Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Поведение плазмы с частотой столкновений, пропорциональной скорости электронов, во внешнем электрическом поле, *ТМФ*, 2007, том 153, номер 3, 409–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:32:40

© 2007 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ПОВЕДЕНИЕ ПЛАЗМЫ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ, ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Аналитически решена задача о поведении газовой плазмы в полупространстве с использованием кинетического уравнения с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости электронов. Плазма находится во внешнем переменном электрическом поле. В качестве граничного условия используется зеркальное отражение электронов от границы плазмы. Решение используется для нахождения экранированного электрического поля.

Ключевые слова: столкновительная плазма, полупространство, зеркальное отражение, уравнения Власова–Максвелла.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о поведении бесстолкновительной газовой плазмы (см. [1]) в полупространстве, находящемся во внешнем продольном (перпендикулярно поверхности) электрическом поле, для случая чисто зеркального отражения электронов от границы рассматривалась Ландау [2]. Более общий случай граничных условий рассмотрен в работе [3], где проводился анализ электрического поля на большом расстоянии от границы плазмы.

Аналитическое решение этой задачи представлено в наших работах [4]–[7]. В [4], [5] рассматривалась максвелловская плазма, а в [6], [7] – вырожденная, причем в [4], [6] рассматривались зеркальные граничные условия, а в [5], [7] – диффузные. В работе [2] рассматривался бесстолкновительный случай, а в работах [4]–[7] частота столкновений электронов считалась постоянной.

В работе [8] для описания поведения плазмы использовалось кинетическое уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости электронов, и было получено аналитическое решение задачи о скин-эффекте. В настоящей работе

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

это уравнение используется для изучения поведения плазмы в полупространстве, находящемся во внешнем переменном электрическом поле $\mathbf{E}_1$. Откликом ионов на внешнее электрическое поле мы пренебрегаем [9].

Для описания функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ будем использовать кинетическое уравнение Власова [10] с самосогласованным электрическим полем и с интегралом столкновений в форме Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) с эффективной частотой столкновений электронов с частицами плазмы, пропорциональной модулю скорости электронов [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{v}{l} (f_* - f), \quad (1.1)$$

где e_0 – заряд электрона, f_* – максвелловская функция распределения,

$$f_* = f_*(v) = n_*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T},$$

l – длина свободного пробега электронов, k_B – постоянная Больцмана, m – масса электрона, n_* – параметр, определяемый из закона сохранения числа частиц, $\mathbf{v}$ – скорость электрона, $\mathbf{p}$ – его импульс, T – температура плазмы, которая считается постоянной, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – самосогласованное электрическое поле внутри плазмы. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ внутри плазмы удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e_0 \int (f - f_0) d^3 v, \quad (1.2)$$

где $f_0 = f_0(v) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} e^{-\beta v^2}$ – абсолютный максвеллиан, соответствующий равновесному распределению электронов в отсутствие внешнего электрического поля.

Пусть максвелловская плазма занимает полупространство $x > 0$, ось x направлена перпендикулярно границе вглубь плазмы. Плазма находится во внешнем переменном электрическом поле $\mathbf{E}_1 = (E_0 e^{-i\omega t}, 0, 0)$. Ввиду того что внешнее электрическое поле имеет одну ненулевую x -компоненту, зависимость функции распределения электронов от радиус-вектора $\mathbf{r}$ сводится к зависимости от координаты x : $f = f(x, \mathbf{v}, t)$. По этой же причине электрическое поле внутри плазмы имеет вид $\mathbf{E}(x, t) = (E(x) e^{-i\omega t}, 0, 0)$.

Теперь зададим граничные условия для уравнений (1.1) и (1.2). Рассеяние электронов на границе плазмы будем предполагать чисто зеркальным, т.е.

$$f(0, v_x, v_y, v_z, t) = f(0, -v_x, v_y, v_z, t), \quad v_x > 0. \quad (1.3)$$

Кроме того, на границе плазмы величина самосогласованного электрического поля совпадает с величиной внешнего поля, т.е.

$$E(0) = E_0. \quad (1.4)$$

Предположим, что напряженность электрического поля такова, что применимо линейное приближение [11]. Тогда функция распределения может быть представлена в виде

$$f = f_0(v) + f_1(x, \mathbf{v}, t), \quad (1.5)$$

где $f_1(x, \mathbf{v}, t)$ – линейное отклонение относительно абсолютного максвеллиана. В линейном приближении

$$f_* = f_0 + \frac{\delta n_*}{n_0} f_0, \quad \delta n_* = n_* - n_0,$$

$$\mathbf{E}(x, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{E}(x, t) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = -f_0 \frac{v_x E(x) e^{-i\omega t}}{k_B T}.$$

С помощью (1.5) уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e_0 v_x}{k_B T} E(x) f_0(v) e^{-i\omega t} = \frac{v}{l} \left(\frac{\delta n_*}{n_0} f_0(v) - f_1(x, \mathbf{v}, t) \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} e^{-i\omega t} = 4\pi e_0 \int f_1(x, \mathbf{v}, t) d^3 v. \quad (1.7)$$

Величину $\delta n_*/n_0$ найдем из закона сохранения числа частиц,

$$\int v(f_* - f) d^3 v \equiv \int v \left(\frac{\delta n_*}{n_0} f_0(v) - f_1(x, \mathbf{v}, t) \right) d^3 v = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta n_*}{n_0} \int v f_0(v) d^3 v = \int v f_1(x, \mathbf{v}, t) d^3 v.$$

Замечая, что

$$\int v f_0(v) d^3 v = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}},$$

вместо (1.6) получаем следующее кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{v}{l} f_1(x, \mathbf{v}, t) &= \\ &= \frac{e_0 v_x}{k_B T} E(x) f_0(v) e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{\beta} v}{2\pi l} f_0(v) \int v' f_1(x, \mathbf{v}', t) d^3 v'. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Граничное условие (1.3) на функцию f согласно (1.5) имеет тот же вид и для функции f_1 :

$$f_1(0, v_x, v_y, v_z, t) = f_1(0, -v_x, v_y, v_z, t), \quad v_x > 0. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.7) и (1.8) видно, что функцию f_1 далее следует искать в виде

$$f_1(x, \mathbf{v}, t) = f_0(v) h(x, \mathbf{v}) e^{-i\omega t}. \quad (1.10)$$

С помощью (1.10) уравнения (1.7) и (1.8) упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{v}{l} - i\omega \right) h(x, \mathbf{v}) = \frac{e_0 v_x}{k_B T} E(x) + \frac{\sqrt{\beta} v}{2\pi l} \int v' f_0(v') h(x, \mathbf{v}') d^3 v', \quad (1.11)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi e_0 \int f_0(v') h(x, \mathbf{v}') d^3 v'. \quad (1.12)$$

Умножим обе части (1.11) на $l\sqrt{\beta}$ и введем безразмерную координату $x_1 = x/l$, скорость $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$ и безразмерное электрическое поле

$$e(x_1) = \frac{e_0 l}{k_B T} E(x_1). \quad (1.13)$$

Кроме того, в интегралах в (1.11) и (1.12) перейдем к сферической системе координат и, считая, что функция h зависит только от x_1 , μ , C ($\mu = C_x/C$), проинтегрируем по азимуту – углу в плоскости (C_y, C_z) . С использованием безразмерных переменных и равенства (1.13) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu C \frac{\partial h}{\partial x_1} + (C - i\omega_1)h(x_1, \mu, C) &= \frac{e_0 l \mu C}{k_B T} e(x_1) + \\ &+ C \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^3 h(x_1, \mu', C') d\mu' dC', \quad (1.14) \\ \frac{de(x_1)}{dx_1} &= \frac{4\omega_{1p}^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^2 h(x_1, \mu', C') d\mu' dC', \end{aligned}$$

где $\omega_{1p} = l\sqrt{\beta}\omega_p$, $\omega_1 = \omega l\sqrt{\beta}$ – безразмерная плазменная частота и частота внешнего электрического поля, соответственно, ω_p – плазменная частота, $\omega_p^2 = 4\pi e_0^2 n_0/m$.

Далее безразмерную координату x_1 будем снова обозначать через x . Получаем следующую систему уравнений:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + \left(1 - i\frac{\omega}{C}\right)h(x, \mu, C) = \mu e(x) + \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^3 h(x, \mu', C') d\mu' dC', \quad (1.15)$$

$$\frac{de(x)}{dx} = \varkappa^2 \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^2 h(x, \mu', C') d\mu' dC', \quad (1.16)$$

где $\varkappa^2 = 4\omega_{1p}^2/\sqrt{\pi}$.

Зеркальное отражение электронов от границы (1.9) согласно (1.10) означает, что

$$h(0, \mu, C) = h(0, -\mu, C), \quad \mu > 0. \quad (1.17)$$

Условие на электрическое поле (1.4) согласно (1.13) имеет вид

$$e(0) = e_s, \quad (1.18)$$

где $e_s = e_0 l E_0 / (k_B T)$ – заданная величина.

Итак, исходная задача о поведении плазмы в полупространстве состоит в решении уравнений (1.15) и (1.16) с граничными условиями (1.17) и (1.18). Представим уравнение (1.16) в виде, который включает соответствующее граничное условие (1.18):

$$\frac{de(x)}{dx} = \varkappa^2 \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^2 h(x, \mu', C') d\mu' dC' + 2e(0)\delta(x), \quad (1.19)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение системы (1.15), (1.19) ищем в виде интегралов Фурье:

$$h(x, \mu, C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu, C) dk, \quad (2.1)$$

$$e(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk. \quad (2.2)$$

Подставим эти соотношения в уравнения (1.15) и (1.19) и получим систему характеристических уравнений:

$$\left(1 - \frac{i\omega_1}{C} + ik\mu\right) \Phi(k, \mu, C) = \mu E(k) + n_1(k), \quad (2.3)$$

$$ikE(k) = \varkappa^2 n_0(k) + 2e(0), \quad (2.4)$$

где $n_0(k)$ и $n_1(k)$ – нулевой и первый моменты спектральной плотности $\Phi(k, \mu, C)$,

$$n_m(k) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-C'^2} C'^{m+2} \Phi(k, \mu', C') d\mu' dC', \quad m = 0, 1. \quad (2.5)$$

Подставим $E(k)$ из (2.4) в (2.3). Получаем уравнение, из которого находим

$$\Phi(k, \mu, C) = -\frac{i\varkappa^2 \mu n_0(k) + 2i\mu e(0) - kn_1(k)}{k(1 - i\omega_1/C + ik\mu)}. \quad (2.6)$$

Теперь воспользуемся определением моментов (2.5). Подставим (2.6) в (2.5) и получим систему дисперсионных уравнений:

$$n_0(k)(k + i\varkappa^2 T_{10}(k)) - n_1(k)kT_{00}(k) = -2ie(0)T_{10}(k),$$

$$n_0(k)i\varkappa^2 T_{11}(k) + kn_1(k)(1 - T_{01}(k)) = -2ie(0)T_{11}(k),$$

где

$$T_{ml}(k) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \frac{e^{-C^2} \mu^m C^{l+2}}{1 - i\omega_1/C + ik\mu} d\mu' dC', \quad m = 0, 1, \quad l = 0, 1.$$

Из системы дисперсионных уравнений получаем

$$n_0(k) = -2ie(0) \frac{T_{10}(k)(1 - T_{10}(k)) + T_{00}(k)T_{11}(k)}{k(1 - T_{01}(k)) + i\varkappa^2(T_{10}(k) + D(k))},$$

$$n_1(k) = -2ie(0) \frac{T_{11}(k)}{k(1 - T_{01}(k)) + i\varkappa^2(T_{10}(k) + D(k))},$$

где

$$D(k) = T_{00}(k)T_{11}(k) - T_{01}(k)T_{10}(k).$$

Найдем $E(k)$ и $\Phi(k, \mu, C)$. Имеем

$$E(k) = -\frac{2ie(0)}{\Lambda(k)}, \quad (2.7)$$

$$\Phi(k, \mu, C) = \frac{E(k)}{1 - i\omega_1/C + ik\mu} \left[\mu + \frac{T_{11}(k)}{1 - T_{01}(k)} \right],$$

где $\Lambda(k)$ – дисперсионная функция,

$$\Lambda(k) = k + i\mathcal{K}^2 \left[T_{10}(k) + \frac{T_{00}(k)T_{11}(k)}{1 - T_{01}(k)} \right].$$

Теперь решение системы (1.15), (1.19) найдем в виде интегралов Фурье, подставляя (2.7) в равенства (2.1) и (2.2):

$$h(x, \mu, C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k)}{1 - i\omega_1/C + ik\mu} \left[\mu + \frac{T_{11}(k)}{1 - T_{01}(k)} \right] dk, \quad (2.8)$$

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\Lambda(k)} dk. \quad (2.9)$$

В интегралах $T_{mn}(k)$, входящих в выражения (2.8) и (2.9), можно вычислить внутренние интегралы. Выделим действительную и мнимую части в первом интеграле:

$$J_0(C, k) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 - i\omega_1/C + ik\mu} = L_1(C, k) - iL_2(C, k),$$

где

$$\begin{aligned} L_1(C, k) &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(k - \frac{\omega_1}{C} \right) + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(k + \frac{\omega_1}{C} \right), \\ L_2(C, k) &= \frac{1}{2k} \ln \frac{1 + (k - \omega_1/C)^2}{1 + (k + \omega_1/C)^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для второго интеграла

$$J_1(C, k) = \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{1 + ik\mu - i\omega_1/C} = M_1 - iM_2$$

также найдем действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} M_1(C, k) &= \frac{1}{k} \left(L_2(C, k) + \frac{\omega_1}{C} L_1(C, k) \right), \\ M_2(C, k) &= \frac{1}{k} \left(2 - L_1(C, k) + \frac{\omega_1}{C} L_2(C, k) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь интегралы $T_{mn}(k)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{0j}(k) &= \int_0^{\infty} e^{-C^2} C^{2+j} (L_1(C, k) - iL_2(C, k)) dC, \quad j = 0, 1, \\ T_{1j}(k) &= \int_0^{\infty} e^{-C^2} C^{2+j} (M_1(C, k) - iM_2(C, k)) dC, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. МОДЫ ДРУДЕ И ДЕБАЯ

В силу нечетности функции $\Lambda(k)$ ее разложение при малых k ($k \rightarrow 0$) имеет вид $\Lambda(k) = \Lambda'(0)k + \dots$, где

$$\Lambda'(0) = 1 + \frac{2}{3} \mathcal{K}^2 \left[s_0(\omega_1) + \frac{2t_0(\omega_1)s_1(\omega_1)}{1 - 2t_1(\omega_1)} \right], \quad (3.1)$$

причем в (3.1) входят интегралы

$$t_k(\omega_1) = \int_0^\infty \frac{e^{-C^2} C^{k+3}}{C - i\omega_1} dC, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$s_k(\omega_1) = \int_0^\infty \frac{e^{-C^2} C^{k+4}}{(C - i\omega_1)^2} dC, \quad k = 0, 1.$$

Замечая, что

$$1 - 2t_1(\omega_1) = -i\omega_1 2t_0(\omega_1), \quad \omega_1 s_0(\omega_1) + i s_1(\omega_1) = i t_1(\omega_1),$$

преобразуем (3.1) к виду

$$\Lambda'(0) = 1 + i \frac{2\chi^2}{3\omega_1} t_1(\omega_1). \quad (3.2)$$

Теперь распределение электрического поля в полупространстве (2.9) можно представить в виде

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\frac{1}{\Lambda(k)} - \frac{1}{\Lambda'(0)k} \right] dk + \frac{1}{\Lambda'(0)\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} dk,$$

или, вычисляя второй интеграл,

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{1}{\Lambda'(0)} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\frac{1}{\Lambda(k)} - \frac{1}{\Lambda'(0)k} \right] dk. \quad (3.3)$$

Величина $1/\Lambda'(0)$ в (3.3) имеет глубокий физический смысл. Покажем, что величина $\Lambda'(0)$ в точности совпадает с продольной диэлектрической проницаемостью плазмы в пределе $k \rightarrow 0$. В этом случае продольная диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega)$ может быть выражена через высокочастотную диэлектрическую проводимость плазмы, найденную в работе [8]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_0 2t_1(0.75\sqrt{\pi}\omega\tau), \quad (3.4)$$

где σ_0 – статическая проводимость плазмы [9],

$$\sigma_0 = \frac{e_0^2 n_0 \tau}{m}, \quad (3.5)$$

τ – время свободного пробега электронов.

Отметим, что в используемое кинетическое уравнение входит длина свободного пробега электронов l . Связь между величинами l и τ определяется тем требованием, чтобы выражения для статической проводимости, записанные через l и через τ , совпадали. Используемый интеграл столкновений приводит к следующему выражению для статической проводимости [8]:

$$\sigma_0 = \frac{2e_0^2 n_0 k}{3\sqrt{\pi}\beta k_B T}. \quad (3.6)$$

Из сравнения (3.5) и (3.6) получаем связь между l и τ :

$$l = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \tau. \quad (3.7)$$

Введем следующие обозначения соответственно для безразмерной частоты внешнего электрического поля и безразмерной частоты столкновений электронов:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{\omega_p}, \quad \nu = \frac{1}{\tau}. \quad (3.8)$$

Вернемся к доказательству равенства выражений (3.2) и (3.4). Требуется показать, что

$$\frac{8\pi\sigma_0}{\omega} = \frac{2\kappa^2}{3\omega_1}.$$

Используя (3.7), получаем $\omega_1 = \omega\sqrt{\beta}l = 0.75\sqrt{\pi}\omega/\nu$. На основании (3.7) и (3.8) получаем

$$\frac{2\kappa^2}{3\omega_1} = \frac{8\omega_{1p}^2}{3\sqrt{\pi}\omega_1} = \frac{8\omega_p^2(l\sqrt{\beta})}{3\sqrt{\pi}\omega} = \frac{2\omega_p^2}{\omega\nu} = \frac{2}{\gamma\varepsilon}.$$

С другой стороны, учитывая, что $\sigma_0 = \omega_p^2/(4\pi\nu)$, имеем

$$\frac{8\pi\sigma_0}{\omega} = \frac{2\omega_p^2}{\omega\nu} = \frac{2}{\gamma\varepsilon},$$

что и требовалось показать.

Из уравнения (1.15) найдем отвечающую электрическому полю $e_0(x) = e(0)/\Lambda'(0)$ функцию распределения электронов:

$$h_0(x, \mu, C) = \frac{e(0)\mu C}{\Lambda'(0)(C - i\omega_1)}.$$

Таким образом, выделенное частное решение системы Власова–Максвелла имеет следующий вид: $h = h_0(x, \mu, C)$, $e = e_0(x)$. Это частное решение естественно назвать модой Друде (см. [9]). Она описывает объемную проводимость.

Функцию распределения также можно представить в виде, в котором выделена мода Друде:

$$\begin{aligned} \frac{h(x, \mu, C)}{e(0)} &= \frac{\mu C}{(C - i\omega_1)\Lambda'(0)} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + i(k\mu - \omega_1/C)} \left[\mu + \frac{T_{11}(k)}{1 - T_{01}(k)} \right] \left[\frac{1}{\Lambda(k)} - \frac{1}{\Lambda'(0)k} \right] dk. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\Lambda(k)$ нечетная, поэтому распределение электрического поля в полупространстве можно представить в виде

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{1}{\Lambda'(0)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(kx) \left[\frac{1}{\Lambda(k)} - \frac{1}{\Lambda'(0)k} \right] dk. \quad (3.9)$$

Рис. 1. Модуль (а) и аргумент (б) моды Друде вблизи плазменного резонанса. Кривые 1, 2, 3 отвечают соответственно значениям $\varepsilon = 0.001, 0.002, 0.003$.

Отметим, что Ландау [2] выделяет постоянную Друде только у электрического поля.

Подчеркнем, что мода Друде отвечает нулю $k = 0$ дисперсионной функции $\Lambda(k)$. Нетрудно видеть, что дисперсионная функция может иметь еще два конечных комплексных нуля $\pm k_0$ при соответствующих значениях параметра ω_1 . Покажем, например, что в низкочастотном пределе ($\omega \rightarrow 0$) дисперсионная функция имеет два чисто мнимых нуля. В самом деле, при $\omega \approx 0$ на основании (2.10), (2.11) имеем

$$L_1(k) = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} k, \quad L_2(k) = M_1(k) = 0, \quad M_2(k) = \frac{2 - L_1(k)}{k}.$$

Рис. 2. Модуль (а) и аргумент (б) электрического поля.

Используя эти равенства, с учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
 T_{00}(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} L_1(k), & T_{01}(k) &= \frac{1}{2} L_1(k), \\
 T_{10}(k) &= -i \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{2 - L_1(k)}{k}, & T_{11}(k) &= -\frac{i}{2} \frac{2 - L_1(k)}{k}.
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Модуль моды Друде в случае частоты, пропорциональной скорости электронов (кривые 1, 3), и в случае постоянной частоты столкновений (кривые 2, 4). Кривые 1, 2 отвечают случаю $\varepsilon = 0.001$, а кривые 3, 4 – случаю $\varepsilon = 0.003$.

Обозначим

$$f_0(k) = \frac{\operatorname{arctg} k}{k}, \quad f(k) = 1 - f_0(k).$$

Тогда

$$1 - T_{01}(k) = 1 - f_0(k) = f(k), \quad T_{10}(k) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{f(k)}{k}, \quad T_{11}(k) = -i \frac{f(k)}{k}.$$

Следовательно, выражение для дисперсионной функции в низкочастотном пределе принимает вид

$$\Lambda(k) = k + \varkappa^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2k} [f(k) + f_0(k)] = k + \frac{\sqrt{\pi} \varkappa^2}{2k},$$

или

$$\Lambda(k) = k + \frac{2\omega_{1p}^2}{k} = k + \frac{9\pi\omega_p^2}{8\nu^2 k} = k + \frac{9\pi}{8k\varepsilon^2}.$$

Значит, дисперсионное уравнение имеет два чисто мнимых нуля $\pm k_0$, причем $k_0 = 3i\sqrt{\pi}/(2\sqrt{2}\varepsilon)$, $\varepsilon = \nu/\omega_p$.

В окрестности нуля k_0 для дисперсионной функции имеем $\Lambda(k) = \Lambda'(k_0)(k - k_0)$, $k \rightarrow k_0$. Согласно лемме Жордана с учетом того, что в рассматриваемой задаче $x > 0$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - k_0} dk = e^{ik_0 x}, \quad \operatorname{Im} k_0 > 0.$$

Таким образом, для распределения электрического поля в полупространстве (3.9) получено следующее выражение:

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{1}{\Lambda'(0)} + \frac{2e^{ik_0x}}{\Lambda'(k_0)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \left[\frac{1}{\Lambda(k)} - \frac{1}{\Lambda'(0)k} - \frac{1}{\Lambda'(k_0)(k - k_0)} \right] dk. \quad (3.10)$$

Нулю k_0 отвечает следующее решение исходной системы (1.15), (1.16):

$$e_{k_0}(x) = \frac{2e(0)e^{ik_0x}}{\Lambda'(k_0)}, \quad h_{k_0}(x, \mu, C) = e^{ik_0x} \Phi(k_0, \mu, C),$$

где

$$\Phi(k_0, \mu, C) = \frac{2e(0)}{\Lambda'(k_0)(1 + ik_0\mu - i\omega_1/C)} \left[\mu + \frac{T_{11}(k_0)}{1 - T_{01}(k_0)} \right].$$

Решение, отвечающее нулю k_0 , естественно назвать решением Дебая. Это решение описывает экранированное электрическое поле в плазме.

Функцию распределения электронов с помощью моды Дебая аналогично (3.10) можно представить в следующем виде:

$$\frac{h(x, \mu, C)}{e(0)} = \Phi_0(\mu, C) + e^{ik_0x} \Phi(k_0, \mu, C) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \left[\Phi(k, \mu, C) - \frac{\Phi_0(\mu, C)}{k} - \frac{\Phi(k_0, \mu, C)}{k - k_0} \right] dk,$$

где

$$\Phi_0(\mu, C) = \Phi(0, \mu, C) = \frac{\mu C}{\Lambda'(0)(C - i\omega_1)}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые поставлена и аналитически решена задача о поведении в полупространстве столкновительной плазмы с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости электронов. Выявлена структура экранированного электрического поля в плазме и функции распределения электронов.

На рис. 1 представлены графики зависимости модуля и аргумента относительной моды Друде $E_{-1} = E_{-1}(\gamma, \varepsilon)$, $E_{-1}(\gamma, \varepsilon) = 1/\Lambda'(0, \gamma, \varepsilon)$ вблизи плазменного резонанса ($\omega \approx \omega_p$) от величины $\gamma = \omega/\omega_p$. Модуль моды резко возрастает при $\omega = \omega_p$, его значение тем больше, чем меньше значение параметра $\varepsilon = \nu/\omega_p$. Аргумент моды при этом меняется от $-\pi$ до 0.

На рис. 2 представлены графики профилей модуля электрического поля и его аргумента в полупространстве $x > 0$ при $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.5$. При возрастании координаты x графики асимптотически “выходят” на значения, равные соответственно модулю и аргументу постоянной Друде.

Для сравнения поведения плазмы в случаях постоянной и переменной частоты столкновений приведен рис. 3, на котором изображен модуль моды Друде в случае

частоты, пропорциональной скорости электронов $e_v(\gamma, \varepsilon) = E_{-1}(\gamma, \varepsilon)$ (кривые 1, 3), и в случае постоянной частоты столкновений (см. [4], [5])

$$e_c(\gamma, \varepsilon) = \frac{\gamma(\gamma + i\varepsilon)}{2(\gamma - 1) + i\varepsilon + (\gamma - 1)(\gamma - 1 + i\varepsilon)}$$

(кривые 2, 4).

Для количественного описания различия рассматриваемых случаев введем функцию относительного отклонения

$$O(\gamma, \varepsilon) = \frac{e_c(\gamma, \varepsilon) - e_v(\gamma, \varepsilon)}{e_v(\gamma, \varepsilon)} \cdot 100\%.$$

Наибольшее различие случаев постоянной и переменной частоты столкновений наблюдается на плазменном резонансе, т.е. при $\omega = \omega_p$ ($\gamma = 1$). В этой ситуации отклонение мало зависит от ε (при малых ε). Так, $O(1, 0.001) = O(1, 0.003) = 13.2\%$. Однако уже при $\gamma = 1.001$, т.е. при $\omega = 1.001\omega_p$, имеем $O(1.001, 0.001) = 2.8\%$, а $O(1.001, 0.003) = 9.3\%$. При дальнейшем увеличении γ наблюдается уменьшение функции отклонения. Так, $O(1.01, 0.001) = 0.036\%$, $O(1.01, 0.003) = 0.317\%$.

Список литературы

- [1] А. А. Власов, *ЖЭТФ*, **8:3** (1938), 291.
- [2] Л. Д. Ландау, "О колебаниях электронной плазмы", *Собрание трудов*, т. 2, Наука, М., 1969, 7; *ЖЭТФ*, **16** (1946), 547.
- [3] В. М. Гохфельд, М. А. Гулянский, М. И. Каганов, А. Г. Плявенек, *ЖЭТФ*, **89:3(9)** (1985), 985.
- [4] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Изв. РАН. Сер. МЖГ*, 2006, № 1, 165.
- [5] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ЖВМиМФ*, **47:1** (2007), 121.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **147:3** (2006), 487.
- [7] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ФТТ*, **48:12** (2006), 2113.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Физика плазмы*, **32:11** (2006), 1021.
- [9] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, М., 1961.
- [10] В. В. Веденяпин, *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001.
- [11] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.

Поступила в редакцию 28.12.2006,
после доработки 26.03.2007