Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Плакида, Двухвременные функции Грина в теории сверхпроводимости, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 1, 129–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:23:48

© 2008 г.

Н. М. Плакида*

ДВУХВРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

На основе метода уравнений движения для двухвременных функций Грина выводятся уравнения сверхпроводимости для различных типов взаимодействий, связанных с рассеянием электронов на фононах и спиновых флуктуациях или вызванных сильными кулоновскими корреляциями в рамках модели Хаббарда. Получено точное уравнение Дайсона для матричной функции Грина с массовым оператором в виде многочастичной функции Грина. Вычисление массового оператора в приближении непересекающихся диаграмм приводит к замкнутой системе уравнений, соответствующей теории сильной связи Мигдала–Элиашберга. Предложена теория высокотемпературной сверхпроводимости, обусловленной кинематическим взаимодействием в модели Хаббарда. Показано, что в системах с сильной кулоновской корреляцией возникают два канала спаривания: за счет антиферромагнитного обмена при межзонных перескоках и за счет взаимодействия со спиновыми и зарядовыми флуктуациями при перескоках в одной хаббардовской зоне.

Ключевые слова: теория сверхпроводимости, электронно-фононное взаимодействие, спиновые флуктуации, сильные электронные корреляции, модель Хаббарда.

Статья посвящается памяти Д. Н. Зубарева

1. ВВЕДЕНИЕ

Термодинамические запаздывающие и опережающие двухвременные функции Грина (ФГ), введенные в статистическую физику Боголюбовым и Тябликовым [1], оказались необычайно удобными при исследовании спектра квазичастиц в теории многих взаимодействующих частиц, в том числе и в теории сверхпроводимости (см. известный обзор Зубарева [2]). Первоначально для исследования энергетического спектра сверхпроводников в рамках модели Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [3] Горьков использовал причинные ФГ [4]. Чтобы учесть конденсат куперовских пар, им была введена парная ФГ, не сохраняющая число частиц. В результате с помощью температурной диаграммной техники, учитывающей рождение и уничтожение куперовских пар, в приближении среднего поля была получена система двух уравнений для одночастичной и парной ФГ, решение которой приводило к уравнениям

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
E-mail: plakida@theor.jinr.ru

теории БКШ. В дальнейшем эта система уравнений получила название уравнений Горькова. В то же время существовали определенные проблемы в доказательстве единственности и точности решений, получаемых в модели БКШ. Эти вопросы были исследованы Боголюбовым с сотрудниками на основе метода запаздывающих и опережающих ФГ [5]. В работе была доказана неустойчивость тривиального решения ниже температуры сверхпроводящего перехода в модели БКШ и асимптотическая точность полученных решений в термодинамическом пределе, $V \rightarrow \infty$ (см. также работу [2]).

Значительный интерес представляло исследование более реалистической электронно-фононной модели, которое требовало выхода за рамки среднего поля для учета эффектов запаздывания электронно-фононного взаимодействия при вычислении массового оператора. Эта задача была решена одновременно и независимо Элиашбергом на основе метода причинных ФГ [6] и Зубаревым с помощью метода запаздывающих и опережающих ФГ [7]. В работе Зубарева был рассмотрен первый порядок теории возмущений при расщеплении ФГ в методе уравнений движения. В теории Элиашберга было проведено суммирование диаграмм для температурных ФГ, что позволило ему рассмотреть приближение сильной связи Мигдала. В дальнейшем теория сверхпроводимости Элиашберга (или Мигдала–Элиашберга) получила широкое распространение, поскольку позволяла исследовать реальные электронно-фононные системы с сильным взаимодействием.

Уравнения типа Элиашберга можно легко получить и в методе двухвременных ФГ с помощью дифференцирования их по двум временам [8], [9]. При этом возникает точное уравнение Дайсона для матричной ФГ с массовым оператором в виде многочастичной ФГ, вычисление которой в приближении непересекающихся диаграмм приводит к системе уравнений Элиашберга. Определенным преимуществом метода двухвременных ФГ является возможность вывода уравнений для произвольного вида электронно-бозонного взаимодействия без введения нулевых ФГ, необходимых в диаграммной технике, поскольку явный вид бозонного гамильтониана при выводе не используется.

Этот метод оказался особенно удобным при рассмотрении электронных систем с сильной корреляцией, где отсутствуют хорошо определенные квазичастичные возбуждения и соответствующие им нулевые ФГ плохо определены. В этом случае можно использовать проекционную технику типа Мори, которая пригодна для исследования систем с сильными корреляциями. Исследование электронных систем с сильными кулоновскими корреляциями привлекло внимание широкого круга физиков в связи с открытием в 1986 г. высокотемпературной сверхпроводимости [10] (см. раздел 3). На первой же конференции в 1988 г., посвященной этой проблеме, Боголюбов с сотрудниками предложил теорию сверхпроводимости, обусловленную сильными кулоновскими корреляциями [11] (см. также работу [12]). В дальнейшем эта теория была развита для исследования спектра квазичастиц и построения теории сверхпроводимости в рамках t - J -модели [13]–[15] и модели Хаббарда [16], [17]. В этих моделях применение диаграммной техники требует сложных вычислений (см., например, книгу [18]). Систематическое исследование сверхпроводимости в рамках

t - J -модели на основе диаграммной техники для операторов Хаббарда было проведено в работах [19].

В настоящей работе на основе метода уравнений движений для ФГ формулируется общая теория сверхпроводимости [9]. Мы рассматриваем различные типы взаимодействия, приводящие к спариванию: электронно-фононное взаимодействие, рассеяние на спиновых флуктуациях или кинематическое взаимодействие, обусловленное сильными кулоновскими корреляциями в модели Хаббарда. Используя технику дифференцирования по двум временам ФГ, мы выводим точное уравнение Дайсона, решение которого проводится в приближении непересекающихся диаграмм для массового оператора.

В следующем разделе приводится вывод уравнения Дайсона для произвольной электронно-бозонной системы. В разделе 3 рассмотрена модель Хаббарда. Показано, что электронные механизмы спаривания за счет обменного и спин-флуктуационного взаимодействий в системах с сильной электронной корреляцией могут приводить к высокой температуре сверхпроводящего перехода, сравнимой с наблюдаемой в высокотемпературных медно-оксидных сверхпроводниках.

2. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В ФЕРМИОННО-БОЗОННОЙ СИСТЕМЕ

2.1. Уравнение Дайсона. Рассмотрим общую модель электронного взаимодействия с фононами и спиновыми возбуждениями:

$$H = \sum_p \varepsilon(p) a_p^\dagger a_p + \sum_{p,p'} W(p, p') a_p^\dagger a_{p'}, \quad (1)$$

где $p = (\mathbf{p}, \sigma)$ обозначает импульс $\mathbf{p}$ и спин $\sigma = +(\uparrow), -(\downarrow)$ электрона с энергией $\varepsilon(p) = \epsilon(p) - \mu$, измеренной относительно химического потенциала μ . Матричный элемент взаимодействия состоит из двух вкладов:

$$W(p, p') = \delta_{\sigma\sigma'} V_{\text{ph}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rho_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} + V_{\text{sf}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \sum_{\alpha} S_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^{\alpha} \hat{\tau}_{\sigma\sigma'}^{\alpha}. \quad (2)$$

Первый член описывает рассеяние электронов на зарядовых флуктуациях решетки $\rho_{\mathbf{q}}$ (фононах), а второй член – на спиновых флуктуациях $S_{\mathbf{q}}^{\alpha}$; $\hat{\tau}_{\sigma\sigma'}^{\alpha}$ – матрицы Паули. Скалярное произведение спиновых матриц в формуле (2) удобно записать в виде $\sum_{\alpha} S_{\mathbf{q}}^{\alpha} \hat{\tau}^{\alpha} = S_{\mathbf{q}}^z \hat{\tau}^z + S_{\mathbf{q}}^+ \hat{\tau}^- + S_{\mathbf{q}}^- \hat{\tau}^+$, где $S_{\mathbf{q}}^{\pm} = S_{\mathbf{q}}^x \pm i S_{\mathbf{q}}^y$ и $\hat{\tau}^{\pm} = (1/2)(\hat{\tau}^x \pm i \hat{\tau}^y)$. В этих обозначениях взаимодействие со спиновыми флуктуациями приобретает стандартный вид s - d -модели:

$$H_{\text{sf}} = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} V_{\text{sf}}(\mathbf{q}) \{ S_{\mathbf{q}}^z (a_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{p}'\uparrow} - a_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{p}'\downarrow}) + S_{\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{p}'\uparrow} + S_{\mathbf{q}}^- a_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{p}'\downarrow} \}. \quad (3)$$

Для обсуждения синглетного сверхпроводящего спаривания в рамках модели (1) рассмотрим матричную двухвременную запаздывающую антикоммутаторную ФГ в обозначениях Зубарева [2]

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(t - t') = \langle\langle \Psi_{\mathbf{p}\sigma}(t) | \Psi_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger(t') \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \quad (4)$$

для операторов Намбу

$$\Psi_{\mathbf{p}\sigma} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}\sigma} \\ a_{-\mathbf{p}\bar{\sigma}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger = (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \ a_{-\mathbf{p}\bar{\sigma}}), \quad (5)$$

где $\bar{\sigma} = -\sigma$. Фурье-образ матричной ФГ (4) представим в виде

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) \equiv \begin{pmatrix} G_p^{11}(\omega) & G_p^{12}(\omega) \\ G_p^{21}(\omega) & G_p^{22}(\omega) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) & F_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) \\ F_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger(\omega) & -G_{-\mathbf{p}\bar{\sigma}}(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $G_p(\omega) \equiv G_p^{11}(\omega) = \langle\langle a_{\mathbf{p}\sigma} | a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega$ и $F_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) \equiv G_p^{12}(\omega) = \langle\langle a_{\mathbf{p}\sigma} | a_{-\mathbf{p}\bar{\sigma}} \rangle\rangle_\omega$ – нормальная и аномальная компоненты ФГ.

Дифференцируя ФГ (4) по времени t и используя уравнение для оператора $\Psi_{\mathbf{p}\sigma}(t)$ в представлении Гейзенберга, получим первое уравнение цепочки:

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) + G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) \sum_{p'} \langle\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} | \Psi_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega, \quad (7)$$

где введена нулевая ФГ

$$G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) = (\omega \hat{\tau}_0 - \varepsilon(p) \hat{\tau}_3)^{-1}. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем стандартную матричную запись ФГ (6) с помощью матриц Паули, где $\hat{\tau}_0$ – единичная матрица, $\hat{\tau}_3 = \hat{\tau}^z$, $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}^x$. Далее, в отличие от метода Зубарева [7] повторного дифференцирования по времени t , мы продифференцируем многочастичную ФГ $\langle\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} | \Psi_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger(t') \rangle\rangle$ в правой части (7) по второму времени t' . В результате получим второе уравнение цепочки в виде

$$\langle\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} | \Psi_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega = \left\langle\left\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} \left| \sum_{p''} \Psi_{\mathbf{p}''\sigma''}^\dagger W^\dagger(p, p'') \right. \right\rangle\right\rangle_\omega G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega), \quad (9)$$

где мы предположили, что в системе отсутствует магнитный дальний порядок и поэтому среднее значение $\langle W(p, p') \rangle = 0$. Вводя матрицу рассеяния

$$T_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \sum_{p', p''} \langle\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} | \Psi_{\mathbf{p}''\sigma''}^\dagger W^\dagger(p, p'') \rangle\rangle_\omega, \quad (10)$$

мы можем решить систему уравнений (7), (9) в виде

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) + G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) T_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega). \quad (11)$$

Массовый оператор $\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega)$ определяется собственной частью матрицы рассеяния (10), которая не содержит вкладов, связанных одной нулевой ФГ $G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega)$:

$$T_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) + \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega) T_{\mathbf{p}\sigma}(\omega). \quad (12)$$

Следовательно, выражение (6) может быть записано в виде матричного уравнения Дайсона:

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \{G_{\mathbf{p}\sigma}^{(0)}(\omega)^{-1} - \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega)\}^{-1}. \quad (13)$$

В отличие от стандартной диаграммной техники, где массовый оператор в уравнении Дайсона записывается в виде полной вершины и произведения полных одностичных ФГ для фермионов и бозонов, в нашем методе массовый оператор определяется нулевыми вершинами и полной многочастичной фермионно-бозонной ФГ:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) &= \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{11}(\omega) & \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{12}(\omega) \\ \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{21}(\omega) & \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{22}(\omega) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{p', p''} \langle\langle W(p, p') \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'} | \Psi_{\mathbf{p}''\sigma''}^\dagger W^\dagger(p, p'') \rangle\rangle_\omega^{\text{proper}}.\end{aligned}\quad (14)$$

Многочастичная ФГ описывает неупругие процессы рассеяния электронов на зарядовых и спиновых флуктуациях.

2.2. Приближение непересекающихся диаграмм. Чтобы получить замкнутую систему уравнений для ФГ (13) и массового оператора (14), необходимо вычислить многочастичную ФГ в формуле (14). Рассмотрим для этого приближение непересекающихся диаграмм, которое известно также как самосогласованное борновское приближение или приближение взаимодействующих мод. В этих приближениях распространение фермионных $\Psi_{\mathbf{p}\sigma}$ и бозонных $\rho_{\mathbf{q}}$ или $S_{\mathbf{q}}^\alpha$ -возбуждений в многочастичной ФГ (14) рассматривается независимо, и поэтому корреляционная функция для них может быть записана как произведение соответствующих функций:

$$\begin{aligned}\langle W(p, p')(t) \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'}(t) | \Psi_{\mathbf{p}''\sigma''}^\dagger W^\dagger(p, p'') \rangle &\simeq \\ &\simeq \langle W(p, p')(t) | W^\dagger(p, p'') \rangle \langle \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'}(t) | \Psi_{\mathbf{p}''\sigma''}^\dagger \rangle = \\ &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma\sigma''} |V_{\text{ph}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \langle \rho_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}(t) | \rho_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^\dagger \rangle \langle \Psi_{\mathbf{p}'\sigma}(t) | \Psi_{\mathbf{p}'\sigma}^\dagger \rangle + \\ &\quad + \delta_{\sigma'\sigma''} |V_{\text{sf}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha} \langle S_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^\alpha(t) | S_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^{\dagger\alpha} \rangle \hat{\tau}_\alpha(\sigma\sigma') \hat{\tau}_\alpha(\sigma'\sigma) \langle \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'}(t) | \Psi_{\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger \rangle.\end{aligned}\quad (15)$$

Корреляционные функции в уравнении (15) вычисляются через соответствующие ФГ в виде [2]

$$\langle \Psi_{\mathbf{p}'\sigma}(t) | \Psi_{\mathbf{p}'\sigma}^\dagger \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + e^{-\beta\omega}} e^{-i\omega t} \left[-\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle\langle \Psi_{\mathbf{p}'\sigma} | \Psi_{\mathbf{p}'\sigma}^\dagger \rangle\rangle_{\omega+i\delta} \right], \quad (16)$$

$$\langle B_{\mathbf{q}}(t) | B_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 - e^{-\beta\omega}} e^{-i\omega t} \left[-\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle\langle B_{\mathbf{q}} | B_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle\rangle_{\omega+i\delta} \right], \quad (17)$$

где для бозе-операторов $B_{\mathbf{q}} = \rho_{\mathbf{q}}, S_{\mathbf{q}}^\alpha$ используется коммутаторная ФГ. В этом приближении получаем следующее представление для массового оператора (14):

$$\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(+)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[-\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{\mathbf{p}'\sigma}(\omega_1) \right], \quad (18)$$

$$\Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(-)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[-\frac{1}{\pi} \text{Im} F_{\mathbf{p}'\sigma}(\omega_1) \right], \quad (19)$$

где введены нормальная $\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{11}(\omega) = -\Sigma_{-\mathbf{p}\bar{\sigma}}^{22}(-\omega)$ и аномальная $\Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{12}(\omega) = (\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}^{21}(\omega))^*$ компоненты массового оператора (14). Последняя определяет зависящую от частоты сверхпроводящую щель. Подчеркнем, что в представлении (18), (19) спектральные функции определяются полными фермионными (13) и бозонными ФГ, что соответствует вычислению массового оператора в виде первой скелетной диаграммы. При этом нам не потребовался явный вид бозонного гамильтониана, который необходим лишь при вычислении бозонной ФГ. Ядро интегральных уравнений (18), (19) имеет такую же форму, как и в теории Элиашберга:

$$K^{(\pm)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\text{th}(\omega_1/2T) + \text{cth}(\Omega/2T)}{2(\omega - \omega_1 - \Omega)} \lambda^{(\pm)}(\mathbf{q}, \Omega). \quad (20)$$

Электронно-электронное взаимодействие, обусловленное зарядовыми (фононными) или спиновыми флуктуациями для нормальной и аномальных компонент массового оператора, определяется согласно уравнению (15) функциями

$$\lambda^{(\pm)}(\mathbf{q}, \omega) = |V_{\text{sf}}(\mathbf{q})|^2 \frac{3}{\pi} \text{Im} \chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}, \omega + i\delta) \pm |V_{\text{ph}}(\mathbf{q})|^2 \frac{1}{\pi} \text{Im} \chi_{\text{ph}}(\mathbf{q}, \omega + i\delta), \quad (21)$$

где введены динамические восприимчивости: зарядовая $\chi_{\text{ph}}(\mathbf{q}, \omega) = -\langle\langle \rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ и спиновая $\chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}, \omega) = -\langle\langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle\rangle_{\omega}$. Предполагается, что спиновая восприимчивость в парамагнитной фазе изотропна, и поэтому $\chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^{zz}(\mathbf{q}, \omega) = (1/2)\chi^{\pm}(\mathbf{q}, \omega)$.

Таким образом, уравнения для массового оператора (18), (19) эквивалентны уравнениям Элиашберга для электронно-фононной системы [6] или их обобщениям для взаимодействия электронов со спиновыми флуктуациями (см., например, работу [20], где получены уравнения для ФГ как в случае синглетного, так и в случае триплетного спаривания в рамках s - d -модели). Чтобы учесть только однофононный вклад во взаимодействие (21), достаточно рассмотреть однофононное приближение для динамического структурного фактора для колебаний решетки $S(\mathbf{q}, \omega) = \langle\langle \rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$. Эффекты кулоновского взаимодействия между электронами можно также рассмотреть в методе двухвременных ФГ, как это описано в работе [8].

Формальное решение матричного уравнения Дайсона для ФГ (13) можно записать в виде

$$G_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \frac{\omega Z_p(\omega) \hat{\tau}_0 + (\varepsilon(p) + \xi_p(\omega)) \hat{\tau}_3 + \Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) \hat{\tau}_1}{(\omega Z_p(\omega))^2 - (\varepsilon(p) + \xi_p(\omega))^2 - |\Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega)|^2}, \quad (22)$$

где нечетная и четная по частоте ω компоненты массового оператора определяются функциями Элиашберга:

$$\omega(1 - Z_p(\omega)) = \frac{1}{2}[\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) - \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(-\omega)], \quad \xi_p(\omega) = \frac{1}{2}[\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) + \Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(-\omega)]. \quad (23)$$

Записывая матрицу массового оператора (14) в виде

$$\Sigma_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \omega(1 - Z_p(\omega)) \hat{\tau}_0 + \xi_p(\omega) \hat{\tau}_3 + \Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) \hat{\tau}_1, \quad (24)$$

получаем эквивалентную представлению (18), (19) самосогласованную систему интегральных уравнений в традиционной форме:

$$\omega(1 - Z_{\mathbf{p}\sigma}(\omega)) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(+)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[-\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{\omega_1 Z_{\mathbf{p}'}(\omega_1)}{D(\mathbf{p}', \omega_1)} \right], \quad (25)$$

$$\xi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(+)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{p} - \mathbf{p}') \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{(\varepsilon(\mathbf{p}') + \xi_{\mathbf{p}'}(\omega_1))}{D(\mathbf{p}', \omega_1)} \right], \quad (26)$$

$$\Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(-)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\Phi_{\mathbf{p}'\sigma}(\omega_1)}{D(\mathbf{p}', \omega_1)} \right], \quad (27)$$

где $D(p, \omega) = (\omega Z_p(\omega))^2 - (\varepsilon(p) + \xi_p(\omega))^2 - |\Phi_{\mathbf{p}\sigma}(\omega)|^2$. Различные методы решения этой системы уравнений подробно рассмотрены в ряде обзоров (см., например, [21], [22]).

Чтобы получить уравнение типа БКШ для щели, не зависящей от энергии, необходимо рассмотреть приближение слабой связи в уравнении (27). В этом приближении ядро интегрального уравнения (20) аппроксимируется его значением вблизи поверхности Ферми для энергий $|\omega, \omega_1| \leq \mu_b \ll \mu$ следующей формулой:

$$K^{(\pm)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{q}) \simeq -\frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\omega_1}{2T} \right) \lambda^{(\pm)}(\mathbf{q}), \quad (28)$$

где взаимодействие определяется статическими восприимчивостями

$$\lambda^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\Omega} \lambda^{(\pm)}(\mathbf{q}, \Omega) = 3|V_{\text{sf}}(\mathbf{q})|^2 \chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}) \pm |V_{\text{ph}}(\mathbf{q})|^2 \chi_{\text{ph}}(\mathbf{q}), \quad (29)$$

для спиновых флуктуаций $\chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}) = -\operatorname{Re} \langle \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle \rangle_{\omega=0} > 0$ и зарядовых флуктуаций $\chi_{\text{ph}}(\mathbf{q}) = -\operatorname{Re} \langle \langle \rho_{\mathbf{q}} | \rho_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle \rangle_{\omega=0} > 0$. При этом в приближении слабой связи мы пренебрегаем перенормировкой спектра электронов: $Z_p = 1$ в (25) и $\xi_p \simeq 0$ в (26). Следовательно, спектр квазичастиц Боголюбова в уравнении (27) принимает простой вид:

$$\left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{D(\mathbf{p}, \omega)} \right] = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\delta(\omega - E_{\mathbf{p}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{p}})], \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})^2 + |\Phi_{\mathbf{p}\sigma}|^2}. \quad (30)$$

Уравнение для щели на поверхности Ферми $\Phi_{\mathbf{p}\sigma} = \Phi_{\mathbf{p}\sigma}(0)$ имеет вид уравнения БКШ:

$$\Phi_{\mathbf{p}\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}-\mathbf{q}} \{ |V_{\text{ph}}(\mathbf{q})|^2 \chi_{\text{ph}}(\mathbf{q}) - 3|V_{\text{sf}}(\mathbf{q})|^2 \chi_{\text{sf}}(\mathbf{q}) \} \frac{\Phi_{\mathbf{p}'\sigma}}{2E_{\mathbf{p}'}} \operatorname{th} \frac{E_{\mathbf{p}'}}{2T}. \quad (31)$$

Интегрирование по импульсу $\mathbf{p}'$ производится в слое энергий вблизи поверхности Ферми для фононов $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')| < \Omega_{\text{ph}}$ и для спиновых флуктуаций $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')| < \Omega_{\text{sf}}$, где Ω_{ph} (Ω_{sf}) – максимальная энергия фононов (спиновых флуктуаций). Отметим, что спаривание, обусловленное спиновыми флуктуациями в уравнении (31), носит характер отталкивания (из-за переворота спина в процессе рассеяния), и поэтому может реализоваться только для знакопеременной щели, как, например, в d -волновом синглетном канале. Это спаривание мы рассмотрим в следующем разделе для систем с сильными кулоновскими корреляциями.

3. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В СИСТЕМАХ С СИЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ

3.1. Полярная модель Боголюбова. В связи с открытием в 1986 г. Беднорцем и Мюллером [10] высокотемпературной сверхпроводимости в медно-оксидных соединениях встал вопрос о механизме спаривания в них электронов (или дырок). Принято считать, что эти соединения характеризуются сильными кулоновскими корреляциями на ионах меди Cu^{2+} , которые обуславливают антиферромагнитное диэлектрическое состояние с высокой температурой Нееля $T_N = 300 - 500$ К в стехиометрической (нелегированной) фазе. Малая величина изотопического эффекта и сильные спиновые корреляции позволяют предположить, что спаривание обусловлено не электронно-фононным взаимодействием, а кулоновскими корреляциями [23].

Адекватной моделью металла с сильными корреляциями является “полярная модель” Боголюбова [24]. Используя метод последовательной ортогонализации одночастичных атомных функций, Боголюбову удалось записать общую электронно-ионную модель металла в представлении вторичного квантования с учетом так называемых полярных состояний, когда на одном узле решетки i может находиться несколько электронов, $n_{i\lambda\sigma}n_{i\nu\sigma'} > 1$ в различных квантовых состояниях $(\lambda, \sigma) \neq (\nu, \sigma')$. При этом гамильтониан может быть записан в виде

$$H = \sum_{i,i',\lambda,\nu,\sigma} L(i, \lambda; i', \nu) a_{i\lambda\sigma}^\dagger a_{i'\nu\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{i,\lambda,j\nu;i'\lambda',j',\nu',\sigma,\sigma'} F(i\lambda, j\nu; i'\lambda', j'\nu') a_{i\lambda\sigma}^\dagger a_{j\nu\sigma'}^\dagger a_{i'\nu'\sigma'} a_{j'\lambda'\sigma}, \quad (32)$$

где λ, ν определяют атомную орбиталь $(s, p, d, \dots)$, а σ, σ' – спин электрона. Здесь первый член при $i \neq i'$ определяет кинетическую энергию электронов при движении в среднем поле решетки, а второй член связан с кулоновским взаимодействием электронов. Учитывая лишь главный член в выражении (32), дающий наибольший вклад от взаимодействия электронов на одном узле, и рассматривая одноорбитальную систему, приходим к гамильтониану, получившему название модели Хаббарда [25]:

$$H = \sum_{i,i',\sigma} L(i, i') a_{i\sigma}^\dagger a_{i'\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i,\sigma} a_{i\sigma}^\dagger a_{i-\sigma}^\dagger a_{i-\sigma} a_{i\sigma}, \quad (33)$$

где энергия $U > 0$ определяет внутриаомное кулоновское взаимодействие. Несмотря на простоту этой модели, для нее отсутствует точное решение при размерности $D \geq 2$. Известно лишь, что при кулоновской энергии отталкивания U больше ширины зоны, определяемой параметром $L(i, i')$, при половинном заполнении (один электрон на узел: $n = \langle N_i \rangle = 1$) система находится в диэлектрическом состоянии с полностью заполненной зоной одночастичных состояний и пустой зоной двухчастичных состояний. Чтобы перевести систему в состояние с металлической проводимостью, необходимо либо добавить электроны в зону двухчастичных состояний, $n > 1$, либо создать дырки в зоне одночастичных состояний, $n < 1$. В последние годы большое внимание уделялось исследованию систем с сильными электронными корреляциями

в рамках этой модели, в том числе изучению сверхпроводимости (см., например, обзор [26]). В настоящем разделе мы кратко обсудим теорию электронного спектра и сверхпроводящего спаривания, развитую на основе метода двухвременных ФГ для модели Хаббарда [16], [17].

3.2. Уравнение Дайсона в модели Хаббарда. Рассмотрим модель Хаббарда (33) в пределе сильных корреляций, когда система при половинном заполнении находится в диэлектрическом состоянии. В этом случае удобно ввести операторы, относящиеся к зоне одночастичных и двухчастичных состояний:

$$\begin{aligned} a_{i\sigma} &= a_{i\sigma}(1 - n_{i\bar{\sigma}}) + a_{i\sigma}n_{i\bar{\sigma}} \equiv X_i^{0\sigma} + 2\sigma X_i^{\bar{\sigma}2}, \\ a_{i\sigma}^\dagger &= a_{i\sigma}^\dagger(1 - n_{i\bar{\sigma}}) + a_{i\sigma}^\dagger n_{i\bar{\sigma}} \equiv X_i^{\sigma 0} + 2\sigma X_i^{2\bar{\sigma}}, \end{aligned} \quad (34)$$

где мы ввели операторы квантовых переходов, которые обычно называются операторами Хаббарда и определяются соотношениями $X_i^{nm} = |in\rangle\langle im|$. Они определены для четырех квантовых состояний на узле решетки i : $n, m = |0\rangle, |\sigma\rangle, |2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, $\sigma = \pm 1/2 = (\uparrow, \downarrow)$, $\bar{\sigma} = -\sigma$. В терминах этих операторов гамильтониан (33) для двух зон запишется в виде

$$\begin{aligned} H &= E_1 \sum_{i,\sigma} X_i^{\sigma\sigma} + E_2 \sum_i X_i^{22} + \\ &+ \sum_{i \neq j, \sigma} \{t_{ij}^{11} X_i^{\sigma 0} X_j^{0\sigma} + t_{ij}^{22} X_i^{2\sigma} X_j^{\sigma 2} + 2\sigma t_{ij}^{12} (X_i^{2\bar{\sigma}} X_j^{0\sigma} + \text{э.с.})\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где E_1 и $E_2 = 2E_1 + U$ – энергии одночастичных и двухчастичных состояний, а $t_{ij}^{\alpha\beta}$ – интегралы переноса для узлов решетки $i \neq j$ для состояний в зонах $\alpha, \beta = 1, 2$. Чтобы использовать результаты расчетов для оценки температуры сверхпроводимости в медно-оксидных соединениях, в модели (35) выберем параметры, соответствующие эффективной двумерной p - d -модели Хаббарда для плоскости CuO_2 (см., например, работы [17], [27]). При этом в качестве одночастичных состояний выбираются однодырочные состояния $3d_{x^2-y^2}$ -типа на узлах меди с энергией $E_1 = \epsilon_d - \mu$, а двухчастичные состояния формируются из двухдырочных синглетных p $d\sigma$ -состояний $\text{Cu } 3d_{x^2-y^2}$ - и $O(2p_x, 2p_y)$ -типов с энергией $E_2 = \epsilon_d + \epsilon_p - 2\mu = 2E_1 + \Delta$, где $\Delta = \epsilon_p - \epsilon_d$ – разность энергий O $2p$ - и $\text{Cu } 3d$ -состояний, которая в спектре нелегированной системы определяет диэлектрическую щель, связанную с переносом заряда $O 2p \rightarrow \text{Cu } 3d$. Эта энергия эквивалентна одноузельной кулоновской энергии U в стандартной модели Хаббарда (33). Индексы 2 и 1 относятся к двухдырочной (верхней) хаббардовской зоне и однодырочной (нижней) хаббардовской зоне, соответственно. Химический потенциал μ определяется заполнением двух зон Хаббарда – средним числом дырок:

$$n = \langle N_i \rangle = \sum_{\sigma} \langle X_i^{\sigma\sigma} \rangle + 2\langle X_i^{22} \rangle. \quad (36)$$

Случай сильных кулоновских корреляций для p - d -модели определяется условием $U_{\text{eff}} = \Delta > 8|t_{ij}^{\alpha\beta}|$, когда при половинном заполнении, $n = 1$, система находится в диэлектрическом состоянии с химическим потенциалом в середине диэлектрической щели, $\mu = \Delta/2$ (для $\epsilon_d = 0$).

Операторы Хаббарда в гамильтониане (35), которые могут быть представлены в виде матриц 4×4 , удовлетворяют соотношению полноты $X_i^{00} + X_i^{\uparrow\uparrow} + X_i^{\downarrow\downarrow} + X_i^{22} = 1$, которое показывает, что на каждом узле решетки i может быть заполнено лишь одно квантовое состояние $|in\rangle$. Операторы Хаббарда подчиняются правилам умножения $X_i^{\alpha\beta} X_i^{\gamma\delta} = \delta_{\beta\gamma} X_i^{\alpha\delta}$ и коммутационным соотношениям

$$[X_i^{\alpha\beta}, X_j^{\gamma\delta}]_{\pm} = \delta_{ij} (\delta_{\beta\gamma} X_i^{\alpha\delta} \pm \delta_{\delta\alpha} X_i^{\gamma\beta}). \quad (37)$$

В соотношениях (37) верхний знак относится к операторам ферми-типа $X_i^{0\sigma}$, а нижний знак – к операторам бозе-типа, как, например, операторы числа частиц N_i в формуле (36) или спина $S_i^{\sigma} = X_i^{\sigma\bar{\sigma}}$.

Для рассмотрения сверхпроводящего спаривания в модели Хаббарда (35) мы введем четырехкомпонентный оператор Намбу $\hat{X}_{i\sigma}$ и сопряженный ему $\hat{X}_{i\sigma}^{\dagger}$ и определим термодинамическую ФГ в виде матрицы 4×4 аналогично формуле (4):

$$G_{ij\sigma}(t - t') = \langle \langle \hat{X}_{i\sigma}(t) | \hat{X}_{j\sigma}^{\dagger}(t') \rangle \rangle, \quad G_{ij\sigma}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{G}_{ij\sigma}(\omega) & \hat{F}_{ij\sigma}(\omega) \\ \hat{F}_{ij\sigma}^{\dagger}(\omega) & -\hat{G}_{ji\bar{\sigma}}(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где $\hat{X}_{i\sigma}^{\dagger} = (X_i^{2\sigma} X_i^{\bar{\sigma}0} X_i^{\bar{\sigma}2} X_i^{0\sigma})$. Ввиду двухзонного характера модели (35) нормальная $\hat{G}_{ij\sigma}$ и аномальная $\hat{F}_{ij\sigma}$ компоненты ФГ представляют собой матрицы 2×2 .

Для вычисления ФГ (38) воспользуемся методом уравнений движения, как и в п. 2.1. Дифференцирование ФГ по времени t и использование фурье-представления согласно (4) приводит к следующему уравнению:

$$\omega G_{ij\sigma}(\omega) = \delta_{ij} Q + \langle \langle \hat{Z}_{i\sigma} | \hat{X}_{j\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega}, \quad (39)$$

где $\hat{Z}_{i\sigma} = [\hat{X}_{i\sigma}, H]$. В парамагнитном состоянии матрица Q имеет вид

$$Q = \langle \{ \hat{X}_{i\sigma}, \hat{X}_{i\sigma}^{\dagger} \} \rangle = \hat{\tau}_0 \times \begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix},$$

где компоненты матрицы $Q_2 = \langle X_i^{22} + X_i^{\sigma\sigma} \rangle = n/2$ и $Q_1 = \langle X_i^{00} + X_i^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \rangle = 1 - Q_2$ зависят только от числа заполнения (36).

Здесь важно отметить, что в отличие от фермионно-бозонной модели (1) в модели Хаббарда (35) отсутствует динамическое взаимодействие электронов (дырок) с флуктуациями спинов или зарядов. Его роль выполняет кинематическое взаимодействие, обусловленное нефермиевским характером коммутационных соотношений (37) для хаббардовских операторов, как это было отмечено уже Хаббардом [25]. Например, уравнение движения для хаббардовского оператора $X_i^{\sigma 2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z_i^{\sigma 2} = [X_i^{\sigma 2}, H] = (E_1 + \Delta) X_i^{\sigma 2} + \sum_{l \neq i, \sigma'} (t_{il}^{22} B_{i\sigma\sigma'}^{22} X_l^{\sigma' 2} - 2\sigma t_{il}^{21} B_{i\sigma\sigma'}^{21} X_l^{0\sigma'}) - \\ - \sum_{l \neq i} X_i^{02} (t_{il}^{11} X_l^{\sigma 0} + 2\sigma t_{il}^{21} X_l^{2\bar{\sigma}}), \end{aligned} \quad (40)$$

где $B_{i\sigma\sigma'}^{\alpha\beta}$ – бозе-подобные операторы, связанные с операторами числа частиц (заряда) и спина:

$$B_{i\sigma\sigma'}^{22} = (X_i^{22} + X_i^{\sigma\sigma})\delta_{\sigma'\sigma} + X_i^{\sigma\bar{\sigma}}\delta_{\sigma'\bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{2}N_i + S_i^z\right)\delta_{\sigma'\sigma} + S_i^\sigma\delta_{\sigma'\bar{\sigma}}, \quad (41)$$

$$B_{i\sigma\sigma'}^{21} = \left(\frac{1}{2}N_i + S_i^z\right)\delta_{\sigma'\sigma} - S_i^\sigma\delta_{\sigma'\bar{\sigma}}, \quad S_i^\sigma = S_i^\pm. \quad (42)$$

Чтобы выделить вклад среднего поля в энергию квазичастиц в уравнении движения (39), воспользуемся методом проектирования типа Мори. Для этого запишем оператор $\hat{Z}_{i\sigma}$ в виде суммы линейной части, пропорциональной исходному оператору $\hat{X}_{i\sigma}$, и неприводимой части $\hat{Z}_{i\sigma}^{(ir)}$, ортогональной ему:

$$\hat{Z}_{i\sigma} = [\hat{X}_{i\sigma}, H] = \sum_l \mathbf{E}_{il\sigma} \hat{X}_{l\sigma} + \hat{Z}_{i\sigma}^{(ir)}. \quad (43)$$

Условия ортогональности $\langle \{\hat{Z}_{i\sigma}^{(ir)}, \hat{X}_{j\sigma}^\dagger\} \rangle = \langle \hat{Z}_{i\sigma}^{(ir)} \hat{X}_{j\sigma}^\dagger + \hat{X}_{j\sigma}^\dagger \hat{Z}_{i\sigma}^{(ir)} \rangle = 0$ определяют линейную часть – матрицу частот:

$$\mathbf{E}_{ij\sigma} = \langle \{\hat{X}_{i\sigma}, H\}, \hat{X}_{j\sigma}^\dagger \rangle \mathbf{Q}^{-1}. \quad (44)$$

Матрица частот (44) определяет спектр квазичастиц в обобщенном приближении среднего поля и соответствующую нулевую ФГ. Переходя к фурье-представлению в $(\mathbf{q}, \omega)$ -пространстве, запишем нулевую ФГ в виде

$$\mathbf{G}_\sigma^0(\mathbf{q}, \omega) = (\omega \tilde{\tau}_0 - \mathbf{E}_\sigma(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{Q}, \quad (45)$$

где $\tilde{\tau}_0$ – единичная матрица размера 4×4 .

Дифференцирование многочастичной ФГ $\langle \langle \hat{Z}_{i\sigma} | \hat{X}_{j\sigma}^\dagger(t') \rangle \rangle$ в уравнении (39) по второму времени t' и использование такой же процедуры проектирования, как в формуле (43), приводит к уравнению Дайсона для ФГ (38), как это было описано в п. 2.1. В $(\mathbf{q}, \omega)$ -представлении уравнение Дайсона принимает вид

$$(\mathbf{G}_\sigma(\mathbf{q}, \omega))^{-1} = (\mathbf{G}_\sigma^0(\mathbf{q}, \omega))^{-1} - \Sigma_\sigma(\mathbf{q}, \omega). \quad (46)$$

Массовый оператор $\Sigma_\sigma(\mathbf{q}, \omega)$ определяется собственной частью матрицы рассеяния аналогично фермионно-бозонной модели в п. 2.1:

$$\Sigma_\sigma(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1} \langle \langle \hat{Z}_{\mathbf{q}\sigma}^{(ir)} | \hat{Z}_{\mathbf{q}\sigma}^{(ir)\dagger} \rangle \rangle_\omega^{(\text{prop})} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (47)$$

Уравнения Дайсона (45)–(47) дают точное представление для ФГ (38). Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо вычислить многочастичную ФГ в массовом операторе (47), которая описывает неупругие процессы рассеяния электронов (дырок) на флуктуациях заряда и спина за счет кинематического взаимодействия.

3.3. Приближение среднего поля. В отличие от фермионно-бозонной модели (1) в модели Хаббарда сверхпроводящее спаривание появляется уже в приближении среднего поля, которое обусловлено так называемым кинетическим обменным взаимодействием [23]. Поэтому имеет смысл рассмотреть приближение среднего поля, описываемое нулевой ФГ (45), отдельно. Пользуясь коммутационными соотношениями для хаббардовских операторов, вычислим матрицу частот (44):

$$E_{ij\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{ij\sigma} & \hat{\Delta}_{ij\sigma} \\ \hat{\Delta}_{ji\sigma}^* & -\hat{\omega}_{ji\bar{\sigma}} \end{pmatrix} Q^{-1}. \quad (48)$$

Матрица $\hat{\omega}_{ij\sigma}$ определяет спектр квазичастиц в двух хаббардовских зонах в нормальной фазе (см. работы [17], [27]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2}[\omega_2(\mathbf{k}) + \omega_1(\mathbf{k})] \mp \frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{k}), \\ \Lambda(\mathbf{k}) &= \{[\omega_2(\mathbf{k}) - \omega_1(\mathbf{k})]^2 + 4W(\mathbf{k})^2\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (49)$$

где спектр однозонных возбуждений $\omega_{1,2}(\mathbf{k})$ и параметр гибридизации $W(\mathbf{k})$ определяются функциями $\omega_1(\mathbf{k}) = 4t\alpha_1\gamma(\mathbf{k}) + 4t'\beta_1\gamma'(\mathbf{k}) - \mu$, $\omega_2(\mathbf{k}) = 4t\alpha_2\gamma(\mathbf{k}) + 4t'\beta_2\gamma'(\mathbf{k}) + \Delta - \mu$, $W(\mathbf{k}) = 4t\alpha_{12}\gamma(\mathbf{k}) + 4t'\beta_{12}\gamma'(\mathbf{k})$. Здесь введены равные для обеих зон интегралы перескока: t – для соседних узлов решетки $\pm(a_x, a_y)$ и t' – для следующих за ними узлов решетки $\pm(a_x \pm a_y)$, и соответствующие функции, определяющие дисперсию: $\gamma(\mathbf{k}) = (1/2)(\cos k_x + \cos k_y)$, $\gamma'(\mathbf{k}) = \cos k_x \cos k_y$ (постоянная решетки $a_x = a_y = a$ принята равной единице). За счет кинематического взаимодействия происходит перенормировка спектра: $\alpha_{1(2)} = Q_{1(2)}[1 + C_1/Q_{1(2)}^2]$, $\beta_{1(2)} = Q_{1(2)}[1 + C_2/Q_{1(2)}^2]$, $\alpha_{12} = \sqrt{Q_1 Q_2}[1 - C_1/Q_1 Q_2]$, $\beta_{12} = \sqrt{Q_1 Q_2}[1 - C_2/Q_1 Q_2]$, которая определяется статическими спиновыми корреляционными функциями

$$C_1 = \langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i \pm a_x/a_y} \rangle, \quad C_2 = \langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i \pm a_x \pm a_y} \rangle. \quad (50)$$

Отметим, что в случае сильных антиферромагнитных (АФ) спиновых корреляций происходит значительное подавление интеграла перескока для ближайших соседей. В частности, в случае неелевского дальнего АФ порядка $C_1 \simeq -1/4$ и при половинном заполнении $Q_1 = Q_2 = 1/2$ параметр $\alpha_{1(2)} = 0$, в результате чего перескок на ближайшие узлы отсутствует и спектр квазичастиц определяется интегралом перескока t' для следующих за ближайшими соседями.

Вычислим аномальную компоненту $\hat{\Delta}_{ij\sigma}$ матрицы (48), которая определяет сверхпроводящую щель. Далее мы будем рассматривать только синглетное спаривание d -типа, которое определяется аномальными средними на несовпадающих узлах, $i \neq j$. Диагональные компоненты матрицы имеют вид

$$\Delta_{ij\sigma}^{22} = -2\sigma t_{ij}^{12} \langle X_i^{02} N_j \rangle, \quad \Delta_{ij\sigma}^{11} = -2\sigma t_{ij}^{12} \langle (2 - N_j) X_i^{02} \rangle, \quad (51)$$

где оператор числа частиц $N_i = \sum_{\sigma} X_i^{\sigma\sigma} + 2X_i^{22}$. Выражая ферми-операторы через операторы Хаббарда: $c_{i\sigma} = X_i^{0\sigma} + 2\sigma X_i^{\bar{\sigma}2}$, мы можем записать аномальные средние (51) в следующем виде: $\langle c_{i\downarrow} c_{i\uparrow} N_j \rangle = \langle X_i^{01} X_i^{12} N_j \rangle = \langle X_i^{02} N_j \rangle$, поскольку

остальные произведения хаббардовских операторов не дают вклада в силу правил умножения для них: $X_i^{\alpha\gamma} X_i^{\lambda\beta} = \delta_{\gamma,\lambda} X_i^{\alpha\beta}$. Это представление аномальных средних через ферми-операторы показывает, что спаривание происходит на одном узле, но в разных хаббардовских зонах.

Такие же выражения для аномальных средних были получены в модели Хаббарда в работах [28]–[30]. Однако вычисление средних $\langle c_{i\downarrow} c_{i\uparrow} N_j \rangle$ в работах [28], [30] было проведено путем расщепления операторов на одном узле, что привело к неоднозначным решениям. В работе [29] были использованы дополнительные уравнения, основанные на кинематических условиях для хаббардовских операторов, что также не позволило получить однозначное решение.

Возможно, однако, прямое вычисление аномальных средних $\langle X_i^{02} N_j \rangle$ на основе уравнения для парной коммутаторной ФГ $L_{ij}(t-t') = \langle\langle X_i^{02}(t) | N_j(t') \rangle\rangle$, которое может быть решено без каких-либо расщеплений [16]. Здесь мы приведем лишь результаты для корреляционной функции для двухдырочной зоны, спаривание в которой возникает при дырочном легировании, $n = 1 + \delta > 1$:

$$\langle X_i^{02} N_j \rangle = -\frac{1}{\Delta} \sum_{m \neq i, \sigma} 2\sigma t_{im}^{12} \langle X_i^{\sigma 2} X_m^{\bar{\sigma} 2} N_j \rangle \simeq -\frac{4t_{ij}^{12}}{\Delta} 2\sigma \langle X_i^{\sigma 2} X_j^{\bar{\sigma} 2} \rangle. \quad (52)$$

Последнее уравнение получено в двухузельном приближении, $m = j$, которое обычно используется при выводе t - J -модели. В результате уравнение для сверхпроводящей щели в формулах (51) в случае дырочного легирования можно записать в виде

$$\Delta_{ij\sigma}^{22} = -2\sigma t_{ij}^{12} \langle X_i^{02} N_j \rangle = J_{ij} \langle X_i^{\sigma 2} X_j^{\bar{\sigma} 2} \rangle. \quad (53)$$

Полученное уравнение эквивалентно уравнению для щели в t - J -модели, которое определяет спаривание за счет обменного взаимодействия $J_{ij} = 4(t_{ij}^{12})^2/\Delta$ в приближении среднего поля [13], [15]. Аналогичное уравнение может быть получено и при электронном легировании для щели в однодырочной хаббардовской зоне: $\Delta_{ij\sigma}^{11} = J_{ij} \langle X_i^{0\bar{\sigma}} X_j^{0\sigma} \rangle$. Таким образом, мы приходим к выводу, что аномальные средние (51) в модели Хаббарда соответствуют аномальным средним в одной из хаббардовских зон (в зависимости от положения химпотенциала) в t - J -модели.

3.4. Массовый оператор. Массовый оператор (47) удобно записать в таком же виде, как и ФГ (38):

$$\Sigma_{ij\sigma}(\omega) = Q^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{M}_{ij\sigma}(\omega) & \widehat{\Phi}_{ij\sigma}(\omega) \\ \widehat{\Phi}_{ij\sigma}^\dagger(\omega) & -\widehat{M}_{ij\bar{\sigma}}(-\omega) \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad (54)$$

где матрицы $\widehat{M}$ и $\widehat{\Phi}$ обозначают нормальную и аномальную компоненты массового оператора. Вычисление массового оператора (54) проведем в приближении непересекающихся диаграмм, как и в п. 2.2. Этому приближению соответствует расщепление фермионно-бозонных временных корреляционных функций на несовпадающих узлах решетки ($1 \neq 1'$, $2 \neq 2'$) согласно уравнению

$$\langle B_{1'}(t) X_1(t) B_{2'}(t') X_2(t') \rangle \simeq \langle X_1(t) X_2(t') \rangle \langle B_{1'}(t) B_{2'}(t') \rangle. \quad (55)$$

Используя для временных корреляционных функций в правой части уравнения спектральные представления типа (16), (17), получаем замкнутую систему уравнений для ФГ (38) и массового оператора (54) аналогично системе уравнений для фермионно-бозонной модели в п. 2.2.

Рассмотрим далее лишь систему уравнений для массового оператора для двухдырочной зоны, которая определяет свойства системы при дырочном легировании. Нормальная $M_{\sigma}^{22}(\mathbf{q}, \omega)$ и аномальная $\Phi_{\sigma}^{22}(\mathbf{q}, \omega)$ диагональные компоненты массового оператора в этом случае имеют вид

$$M_{\sigma}^{22}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(+)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}) \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{\pi} \text{Im}[G_{\sigma}^{22}(\mathbf{k}, \omega_1) + G_{\sigma}^{11}(\mathbf{k}, \omega_1)] \right\}, \quad (56)$$

$$\Phi_{\sigma}^{22}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 K^{(-)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}) \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{\pi} \text{Im}[F_{\sigma}^{22}(\mathbf{k}, \omega_1) - F_{\sigma}^{11}(\mathbf{k}, \omega_1)] \right\}. \quad (57)$$

Ядро интегральных уравнений для этих компонент определяется функцией, аналогичной (20) для фермионно-бозонной модели:

$$K^{(\pm)}(\omega, \omega_1 | \mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\text{th}(\omega_1/2T) + \text{cth}(\Omega/2T)}{2(\omega - \omega_1 - \Omega)} \lambda^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}, \Omega), \quad (58)$$

но с другой функцией взаимодействия, зависящей от двух импульсов:

$$\lambda^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}, \Omega) = |t(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{1}{\pi} \text{Im} \chi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \Omega) \right]. \quad (59)$$

Здесь вершина взаимодействия определяется фурье-компонентой интеграла перескока: $t(\mathbf{k}) = 4t\gamma(\mathbf{k}) + 4t'\gamma'(\mathbf{k})$. Спектральная плотность бозонных возбуждений задается соответствующими динамическими восприимчивостями спиновых и зарядовых флуктуаций:

$$\chi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{q}, \omega) = \chi_s(\mathbf{q}, \omega) \pm \chi_c(\mathbf{q}, \omega) = -\left\{ 3\langle\langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle\rangle_{\omega} \pm \frac{1}{4} \langle\langle \delta N_{\mathbf{q}} | \delta N_{-\mathbf{q}} \rangle\rangle_{\omega} \right\}. \quad (60)$$

Эти функции возникают за счет временных корреляционных функций $\langle B_{1'}(t) B_{2'}(t') \rangle$ от бозе-подобных операторов (41), (42) в расщеплении (55).

Как мы видим, система самосогласованных уравнений для компонент массового оператора (56), (57) и ФГ (46) формально аналогична системе уравнений для фермионно-бозонной модели (1). Однако механизмы взаимодействия электронов с бозонами в этих моделях разные: в то время как в фермионно-бозонной модели взаимодействие носит динамический характер с соответствующими константами связи, в модели Хаббарда рассеяние электронов обусловлено кинематическим взаимодействием, которое определяется интегралом перескока и не является поэтому независимым параметром.

3.5. Оценка температуры сверхпроводящего перехода. Рассмотрим уравнение для щели (57) в случае дырочного легирования, $n = 1 + \delta > 1$, когда химический потенциал находится в верхней хаббардовской зоне: $\mu \simeq \Delta$. Для энергий $|\omega, \omega_1|$ вблизи энергии Ферми мы можем воспользоваться приближением слабой связи (28) для вычисления вклада первого члена уравнения (57) от ФГ в этой же зоне. Вкладом второго члена от ФГ из нижней хаббардовской зоны, лежащей значительно ниже энергии Ферми, мы можем пренебречь. В результате с учетом вклада (53), полученного в приближении среднего поля за счет обменного взаимодействия, мы приходим к следующему уравнению для щели в верхней хаббардовской зоне:

$$\phi^{22}(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [J(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k})] \frac{\phi^{22}(\mathbf{k})}{2E_2(\mathbf{k})} \text{th} \frac{E_2(\mathbf{k})}{2T}, \quad (61)$$

где взаимодействие $\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}) = |t(\mathbf{k})|^2 \chi(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \omega = 0) > 0$ определяется статической восприимчивостью согласно формуле (29). Спектр квазичастиц Боголюбова в этой зоне определяется функцией $E_2(\mathbf{k}) = \{\varepsilon_2(\mathbf{k})^2 + |\phi^{22}(\mathbf{k})|^2\}^{1/2}$, где $\varepsilon_2(\mathbf{k})$ – энергия квазичастиц в нормальной фазе (49). Аналогичное уравнение для щели $\phi^{11}(\mathbf{q})$ получается в случае электронного легирования, когда химический потенциал лежит в нижней хаббардовской зоне, $\mu \simeq 0$.

Рассмотрим приближенное решение уравнения (61) при учете только взаимодействия электронов с АФ спиновыми флуктуациями, поскольку зарядовые флуктуации имеют более высокую энергию и поэтому дают меньший вклад. Статическую спиновую восприимчивость будем описывать модельной функцией

$$\chi_s(\mathbf{q}, 0) = \frac{\chi_0}{1 + \xi^2[1 + \gamma(\mathbf{q})]}, \quad \gamma(\mathbf{q}) = \frac{\cos q_x + \cos q_y}{2}, \quad (62)$$

где ξ определяет АФ корреляционную длину (в единицах постоянной решетки a). Восприимчивость $\chi_s(\mathbf{q} = \mathbf{Q})$ для АФ волнового вектора $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ определяется величиной χ_0 , которая вычисляется из условий нормировки для спиновой восприимчивости: $(1/N) \sum_i \langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i \rangle = (3/4)(1 - \delta)$. При этом получаем $\chi_0 = 3(1 - \delta)/2\pi\omega_s C(\xi)$, где $\omega_s \leq J$ – характерная частота спиновых флуктуаций порядка обменной энергии J и константа $C(\xi) = (1/N) \sum_{\mathbf{q}} \{1 + \xi^2[1 + \gamma(\mathbf{q})]\}^{-1}$. При больших значениях АФ корреляционной длины $\xi \gg 1$ статическая восприимчивость имеет острый максимум при АФ волновом векторе: $\chi_0 \propto \xi^2 \gg 1$, а при малых значениях $\xi \sim 1$ статическая восприимчивость плавно зависит от волнового вектора во всей зоне Бриллюэна и имеет лишь слабый максимум при $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$. Вычисление спиновых корреляционных функций (50), определяющих перенормировку спектра в приближении среднего поля, также проводится с помощью статической восприимчивости (62).

Произведем оценку температуры сверхпроводящего перехода T_c для d -волнового спаривания со щелью $\phi^{22}(\mathbf{q}) = \varphi_d(\cos q_x - \cos q_y) \equiv \varphi_d \eta(\mathbf{q})$. Для этого рассмотрим решение уравнения (61) в логарифмическом приближении в случае больших значений АФ корреляционной длины $\xi \gg 1$. Умножив обе части уравнения (61) на функцию $\eta(\mathbf{q})$, выполним интегрирование по $\mathbf{q}$, учитывая, что спиновая восприимчивость (62) при $\xi \gg 1$ имеет острый максимум для АФ волнового вектора:

$(1/N) \sum_{\mathbf{q}} \eta(\mathbf{q}) \chi_s(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \simeq \eta(\mathbf{Q} + \mathbf{k}) (1/N) \sum_{\mathbf{q}'} \chi_s(\mathbf{q}') = -\eta(\mathbf{k}) \chi_0 C(\xi)$. В результате уравнение для определения T_c примет вид

$$1 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [J + \lambda_s(\mathbf{k})] \frac{\eta^2(\mathbf{k})}{2\varepsilon_2(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{\varepsilon_2(\mathbf{k})}{2T_c}, \quad (63)$$

где $\lambda_s(\mathbf{k}) \simeq |t(\mathbf{k})|^2/2\omega_s$. Интегрирование по $\mathbf{k}$ для первого члена в уравнении (63) производится по всем энергиям в верхней хаббардовской зоне, поскольку для обменного взаимодействия, обусловленного межзонными перескоками с большой энергией $\Delta \gg t$, эффекты запаздывания отсутствуют. Это приводит к спариванию всех электронов (дырок) в зоне с шириной W и высокой T_c , пропорциональной энергии Ферми E_F [14]:

$$T_c^{\text{ex}} \simeq \sqrt{E_F(W - E_F)} e^{-1/\lambda_{\text{ex}}}, \quad (64)$$

где $\lambda_{\text{ex}} \simeq JN(0)$ – эффективная константа связи для обменного взаимодействия J и средней плотности электронных состояний $N(0)$. Спин-флуктуационное спаривание во втором члене уравнения (63) возможно лишь в слое энергий $\pm\omega_s$ вблизи поверхности Ферми, как и в теории БКШ. Учитывая оба вклада, оценку для T_c запишем в виде

$$T_c \simeq \omega_s e^{-1/\tilde{\lambda}_{\text{sf}}}, \quad \tilde{\lambda}_{\text{sf}} = \lambda_{\text{sf}} + \frac{\lambda_{\text{ex}}}{1 - \lambda_{\text{ex}} \ln(E_F/\omega_s)}, \quad (65)$$

где $\lambda_{\text{sf}} \simeq (t^2/\omega_s)N(0)$ – константа связи для спин-флуктуационного спаривания. Полагая для оценок $E_F = W/2 \simeq 0.35$ эВ, $\omega_s \simeq J \simeq 0.13$ эВ и считая связь слабой: $\lambda_{\text{sf}} \simeq \lambda_{\text{ex}} = 0.2$, получим для перенормированной константы связи $\tilde{\lambda}_{\text{sf}} \simeq 0.2 + 0.25 = 0.45$ и $T_c \simeq 160$ К, в то время как только спин-флуктуационное спаривание в случае слабой связи дает $T_c^0 \simeq \omega_s e^{-1/\lambda_{\text{sf}}} \simeq 10$ К. Результаты численного решения уравнения (61) для температуры сверхпроводящего перехода $T_c(\delta)$ и $\mathbf{k}$ -зависящей щелевой функции $\phi^{22}(\mathbf{k})$ представлены в работе [16]. Было показано, что функция $T_c(\delta)$ имеет максимум $T_c^{\text{max}} \sim 280$ К при оптимальном легировании $\delta \simeq 0.13$, а щелевая функция обладает d -симметрией: $\phi_\sigma(q_x, q_y) = -\phi_\sigma(q_y, q_x)$. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными для медно-оксидных высокотемпературных сверхпроводников.

Более строгое решение уравнений сверхпроводимости в приближении сильной связи получается при самосогласованном решении полной системы уравнений для массовых операторов (56), (57) и соответствующих ФГ. В частности, исследование электронного спектра в нормальной фазе в приближении сильной связи обнаруживает ряд особенностей спектра в сильно коррелированных системах: псевдощель в электронном спектре и “разорванную” поверхность Ферми в виде дуг [17], которые наблюдаются в медно-оксидных соединениях.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы привели вывод уравнений сверхпроводимости для общей фермионно-бозонной модели (1) и модели Хаббарда (35) с сильной кулоновской корреляцией. В теории используется метод уравнений движения для двухвременных термодинамических ФГ, который позволяет легко получать уравнения

сильной связи типа уравнений Мигдала-Элиашберга при вычислении массового оператора в приближении непересекающихся диаграмм. В этом приближении не учитывается перенормировка вершин в массовом операторе, что может быть оправдано в случае электронно-фононного взаимодействия, а также для спин-флуктуационного рассеяния, поскольку для последнего существуют кинематические ограничения (например, первая диаграмма с пересечением равна нулю). В других случаях самосогласованный метод решения уравнений для ФГ и массового оператора корректирует возможные недостатки этого приближения. Поэтому эта теория может рассматриваться как первое физически значимое приближение в теории сверхпроводимости.

Проведенное в работе решение самосогласованной системы уравнений в приближении сильной связи в модели Хаббарда приводит к выводу о возможности сверхпроводящего d -волнового спаривания с высокой T_c , которое позволяет рассматривать его как механизм высокотемпературной сверхпроводимости в медно-оксидных соединениях. Это предположение было сделано в работе Боголюбова с соавторами [11], где метод двухвременных функций Грина был использован для изучения сверхпроводимости в полярной модели металла (32).

Отметим, что механизм спаривания в системах с сильной корреляцией отличается от спаривания в фермионно-бозонной модели, обусловленного притяжением электронов и понижением связанной с этим энергии взаимодействия. В системах с сильной корреляцией, характеризуемой энергией отталкивания U , спаривание возникает за счет кинематического взаимодействия, возникающего при движении электронов с энергией $\sim t$. При этом имеют место два канала спаривания: за счет межзонных переходов с большой энергией порядка U в промежуточном состоянии, которые приводят к понижению обменной энергии $J \sim t^2/U$, и за счет спин-флуктуационного рассеяния при перескоках в одной хаббардовской подзоне, которое дает понижение кинетической энергии пары электронов. Таким образом, спаривание приводит к более свободному движению электронов в обоих каналах перескока и связанному с этим понижению кинетической энергии: эффективная масса частиц в спаренном состоянии становится меньше. Это объяснение механизма сверхпроводимости в системах с сильной корреляцией (спаривание за счет уменьшения кинетической энергии) получило экспериментальное подтверждение в оптических экспериментах (см., например, работу [31] и библиографию в ней).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, *Докл. АН СССР*, **126** (1959), 53.
- [2] Д. Н. Зубарев, *УФН*, **71** (1960), 71.
- [3] J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, *Phys. Rev.* (2), **108** (1957), 1175.
- [4] Л. П. Горьков, *ЖЭТФ*, **34** (1958), 735.
- [5] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, *ЖЭТФ*, **39** (1960), 120.
- [6] Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ*, **38** (1960), 966; **39** (1960), 1437.
- [7] Д. Н. Зубарев, *Докл. АН СССР*, **132** (1960), 1055.
- [8] Г. М. Вуйичич, З. К. Петру, Н. М. Плакида, *ТМФ*, **46:1** (1981), 91.
- [9] N. M. Plakida, *Condens. Matter Phys. (Ukraine)*, **9:3(47)** (2006), 619.
- [10] J. G. Bednorz, K. A. Müller, *Z. Phys. B*, **64** (1986), 189.
- [11] N. N. Bogoliubov, V. L. Aksenov, N. M. Plakida, *Phys. C*, **153–155** (1988), 99.

- [12] Н. Н. Боголюбов, В. Л. Аксенов, Н. М. Плакида, *ТМФ*, **93**:3 (1992), 371.
- [13] N. M. Plakida, V. Yu. Yushankhai, I. V. Stasyuk, *Phys. C*, **160** (1989), 80; V. Yu. Yushankhai, N. M. Plakida, P. Kalinay, *Phys. C*, **174** (1991), 401.
- [14] Н. М. Плакида, *Письма в ЖЭТФ*, **74**:1 (2001), 38.
- [15] N. M. Plakida, V. S. Oudovenko, *Phys. Rev. B*, **59** (1999), 11949.
- [16] Н. М. Плакида, Л. Антон, С. Адам, Г. Адам, *ЖЭТФ*, **124** (2003), 367.
- [17] N. M. Plakida, V. S. Oudovenko, *ЖЭТФ*, **131**:2 (2007), 259.
- [18] Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнито-упорядоченных систем*, Наука, М., 1987.
- [19] Yu. A. Izyumov, B. M. Letfulov, *J. Phys. Condens. Matter*, **3** (1991), 5373; *Internat. J. Mod. Phys. B*, **6** (1992), 321.
- [20] Yu. A. Izyumov, V. M. Laptev, *Internat. J. Mod. Phys. B*, **5** (1991), 563.
- [21] Ph. B. Allen, B. Mitrović, *Solid State Phys.*, **37** (1982), 1.
- [22] J. P. Carbotte, *Rev. Mod. Phys.*, **62** (1990), 1027.
- [23] P. W. Anderson, *Science*, **235** (1987), 1196.
- [24] Н. Н. Боголюбов, *Лекции по квантовой статистике*, Рад. школа, Киев, 1949; Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов*, Т. VI, Ч. I, Наука, М., 2006, 121.
- [25] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **276** (1963), 238; **277** (1963), 237.
- [26] N. M. Plakida, *ФHT*, **32** (2006), 483.
- [27] N. M. Plakida, R. Hayn, J.-L. Richard, *Phys. Rev. B*, **51** (1995), 16599.
- [28] J. Beenen, D. M. Edwards, *Phys. Rev. B*, **52** (1995), 13636.
- [29] A. Avella, F. Mancini, D. Villani, H. Matsumoto, *Phys. C*, **282–287** (1997), 1757; T. Di Matteo, F. Mancini, H. Matsumoto, V. S. Oudovenko, *Phys. B*, **230–232** (1997), 915.
- [30] T. D. Stanescu, I. Martin, Ph. Phillips, *Phys. Rev. B*, **62** (2000), 4300.
- [31] J. E. Hirsch, *Science*, **295** (2002), 2226.

Поступила в редакцию 12.03.2007