. Критерий для k_1 имеет вид

$$|k_1| \leq \frac{m}{\hbar^2} \min_l \left| \frac{v_l - v_0}{|l|} + \frac{\hbar^2 |l|}{2m} \right|,$$

аналогично критерию Ландау. Разумеется, ограничение (53) здесь также имеет место.

Таким образом, мы видим, что если для возникновения сверхтекучести бозонов важно отталкивание на близких расстояниях, то в сверхтекучести фермионов основную роль играет притяжение на дальних расстояниях. И в том, и в другом случае переход в конденсатное состояние (для пар в ферми-жидкости) является фазовым переходом, не имеющим отношения к сверхтекучести.

Зависимость от температуры будет изучена в другой работе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничение снизу для толщины нанотрубки определяется величиной дальнего действия потенциала взаимодействия.

Благодарности. Автор выражает благодарность Д. С. Голикову за пересчет и проверку всех формул.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [2] Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Избранные труды в трех томах*, т. 2, Наукова думка, Киев, 1970, 210–224.
- [3] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:3 (1995), 401–406.
- [4] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста в многочастичных задачах и задачах квантовой теории поля*, УРСС, М., 2000.
- [5] Л. Д. Ландау, “К теории сверхтекучести”, *Собрание трудов*, т. 2, Наука, М., 1969, 42–46; L. D. Landau, *Phys. Rev.*, **75**:5 (1949), 884–885.
- [6] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Ин-т компьютерных исследований, М., 2001.
- [7] В. П. Маслов, *Фуки, анализ и его прилож.*, **34**:4 (2000), 35–48.
- [8] В. П. Маслов, *УМН*, **55**:6 (2000), 145–146.
- [9] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:3 (2001), 309–321.
- [10] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 55–82.
- [11] В. П. Маслов, *ТМФ*, **132**:3 (2002), 388–398.
- [12] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния*, Наука, М., 1978.
- [13] В. П. Маслов, *ТМФ*, **143**:3 (2005), 307–327.
- [14] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 369–378.
- [15] В. П. Маслов, *ДАН СССР*, **151**:2 (1963), 306–309.
- [16] В. П. Маслов, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 261–277.
- [17] В. П. Маслов, *ТМФ*, **125**:2 (2000), 297–314.
- [18] В. П. Маслов, *ТМФ*, **129**:3 (2001), 464–490.
- [19] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.
- [20] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.