Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, Теория возмущений со сходящимися рядами для вычисления величин, заданных конечным числом членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 3, 452–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:01:31

© 2000 г. В.В. Белокуров*, Ю.П. Соловьев*, Е.Т. Шавгулидзе*

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ РАСХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА ТРАДИЦИОННОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предложен новый метод вычисления с высокой точностью физических величин, для которых известно лишь конечное число членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений. Метод основан на возможности приблизить вычисляемую величину суммой конечного числа членов некоторого абсолютно сходящегося ряда. В качестве примера вычислены β -функция в модели φ_4^4 и критический показатель α для поведения теплоемкости He^4 вблизи точки фазового перехода.

1. Традиционная квантово-полевая теория возмущений оперирует расходящимися рядами, которые представляют собой асимптотические разложения в области малых значений констант связи [1]. Для некоторых задач, в которых параметр разложения мал, суммирование конечного числа членов ряда традиционной теории возмущений приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментом. В целом же вопрос о достоверности информации, получаемой с помощью конечного числа членов ряда теории возмущений при произвольных значениях константы связи, до сих пор оставался открытым.

В случае, когда известна асимптотическая зависимость коэффициентов ряда от порядка теории возмущений, можно попытаться приближенно найти сумму ряда теории возмущений. Для этой цели обычно используется метод Бореля или его модификации [1, 2]. Проблема, однако, состоит в том, что реально известно лишь конечное число членов ряда. Поэтому методом Бореля вычисляют сумму некоторого, вообще говоря, другого ряда, первые члены которого воспроизводят известные (найденные в конкретной квантово-полевой модели) слагаемые и который имеет лишь тот же самый асимптотический рост слагаемых при увеличении порядка теории возмущений. Очевидно, что при этом невозможно даже оценить, насколько точно полученный результат приближает сумму настоящего ряда теории возмущений.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

В этой работе предлагается совершенно иной подход к приближенному вычислению физических величин, представляемых рядами теории возмущений. Основная идея нашего подхода состоит в предположении, что величина, для которой традиционная теория возмущений дает расходящийся ряд, может быть сколь угодно точно приближена суммой некоторого абсолютно сходящегося ряда. Другими словами, для вычисления интересующей нас величины мы предлагаем перейти от традиционной теории возмущений к новой теории возмущений со сходящимися рядами. Для построения сходящегося ряда, соответствующего ряду традиционной теории возмущений, мы предлагаем применить прием, использованный нами в работах [3–7], посвященных вычислениям функциональных интегралов с любой заданной точностью.

Как и в указанных работах, получаемый сходящийся ряд, помимо членов с целыми степенями константы связи g , содержит также слагаемые с дробными степенями g . Кроме того, коэффициенты этого ряда определенным образом зависят от некоторого вспомогательного параметра, который может быть выбран так, чтобы *конечное число* членов нового ряда приближало с высокой точностью искомое значение физической величины.

В пункте 2 приведена схема построения сходящихся рядов новой теории возмущений. Пункт 3 посвящен решению принципиально важной для данного подхода задачи нахождения коэффициентов при дробных степенях константы связи g по известным коэффициентам при целых степенях g . В пункте 4 описана процедура выбора вспомогательного параметра и указан способ определения точности вычислений. Также в этом пункте двумя способами (с помощью четырех и пяти членов ряда традиционной теории возмущений) найдено поведение β -функции в модели φ_4^4 в широком интервале значений константы связи. В пункте 5 приведены результаты вычисления критического показателя α для зависимости теплоемкости He^4 вблизи точки фазового перехода. При вычислении использовано пять известных членов ряда традиционной теории возмущений для аномальной размерности γ_m .

2. Будем рассматривать класс знакопередающихся рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n. \quad (1)$$

Этот класс описывается следующими тремя свойствами:

А. Коэффициенты f_n удовлетворяют условию

$$|f_n| \sim C a^n n^b n! = \tilde{f}_n, \quad (2)$$

где a, b, C – некоторые положительные константы.

Б. Ряд (1) является рядом Тейлора в точке $g = 0$ бесконечно дифференцируемой при $g \geq 0$ функции $f(g)$, допускающей аналитическое продолжение в полуплоскость $\{\text{Re} g > 0\}$ и равномерно по $g \in \{\text{Re} g > 0\}$ удовлетворяющей неравенству

$$\left| f(g) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n g^n \right| < C_1^N N! g^N N^\alpha. \quad (3)$$

При этих условиях функция $f(g)$ единственным образом восстанавливается по ряду (1) [8].

В. Представим функцию $f(g)$ в виде

$$f(g) = \int_0^\infty e^{-gx} F(x) dx, \quad (4)$$

где $F(x)$, вообще говоря, обобщенная функция, и потребуем, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\int_0^\infty x^n |F(x)| dx \leq \text{const} \left| \int_0^\infty x^n F(x) dx \right|, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Типичным примером рядов, принадлежащих рассматриваемому нами классу, являются ряды вида

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a^n n^b n! g^n, \quad (6)$$

где a и b – положительные постоянные. В частности, при $b = 1$ ряду (6) соответствует функция

$$f(g) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{(agt + 1)^2} - \frac{1}{agt + 1} \right] e^{-t} dt,$$

при этом

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{1}{at} \left(\frac{x}{at} - 1 \right) e^{-\frac{x}{at}} e^{-t} dt.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$\left| \int_0^\infty x^n F(x) dx \right| < \int_0^\infty x^n |F(x)| dx < 2 \left| \int_0^\infty x^n F(x) dx \right|, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что неравенство (5) налагает достаточно жесткие условия на рассматриваемые ряды. В частности, в таких рядах нельзя изменить конечное число слагаемых, поскольку неравенство (5) не выполняется для полиномов [9].

Введем функцию

$$\tilde{\varphi}_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^{2m}) e^{-i\rho r} dr, \quad (8)$$

где m – некоторое натуральное число.

Функция $\tilde{\varphi}_m(\rho)$ есть преобразование Фурье функции $\exp(-r^{2m})$. Поэтому входящую в подынтегральное выражение формулы (4) функцию e^{-gx} представим как

$$e^{-gx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_m(\rho) \exp \left\{ i\rho(gx)^{\frac{1}{2m}} \right\} d\rho.$$

Так как функция $\tilde{\varphi}_m(\rho)$ – четная, то

$$e^{-gx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_m(\rho) \cos \left\{ \rho(gx)^{\frac{1}{2m}} \right\} d\rho.$$

В результате представление (4) преобразуется к виду

$$f(g) = \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_m(\rho) \cos \left\{ \rho(gx)^{\frac{1}{2m}} \right\} d\rho \right) F(x) dx. \quad (9)$$

Рассматривая интеграл по ρ в конечных пределах и меняя порядок интегрирования, получим выражение

$$f(g, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}_m(\rho) \left(\int_0^\infty \cos \left\{ \rho(gx)^{\frac{1}{2m}} \right\} F(x) dx \right) d\rho. \quad (10)$$

Очевидно, что $\lim_{R \rightarrow \infty} f(g, R) = f(g)$.

Функция $f(g, R)$ раскладывается в абсолютно сходящийся ряд¹⁾

$$f(g, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} g^{\frac{k}{m}} A_{2k}(m, R) B_{\frac{k}{m}}, \quad (11)$$

где

$$A_{2k}(m, R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2k}}{dr^{2k}} \exp(-r^{2m}) \frac{\sin Rr}{r} dr, \quad (12)$$

$$B_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha F(x) dx. \quad (13)$$

Тем самым задача вычисления функций $f(g, R)$ и $f(g)$ сводится к нахождению коэффициентов $B_{k/m}$.

3. Мы собираемся аппроксимировать значение функции $f(g)$ суммой конечного числа слагаемых

$$f(g, R, N) = \sum_{k=0}^{mN} \frac{1}{(2k)!} g^{\frac{k}{m}} A_{2k}(m, R) B_{\frac{k}{m}}. \quad (14)$$

При этом предполагается, что коэффициенты B_n ($1 \leq n \leq N$) с целыми индексами известны (это – те самые коэффициенты, которые входят в ряд традиционной теории возмущений). А коэффициенты $B_{k/m}$ с нецелыми индексами должны быть найдены каким-то образом по известным значениям B_n ($1 \leq n \leq N$). В данной работе мы предлагаем один из способов приближенного вычисления таких коэффициентов.

Прежде чем перейти к описанию этого способа, сделаем следующее замечание. В сумме (14) из-за различия в знаках каждое следующее слагаемое частично компенсирует вклад предыдущего. Поэтому при достаточно большом числе слагаемых точность приближения оказывается высокой. Для увеличения числа слагаемых в сумме (14) при фиксированном N желательно выбрать число m большим. С другой стороны, при увеличении m ухудшается точность определения коэффициентов $B_{k/m}$. В рассмотренных

¹⁾ Доказательство аналогично приведенному в работе [4].

ниже примерах используются пять коэффициентов B_n традиционной теории возмущений. По нашим оценкам при $N = 5$ оптимальным значением является $m = 4$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $m = 4$. В то же время не будем фиксировать конкретные значения N .

Для вычисления $B_{k/4}$ используем следующий прием. Рассмотрим функцию $\chi(\alpha) = \ln B_\alpha$ и предположим, что $\chi^{(4)}(\alpha) < 1$ (в проведенных ниже расчетах это условие выполняется).

Пусть $\alpha_n = (n - 1/2)/4$. С помощью разложения функции $\chi(\alpha)$ в ряд Тейлора до членов четвертого порядка получим соотношение

$$\chi(\alpha_n) \approx \frac{9}{16} \left[\chi\left(\alpha_n + \frac{1}{8}\right) + \chi\left(\alpha_n - \frac{1}{8}\right) \right] - \frac{1}{16} \left[\chi\left(\alpha_n + \frac{3}{8}\right) + \chi\left(\alpha_n - \frac{3}{8}\right) \right] + \omega,$$

где с учетом сделанного предположения относительно $\chi^{(4)}(\alpha)$ имеем $|\omega| < 2^{-12}$.

Таким образом, с относительной погрешности 2^{-12} получим

$$B_{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})} \approx \left(B_{\frac{n-1}{4}}\right)^{\frac{9}{16}} \left(B_{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{9}{16}} \left(B_{\frac{n-2}{4}}\right)^{-\frac{1}{16}} \left(B_{\frac{n+1}{4}}\right)^{-\frac{1}{16}}. \quad (15)$$

Представим теперь $B_{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})}$ в виде²⁾

$$B_{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})} = C(n) \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{\frac{1}{8}}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^{\frac{k}{4}} \right) F(x) dx \right] \xi^{-2n} d\xi, \quad (16)$$

где

$$C(n) = \frac{(-1)^n 2(2n-1)!}{\pi}.$$

Разобьем интеграл (16) в сумму двух интегралов:

$$C(n) \int_0^\infty \dots d\xi = C(n) \int_0^a \dots d\xi + C(n) \int_a^\infty \dots d\xi.$$

Можно показать [10], что

$$C(n) \int_0^a \dots d\xi = C(n) \sum_{k=n}^{4N-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{a^{2k-2n+1}}{2k-2n+1} B_{\frac{k}{4}} + \delta_1(N, a, n), \quad (17)$$

$$C(n) \int_a^\infty \dots d\xi = C(n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{a^{2k-2n+1}}{2k-2n+1} B_{\frac{k}{4}} + \delta_2(a, n), \quad (18)$$

где

$$|\delta_1| \leq \frac{2(2n-1)!}{\pi} \frac{1}{(8N)!} \frac{a^{8N-2n+1}}{8N-2n+1} |B_n|,$$

$$|\delta_2| \leq \frac{2(2n-1)!}{\pi} \frac{a^{-2n-1}}{2n-1}.$$

²⁾ Доказательство аналогичной формулы и последующих оценок погрешностей δ дано в статье [10].

Выберем параметр $a = a(n)$ таким образом, чтобы погрешность $\delta = \delta_1 + \delta_2$ была минимальной. В результате получим

$$B_{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})} = C(n) \sum_{k=0}^{4N-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{a^{2k-2n+1}}{2k-2n+1} B_{\frac{k}{4}} + \delta. \quad (19)$$

Полагая теперь n равным последовательно различным целым числам, меньшим $4N$ и не кратным 4, и приравнивая правые части выражений (15) и (19), получим систему приближенных уравнений для определения коэффициентов $B_{k/4}$ с нецелыми индексами.

4. Для выбора значения вспомогательного параметра R , при котором вычисляется сумма (14), рассмотрим уравнение (относительно R)

$$f(t^4, R, N) = f(t^4), \quad (20)$$

где $t = g^{1/4}$. Можно показать, что для достаточно широкого класса функций $f(t^4)$, в который входят все рассматриваемые нами модельные задачи, множество решений этого уравнения дискретно, существует минимальное решение и, кроме того, все решения непрерывно зависят от параметра t из отрезка $[0, T]$.

Выбор R осуществляется следующим образом. Полагаем в уравнении (20) $t = 0$, т.е. рассматриваем уравнение

$$f(0, R, N) = f(0) \quad (21)$$

или, что то же самое, уравнение

$$A_0(m, R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^{2m}) e^{-i\rho r} dr d\rho = 1.$$

Выбираем минимальный корень $R^*(0)$ этого уравнения и находим ближайшие к нему максимум $R_1(0)$ и минимум $R_2(0)$ функции $f(0, R, N)$. Затем разбиваем отрезок $[0, T]$ на равные части $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ и находим экстремумы $R_1(t_k)$, $R_2(t_k)$ функции $f(t_k^4, R, N)$ для $k = 1, 2, \dots, n$.

Далее проверяем существование решения уравнения (20) на отрезках $[R_1(t_k), R_2(t_k)]$. Для этого по теореме о неявной функции достаточно проверить условия

$$\frac{\partial f(t, R, N)}{\partial t} - \frac{\partial f(t)}{\partial t} \neq 0. \quad (22)$$

При проверке условия (22) мы не можем явно вычислить производную $\partial f(t)/\partial t$, поскольку вид функции $f(t)$ нам не известен, однако мы можем вычислить эту производную приближенно, используя методы пункта 3. Если условие (22) выполнено, то на интервале $\Delta_R = [R_1(t_k), R_2(t_k)]$ существует корень $R^*(t_k)$. Тогда в качестве приближенного значения $\bar{f}(t)$ функции $f(t)$ можно взять значение $f(t, R, N)$ для любого $R \in \Delta_R$. При этом погрешность не превзойдет величины

$$\delta_f = \left| \max_{\Delta_R} f(t, R, N) - \min_{\Delta_R} f(t, R, N) \right|.$$

Далее, повторяем эту процедуру для следующих по величине корней уравнения (21). Можно показать, что описанная процедура конечна, т.к. начиная с некоторого корня уравнения (21) условие (22) не выполняется. Разумеется, это условие может нарушаться уже на первом шаге. Тогда следует либо взять большее число точек на отрезке $[0, T]$, либо проделать процедуру для следующих корней уравнения (21). Вычислительные эксперименты показывают, что минимальная погрешность достигается при самом большом по величине корне R , для которого выполнено условие (22).

Применим этот метод для вычисления β -функции в модели $g(\varphi^a \varphi^a)^2$ ($a = 1, 2$). Первые пять членов этой функции, вычисленные в схеме минимальных вычитаний [11, 12], имеют вид

$$\beta^{\text{MS}} = \frac{5}{3} g^2 - \frac{10}{3} g^3 + 20.043 g^4 - 175.257 g^5 + 1922.33 g^6.$$

Как показывает анализ, в качестве функции $f(g)$ удобно выбрать функцию

$$f(g) = \exp\left(-\frac{\beta(g)}{g}\right) = 1 - 1.66667 g + 4.72222 g^2 - 26.3705 g^3 + 219.170 g^4 - 2321.02 g^5. \quad (23)$$

Дальнейшие вычисления β -функции проводятся в предположении, что функция $f(g)$, задаваемая формулой (23), удовлетворяет условиям А–Б. Это согласуется с обычными предположениями о свойствах β -функции [1, 2].

Вычисляя для нее коэффициенты $B_{k/4}$ с помощью описанного в пункте 3 приема, находим (погрешность вычисления определяется последним знаком)

$$\begin{aligned} B_{\frac{1}{4}} &= 1.0; & B_{\frac{1}{2}} &= 1.1; & B_{\frac{3}{4}} &= 1.31; & B_{\frac{5}{4}} &= 2.273; & B_{\frac{3}{2}} &= 3.380; \\ B_{\frac{7}{4}} &= 5.445; & B_{\frac{9}{4}} &= 17.532; & B_{\frac{5}{2}} &= 34.609; & B_{\frac{11}{4}} &= 72.21; & B_{\frac{13}{4}} &= 361.8; \\ B_{\frac{7}{2}} &= 858.3; & B_{\frac{15}{4}} &= 2097.9; & B_{\frac{17}{4}} &= 13526; & B_{\frac{9}{2}} &= 3601 \cdot 10; & B_{\frac{19}{4}} &= 988 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для вычисления функции $f(g)$ можно не использовать коэффициенты $B_{1/4}, B_{1/2}, B_{3/4}$, найденные с большой погрешностью. Вместо этого поступим следующим образом. Представим функцию $f(g)$ в виде

$$f(g) = 1 + \int_0^g f'(g) dg. \quad (24)$$

Учитывая, что коэффициенты B_α для функций $f'(g)$ и $f(g)$ связаны соотношением

$$B_\alpha[f'] = B_{\alpha+1}[f],$$

найдем сумму вида (14) для производной $f'(g)$. Тогда функция $f(g)$ получится почленным интегрированием найденной суммы.

Результат вычисления $f(g)$ при $N = 4$ и $N = 5$ показывает, что в области $0 < g < 2$ на отрезке $\Delta_R = [7, 10]$ погрешность δ_f не превосходит 0.01.

Напомним, что в традиционной теории возмущений четырех- и пятипетлевое приближения β -функции имеют принципиально различный характер поведения: они совпадают лишь на весьма малом интервале значений g : $0 < g < 0.1$ [13]. При больших значениях g четырехпетлевое приближение имеет нули, а пятипетлевое неограниченно монотонно возрастает. Вычисленные же нашим методом значения β -функции, использующие четырех- и пятипетлевые приближения традиционной теории возмущений, в области $0 < g < 2$ практически совпадают и мало отличаются от истинного значения (см. рисунок).

5. Для получения более точного значения $\bar{f}(g)$ желательно выбрать интервал Δ_R как можно меньшим. Этого можно достичь следующим образом. В качестве значения параметра R выбирается приближенное решение

$$R = R^*(g) = R_0 + \sum_{k=0}^{4N} r_k g^{\frac{k}{4}} \quad (25)$$

уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} g^n B_n = \sum_{k=0}^{4N} \frac{1}{(2k)!} g^{\frac{k}{4}} A_{2k}(4, R) B_{\frac{k}{4}}. \quad (26)$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (26) по $g^{1/4}$, найдем коэффициенты r_k в формуле (25). В результате получим интервал значений $\Delta_R = [R^* - \delta_R, R^* + \delta_R]$, где δ_R – погрешность приближенного решения.

Найдем теперь $\max_{\Delta_R} f(g, R, N)$ и $\min_{\Delta_R} f(g, R, N)$. Поскольку точное значение $f(g)$ находится между ними, то, выбрав в качестве вычисленного значения

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \left(\max_{\Delta_R} f(g, R, N) + \min_{\Delta_R} f(g, R, N) \right),$$

получим искомую величину с точностью

$$\delta_f = \frac{1}{2} \left[\max_{\Delta_R} f(g, R, N) - \min_{\Delta_R} f(g, R, N) \right].$$

Мы применили описанный метод для вычисления критического показателя α , описывающего поведение теплоемкости He^4 вблизи критической точки. Напомним кратко схему вычисления в рамках квантово-полевого подхода к описанию критических явлений (см., например, [14]).

Сначала в модели $g(\varphi^a \varphi^a)^2$ ($a = 1, 2$) вычисляются β -функция и аномальная размерность $\gamma_m(g)$, а затем находится решение g^* уравнения

$$\beta(g) = \frac{1}{2} g.$$

Критический показатель α определяется из соотношения

$$\alpha = 2 - \frac{3}{2(1 - \gamma_m(g^*))}.$$

Результат непосредственного суммирования известных членов ряда традиционной теории возмущений заметно отличается от значения

$$\alpha_{\text{exp}} = -0.0128 \pm 0.0004,$$

известного с высокой точностью из прецизионных экспериментов [15].

Проводя вычисления предложенным в данной работе методом и используя пять членов традиционной теории возмущений, мы получили

$$\alpha = -0.0129 \pm 0.0008.$$

Отметим, что согласие с экспериментом найдено и в результате суммирования методом Бореля ряда, построенного с учетом известных семи членов разложения традиционной теории возмущений [16]. Следует, однако, подчеркнуть, что этим методом, в отличие от предложенного нами, нельзя установить, насколько полученный результат отличается от истинного. Можно лишь указать, как он изменяется от порядка к порядку (см. обсуждение в пункте 1).

Таким образом, наш подход может рассматриваться как следующий этап после проведения вычислений в рамках традиционной теории возмущений. Он позволяет более полно использовать имеющуюся информацию и получать искомые числовые значения с высокой точностью.

Благодарности. Авторы благодарны Д. И. Казакову, А. А. Славнову и Д. В. Ширкову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Список литературы

- [1] Large-order behaviour of perturbation theory. Eds. J.-C. le Guillou, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [2] *D. I. Kazakov, D. V. Shirkov*. Fortschr. Phys. 1980. V. 28. P. 465.
- [3] *V. V. Belokurov, E. T. Shavgulidze, Yu. P. Soloviyov*. Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 39. P. 3033.
- [4] *В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе*. ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 51, 60.
- [5] *В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе*. Фундам. прикл. мат. 1997. Т. 3. № 3. С. 693.
- [6] *В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе*. УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 155.
- [7] *V. V. Belokurov, V. V. Kamchatny, E. T. Shavgulidze, Yu. P. Soloviyov*. Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. № 10. P. 661.
- [8] *Г. Харди*. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [9] *В. С. Владимиров*. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [10] *В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе*. Метод суммирования расходящихся рядов с любой точностью. Мат. заметки (в печати).
- [11] *S. G. Gorishny et al.* Phys. Lett. B. 1983. V. 132. P. 351.
- [12] *D. I. Kazakov*. Renormgroup Phys. Lett. B. 1983. V. 133. P. 406.
- [13] *D. V. Shirkov*. KEK Report 91-13. Tsukuba, Japan, 1992.
- [14] *J. Zinn-Justin*. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1989.
- [15] *J. A. Lipa et al.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 944.
- [16] *R. Guida, J. Zinn-Justin*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 8103.

Поступила в редакцию 25.I.1999 г.,
после доработки 21.I.2000 г.