Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Рыжов, Е. Е. Тареева, Бозе-конденсат ультрахолодных атомов в ловушках: бозе-бозе- и бозе-ферми-смеси, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 1, 147–163

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 05:47:06

© 2008 г.

В. Н. Рыжов*, Е. Е. Тареева*

БОЗЕ-КОНДЕНСАТ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ АТОМОВ В ЛОВУШКАХ: БОЗЕ–БОЗЕ- И БОЗЕ–ФЕРМИ-СМЕСИ

Представлен обзор работ авторов, посвященных теоретическому исследованию поведения смесей ультрахолодных атомов в оптомагнитных ловушках. Обсуждается разделение фаз и вихревые состояния в смесях бозе-атомов, а также устойчивость и вихревые состояния в бозе–ферми-смесях с притяжением между компонентами.

Ключевые слова: бозе–эйнштейновская конденсация, уравнение Гросса–Питаевского, бозе–бозе- и бозе–ферми-смеси, приближение Томаса–Ферми, устойчивость, вихри.

1. В настоящей работе, посвященной памяти Дмитрия Николаевича Зубарева, мы приводим некоторые результаты по теории бозе-конденсата в смесях ультрахолодных атомов в ловушках, полученные нами в последние годы (см., в частности, работы [1]–[8]).

Осуществленное более 10 лет назад экспериментальное наблюдение явления конденсации Бозе–Эйнштейна в разреженных парах металлов [9] открыло новые возможности для исследования макроскопических квантовых явлений в вырожденных системах. Как правило, эти системы состоят из нескольких десятков тысяч атомов, собирающихся в ограниченное облако вблизи минимума внешнего потенциала. Характерной их чертой является разреженность и пространственная неоднородность. На первом этапе атомы охлаждаются с помощью “лазерного охлаждения”, затем частично испаряются из ловушки. Поскольку атомы с большей энергией испаряются более энергично, испарение приводит к охлаждению газа. В результате удается получить температуру порядка сотен нК и наблюдать бозе-конденсацию.

Современное теоретическое описание разреженного бозе-газа в ловушках базируется на знаменитой работе Боголюбова 1947 г. [10], в которой было показано, что слабое отталкивание качественно меняет спектр возбуждений системы. Главным пунктом приближения Боголюбова явилось выделение из вторично квантованного ψ -оператора аннигиляции бозонов его классической части, описывающей конденсат. Используемое для описания поведения бозе-конденсата в ловушках уравнение Гросса–Питаевского [11] получается с помощью обобщения теории Боголюбова на

*Институт физики высоких давлений РАН, Троицк, Московская обл., Россия.
E-mail: ryzhov@hppi.troitsk.ru, etare@ms2.inr.ac.ru

пространственно неоднородный случай. Это уравнение, имеющее вид нелинейного уравнения Шредингера, является классическим по своей сущности, хотя и содержит в явном виде квантовую постоянную.

Целый ряд новых интересных эффектов в поведении бозе-конденсатов в ловушках проявляется в экспериментах со смесями ультрахолодных газов. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые задачи для таких смесей, а именно разделение фаз и вихревые состояния в бинарных смесях конденсатов для случаев совмещенных и сдвинутых центров ловушек и устойчивость бозе-системы в бозе-ферми-смеси с притяжением между бозонами и фермионами. Наши результаты хорошо описывают экспериментальные данные по смеси конденсатов, состоящих из атомов рубидия в двух спиновых состояниях, и смеси бозонных атомов рубидия и ферми-атомов калия.

Работа построена следующим образом. Во втором и третьем разделах рассмотрен двухкомпонентный бозе-конденсат с совмещенными ловушками, компоненты которого соответствуют двум внутренним состояниям спина атомов рубидия. Показано, что взаимодействие между конденсатами приводит к разделению фаз – образованию оболочек. Рассчитаны критические угловые скорости вращения конденсата, необходимые для порождения устойчивых вихревых состояний. Исследована зависимость картины от концентраций частиц в конденсатах. В четвертом разделе рассматривается та же задача, но при исходно сдвинутых центрах ловушек. Показано, что результирующий сдвиг центров масс конденсатов оказывается существенно больше за счет взаимодействия конденсатов, что соответствует экспериментальным результатам. Исследована устойчивость вихрей внешнего и внутреннего конденсатов в зависимости от смещения минимумов потенциалов ловушек по оси вращения. В пятом разделе рассмотрена смесь бозонов и фермионов на основе эффективного гамильтониана взаимодействия бозонов, полученного путем исключения фермионов. Показано, как возникает неустойчивость типа коллапса в результирующей бозонной системе при условии притяжения между бозонами и фермионами.

2. Рассмотрим прежде всего разделение фаз в бинарной смеси двух сортов бозонов в отсутствие вращения. Волновые функции $\psi_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2$, соответствующие конденсатам с числами частиц N_i и массами частиц m_i , удовлетворяют двум связанным нелинейным уравнениям Шредингера (уравнениям Гросса–Питаевского), которые могут быть получены минимизацией функционала энергии:

$$\begin{aligned} E(\psi_1, \psi_2) = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m_1} |\nabla \psi_1(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2) |\psi_1(\mathbf{r})|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2}{2m_2} |\nabla \psi_2(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2) |\psi_2(\mathbf{r})|^2 + \right. \\ \left. + \frac{G_{11}}{2} |\psi_1(\mathbf{r})|^4 + \frac{G_{22}}{2} |\psi_2(\mathbf{r})|^4 + G_{12} |\psi_1(\mathbf{r})|^2 |\psi_2(\mathbf{r})|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Химические потенциалы μ_1 и μ_2 определяются соотношениями

$$\int d^3r |\psi_i|^2 = N_i.$$

Величины взаимодействий G_{11} , G_{22} , G_{12} задаются s -волновой длиной рассеяния a_{ij} для парных соударений одинаковых и разных бозонов: $G_{ii} = 4\pi\hbar^2 a_{ii}/m_i$; $G_{12} = 2\pi\hbar^2 a_{12}/m$, где $m^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$. Мы все время будем иметь в виду эксперимент, описанный в работах [12], [13], где изучалось поведение смеси конденсатов, состоящей из атомов ^{87}Rb в спиновых состояниях $|F = 1, m_f = -1\rangle$ и $|2, 1\rangle$ (состояния 1 и 2, соответственно). В этом случае длины рассеяния соотносятся следующим образом: $a_{11} : a_{12} : a_{22} = 1.03 : 1 : 0.97$ со средним из них, равным $55(3)$ Å. Экспериментальное значение λ для цилиндрически-симметричного относительно оси z потенциала ловушки имеет порядок $\sqrt{8}$ ($\lambda = \omega_{zi}/\omega_i$).

Рассматривая разделение фаз только за счет взаимодействия конденсатов, для указанных выше состояний 1 и 2 имеем $(1/2)m_1\omega_1^2 = (1/2)m_2\omega_2^2$. Для упрощения уравнений перейдем к безразмерным переменным, вводимым с помощью длины $a_\perp = (\hbar/(m_1\omega_1))^{1/2}$: $\mathbf{r} = a_\perp \mathbf{r}'$, $E = \hbar\omega_1 E'$, $\psi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{N_i/a_\perp^3} \psi'_i(\mathbf{r}')$. Волновые функции $\psi'_i(\mathbf{r}')$ нормированы на единицу. В новых переменных уравнения для минимума функционала энергии имеют вид

$$-\nabla'^2 \psi'_1 + (x'^2 + y'^2 + \lambda^2 z'^2) \psi'_1 - \mu'_1 \psi'_1 + u_1 |\psi'_1|^2 \psi'_1 + \frac{4\pi a_{12} N_2}{a_\perp} \frac{m_1}{m} |\psi'_2|^2 \psi'_1 = 0, \quad (2)$$

$$-\beta^2 \nabla'^2 \psi'_2 + (x'^2 + y'^2 + \lambda^2 z'^2) \psi'_2 - \mu'_2 \psi'_2 + u_2 \beta^2 |\psi'_2|^2 \psi'_2 + \frac{4\pi a_{12} N_1}{a_\perp} \frac{m_1}{m} |\psi'_1|^2 \psi'_2 = 0, \quad (3)$$

где $\mu'_i = 2\mu_i/\hbar\omega_1$, $\beta^2 = m_1/m_2 = \omega_2^2/\omega_1^2$ и $u_i = 8\pi a_{ii} N_i/a_\perp$.

Для получения качественных аналитических результатов будем далее пользоваться приближением Томаса–Ферми (ТФ), пренебрегая членом, описывающим кинетическую энергию. В этом приближении уравнения (2) и (3) упрощаются, фазово-разделенные конденсаты не пересекаются и уравнения приводятся к простым алгебраическим уравнениям, справедливым в отдельных областях:

$$|\psi'_1(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_1} (\mu'_1 - (\rho'^2 + \lambda^2 z'^2)), \quad (4)$$

$$|\psi'_2(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_2 \beta^2} (\mu'_2 - (\rho'^2 + \lambda^2 z'^2)). \quad (5)$$

Здесь $\rho'^2 = x'^2 + y'^2$. Из уравнений (4) и (5) легко видеть, что плотность конденсата имеет эллипсоидальную форму.

В данном случае разделения фаз энергия системы с учетом уравнений (4) и (5) может быть записана в виде

$$E = E_1 + E_2, \quad (6)$$

где

$$E_1 = \frac{1}{2} \hbar\omega_1 N_1 \left[\mu'_1 - \frac{1}{2} u_1 \int d^3 r' |\psi'_1|^4 \right], \quad (7)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \hbar\omega_1 N_2 \left[\mu'_2 - \frac{1}{2} u_2 \beta^2 \int d^3 r' |\psi'_2|^4 \right]. \quad (8)$$

Определим теперь фактические области, занимаемые конденсатами 1 и 2. Предположим сначала, что атомы конденсата 1 образуют эллипсоидальную оболочку вокруг атомов конденсата 2 (назовем эту конфигурацию “ a ”). Эта форма конденсата определяется формой потенциала ловушки. Чтобы определить положение границы между конденсатами, будем использовать условие термодинамического равновесия для давлений

$$P_1 = P_2, \quad (9)$$

причем давление дается выражением [14]

$$P_i = \frac{G_{ii}}{2} |\psi_i|^4. \quad (10)$$

Конденсат 2 имеет форму эллипсоида с большой полуосью q :

$$\rho'^2 + \lambda^2 z'^2 = q^2. \quad (11)$$

Уравнение для q легко получить из (4), (5) и (9)–(11):

$$\mu'_1 - q^2 = \kappa \mu'_2 - \kappa q^2, \quad (12)$$

где $\kappa = \sqrt{(a_{11}m_2)/(a_{22}m_1)}$.

Из условия нормировки получаем химические потенциалы:

$$\mu'_1 = \frac{\mu_1^0}{(1 - (5/2)q'^3 + (3/2)q'^5)^{2/5}}, \quad (13)$$

$$\mu'_2 = \frac{3}{(\mu'_1)^{3/2}q'^3} \left(\frac{2\beta^2(\mu_2^0)^{5/2}}{15} + \frac{(\mu'_1)^{5/2}q'^5}{5} \right), \quad (14)$$

где $q = \sqrt{\mu'_1}q'$ и

$$\mu_i^0 = \left(\frac{15\lambda u_i}{8\pi} \right)^{2/5}. \quad (15)$$

Из уравнений (13)–(15) можно найти химические потенциалы μ'_1 и μ'_2 и полуось граничного эллипсоида q как функции N_1 и N_2 . Энергия конфигурации “ a ” $E_a = E_{a1} + E_{a2}$ имеет вид

$$E_{a1} = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_1 \left\{ \mu'_1 - \frac{15}{4} \frac{(\mu'_1)^{7/2}}{(\mu_1^0)^{5/2}} \left[\frac{8}{105} - \left(\frac{q'^3}{3} - \frac{2}{5} q'^5 + \frac{q'^7}{7} \right) \right] \right\}, \quad (16)$$

$$E_{a2} = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_2 \left\{ \mu'_2 - \frac{15}{4} \frac{(\mu'_1)^{3/2}}{\beta^2(\mu_2^0)^{5/2}} \left(\mu_2'^2 \frac{q'^3}{3} - 2\mu_2' \mu_1' \frac{q'^5}{5} + \mu_1'^2 \frac{q'^7}{7} \right) \right\}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь противоположный случай (конфигурация “ b ”), когда атомы конденсата 2 образуют эллипсоидальную оболочку вокруг конденсата 1. В этом случае вместо уравнений (12)–(17) получим

$$\mu''_1 - q_1^2 = \kappa(\mu''_2 - q_1^2), \quad (18)$$

$$(\mu''_2)^{5/2} = \frac{\beta^2(\mu_2^0)^{5/2}}{1 - (5/2)q_1'^3 + (3/2)q_1'^5}, \quad (19)$$

$$\frac{15}{2} \frac{(\mu_2'')^{3/2}}{(\mu_1^0)^{5/2}} \left(\frac{\mu_1'' q_1'^3}{3} - \frac{\mu_2'' q_1'^5}{5} \right) = 1, \quad (20)$$

$$E_b = E_{b1} + E_{b2},$$

$$E_{b1} = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_1 \left\{ \mu_1'' - \frac{15}{4} \frac{(\mu_2'')^{3/2}}{(\mu_1^0)^{5/2}} \left(\mu_1'' \frac{q_1'^3}{3} - 2\mu_1'' \mu_2'' \frac{q_1'^5}{5} + \mu_2'' \frac{q_1'^7}{7} \right) \right\}, \quad (21)$$

$$E_{b2} = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_2 \left\{ \mu_2'' - \frac{15}{4} \frac{(\mu_2'')^{7/2}}{\beta^2 (\mu_2^0)^{5/2}} \left[\frac{8}{105} - \left(\frac{q_1'^3}{3} - \frac{2}{5} q_1'^5 + \frac{q_1'^7}{7} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Здесь μ_1'' и μ_2'' – химические потенциалы для конфигурации “b”, а $q_1 = \sqrt{\mu_2''} q_1'$ – большая полуось граничного эллипсоида.

Чтобы найти более устойчивую конфигурацию, надо сравнить значения энергий E_a и E_b при подставленных в (21) и (22) решениях систем уравнений для μ и q . Ниже мы приведем результаты такого численного расчета, но сначала рассмотрим аналитически предельные случаи $n_2 = N_2/N_1 \ll 1$ и $n_1 = N_1/N_2 \ll 1$.

Так, в первом случае приближенное решение уравнений (12)–(14) имеет вид

$$\begin{aligned} q' &= q_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \kappa \right) q_0^2 - \frac{5}{6} q_0^3 \right], \\ \mu_1' &= \mu_1^0 (1 + q_0^3), \\ \mu_2' &= \frac{\mu_1^0}{\kappa} [1 + (\kappa - 1) q_0^2 + q_0^3], \end{aligned}$$

где $q_0 = (2n_2/(5\kappa))^{1/3}$. Аналогично получается решение уравнений (18)–(20) в виде ряда по $p_0 = (2n_2/(15\kappa^2))^{1/2}$. В результате разность энергий конфигураций записывается как

$$\Delta E = E_a - E_b = \frac{1}{2} \tilde{\hbar} \omega_1 N_1 \mu_1^0 \frac{1 - \kappa}{\kappa} n_2.$$

Таким образом, в этом пределе при $\kappa > 1$ устойчивой является конфигурация “a”.

Аналогичным образом можно показать, что в противоположном пределе $n_1 \ll 1$

$$\Delta E = E_a - E_b = \frac{1}{2} \tilde{\hbar} \omega_1 N_2 \mu_2^0 (1 - \kappa) n_1.$$

Снова при $\kappa = \sqrt{(a_{11}m_2)/(a_{22}m_1)} > 1$ более выгодной является конфигурация “a”.

Для вычисления ΔE в общем случае следует, кроме точного решения уравнений для μ и q , учесть и вклад от поверхностной энергии границы раздела, возникающий от градиентных членов, не учитываемых в приближении ТФ. Поверхностная энергия $E_s = \sigma S$, где S – поверхность соприкосновения, а σ – поверхностное натяжение. Поверхность соприкосновения является эллипсоидом с полуосью $a_\perp q$, и ее площадь имеет вид

$$S = 2\pi a_\perp^2 q^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} \right), \quad (23)$$

а поверхностное натяжение может быть записано, следуя работе [15], в виде

$$\sigma = \frac{\hbar \omega_1}{2\sqrt{2} a_\perp^2} \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} - 1 \right)^{1/2} (u_1 u_2 N_1 N_2)^{1/4} |\psi_1'| |\psi_2'| (N_1 |\psi_1'|^2 + N_2 |\psi_2'|^2)^{1/2}. \quad (24)$$

Расчет, проведенный по формулам (16), (17), (21)–(24) для данных, соответствующих упомянутому эксперименту с двумя состояниями атомов рубидия [12], [13], показал, что энергия E_a всегда ниже энергии E_b . Это находится в соответствии с качественными представлениями и экспериментальными наблюдениями, из которых следует, что энергетически предпочтительнее для атомов с большей длиной рассеяния образовывать оболочку низкой плотности вокруг атомов с меньшей длиной рассеяния [12], [16]. Заметим, что в нашем случае близких длин рассеяния вклад поверхностной энергии незначителен.

3. Рассмотрим теперь задачу предыдущего раздела с вращающейся ловушкой. Как известно [10], неидеальный бозе-конденсат обладает свойством сверхтекучести. Сверхтекучесть объемного гелия 4 хорошо известна, однако только сравнительно недавно были получены экспериментальные доказательства существования критической скорости (ключевой характеристики сверхтекучих систем) в бозе-конденсате атомов натрия в ловушке [17]. Следствием сверхтекучести является существование квантованных вихрей. В сверхтекучем гелии 4 вихри могут быть созданы посредством охлаждения вращающегося контейнера с гелием ниже температуры перехода. В случае ультрахолодных атомов в ловушке вихри впервые были экспериментально созданы в фазово-разделенной смеси бозе-конденсатов атомов ^{87}Rb [13] посредством лазерного возбуждения вращения внешнего конденсата (см. также работу [18]). Следует заметить, что в покоящемся конденсате ультрахолодных атомов в ловушке вихри неустойчивы [19].

Пусть ловушка вращается с частотой Ω вокруг оси z . Волновая функция конденсата в случае вихревого возбуждения с угловым моментом $\hbar l_j$ имеет вид

$$\psi_{l_j}(\mathbf{r}) = |\psi_{l_j}(\mathbf{r})| e^{il_j \phi}. \quad (25)$$

Во вращающейся системе координат функционал энергии системы запишем в виде

$$E_{\text{rot}}(l_1, l_2) = E(\psi_{l_1}, \psi_{l_2}) + \int d^3r (\psi_{l_1}^* + \psi_{l_2}^*) i \hbar \Omega \partial_\phi (\psi_{l_1} + \psi_{l_2}). \quad (26)$$

Подставляя волновую функцию (25) в формулу (26), видим, что эффективный потенциал конфайнмента для бозонов принимает вид $l_1^2 \hbar^2 / (2m_1 \rho^2) + l_2^2 \hbar^2 / (2m_2 \rho^2) + V_1 + V_2$, где $V_i = m_i \omega_i (\rho^2 + \lambda^2 z^2) / 2$ и $\rho^2 = x^2 + y^2$. Таким образом, в рамках приближения Томаса–Ферми в непересекающихся областях волновые функции вихревых состояний даются выражениями

$$|\psi'_1(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_1} \left(\mu'_1(l_1) - (\rho'^2 + \lambda^2 z'^2) - \frac{l_1'^2}{\rho'^2} \right), \quad (27)$$

$$|\psi'_2(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_2 \beta^2} \left(\mu'_2(l_2) - (\rho'^2 + \lambda^2 z'^2) - \frac{\beta^2 l_2'^2}{\rho'^2} \right). \quad (28)$$

В этом случае важным новым свойством является появление малой полости радиуса ξ , $\xi_i^2 \propto l_i^2 / \mu_i(l_i)$, в то время как остальная часть конденсата практически не изменилась. Мало изменились за счет вихревых состояний и величины химических

потенциалов $(\mu'_i(l_i) - \mu'_i)/\mu'_i$. Используя результаты работ [20], [21] можно показать, что эти изменения имеют порядок $1/N^{4/5}$. Таким образом, при расчете физических характеристик можно использовать старые плотности и просто обрезать встречающиеся расходящиеся интегралы на размере кора $\xi_1^2 = l_1^2/\mu'_1$ или $\xi_2^2 = \beta^2 l_2^2/\mu'_2$. Заметим, что использование невозмущенной плотности при расчете свойств вихрей соответствует гидродинамическому приближению.

Наличие вихрей меняет энергию фазово-разделенного конденсата на величину $\Delta E(l_1, l_2) = E_{\text{rot}}(l_1, l_2) - E_{\text{rot}}(0, 0)$. Используя формулы (7), (8) и (25), (26), получим

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_{N_1} + \Delta E_{N_2} = \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_1 \int d^3 r' \left(\frac{l_1}{\rho'^2} |\psi'_1|^2 - \frac{2\Omega l_1}{\omega_1} |\psi'_1|^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \hbar \omega_1 N_2 \int d^3 r' \left(\frac{l_2 \beta^2}{\rho'^2} |\psi'_2|^2 - \frac{2\Omega l_2}{\omega_1} |\psi'_2|^2 \right). \end{aligned} \quad (29)$$

В гидродинамическом пределе ψ'_i даются выражениями (4) и (5).

Рассмотрим конфигурацию “a”. В гидродинамическом пределе положение фазовой границы дается уравнением (11). Из выражения (29) получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_{N_1}}{(1/2) \hbar \omega_1 N_1} &= \frac{5l_1^2 (\mu'_1)^{3/2}}{(\mu_1^0)^{5/2}} \left\{ \left[\ln \frac{2\mu'_1}{l_1} - \frac{4}{3} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} q' \left[\left(1 - \frac{1}{3} q'^2 \right) \ln \frac{2\mu'_1 q'}{l_1} - \left(1 - \frac{q'^2}{9} \right) \right] \right\} - \frac{2\Omega l_1}{\omega_1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_{N_2}}{(1/2) \hbar \omega_1 N_2} &= \frac{15l_2^2 (\mu'_1)^{1/2} q'}{2(\mu_2^0)^{5/2}} \left[\left(\mu'_2 - \frac{1}{3} \mu'_1 q'^2 \right) \ln \frac{2\sqrt{\mu'_1 \mu'_2} q'}{l_2 \beta} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu'_2 - \frac{\mu'_1 q'^2}{9} \right) \right] - \frac{2\Omega l_2}{\omega_1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Критические угловые скорости вращения конденсатов, необходимые для получения вихревых состояний, могут быть определены из условий $\Delta E_{N_1}^a < 0$, $\Delta E_{N_2}^a < 0$. На рис. 1 приведены эти критические скорости в зависимости от логарифма отношения N_2/N_1 .

Аналогичным образом можно провести расчет для конфигурации “b” и найти наиболее выгодную по полной энергии конфигурацию. Если вихрь “сидит” на конденсате атомов типа 1, то как для $l = 1$, так и для $l = 2$ это означает вращение внешней оболочки в случае конфигурации “a” и вращение внутренней части в случае конфигурации “b”. Если вихрь “сидит” на конденсате атомов типа 2, то вращение внешней оболочки соответствует конфигурации “b”, а вращение внутренней части – конфигурации “a”. Наиболее интересный результат представлен на рис. 2.

В случае вихря с $l = 2$ конфигурация “b” с вихревым кольцом конденсата атомов типа 2 во внешней оболочке является устойчивой во всей области относительных концентраций N_1 и N_2 , в то время как в случае вихря с $l = 1$ конденсата атомов типа 1 эта конфигурация устойчива только при низких значениях отношений N_2/N_1 или N_1/N_2 . Когда же значения N_1 и N_2 приближаются друг к другу, кольцо атомов

Рис. 1. Критические угловые скорости как функции $\log_{10}(N_2/N_1)$ для конфигурации “a”. Сплошная линия соответствует внешнему конденсату 1 Ω_{N_1}/ω_1 , штриховая – внутреннему конденсату 2 Ω_{N_2}/ω_1 .

Рис. 2. Полные энергии конфигураций “a” и “b” $E_a/(\hbar\omega_1)$ (сплошная линия) и $E_b/(\hbar\omega_1)$ (пунктирная линия) как функции $\log_{10}(N_2/N_1)$.

типа 2 проскакивает к центру ловушки. Это находится в согласии с экспериментом [13].

4. В работе [12] экспериментально было обнаружено еще одно интересное явление. А именно, продемонстрировано, что когда минимумы потенциалов V_1 и V_2 ловушек для конденсатов 1 и 2 сдвинуты друг относительно друга на расстояние, малое по сравнению с полным размером конденсата, результирующее расстояние между центрами масс конденсатов оказывается значительно большим. Покажем, как можно получить этот результат, основываясь на изложенном в предыдущих разделах.

Физическим основанием этого увеличения является тот факт, что имеются две возможные конечные конфигурации смеси, и система находится близко к “критической точке”, разделяющей эти конфигурации. Первая конфигурация – симметричная, когда одна компонента находится внутри другой (рассмотренная выше) и выгодная, когда $\kappa = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$ отлично от 1, а вторая – асимметричная, разделенная вертикальной плоскостью, рассмотрена детально в работах [22], [23], [24]. Эта асимметричная конфигурация обладает меньшей энергией поверхности соприкосновения и выгодна, когда значение κ близко к 1. В этом разделе работы мы покажем аналитически в приближении ТФ, что фактор увеличения расстояния между центрами масс конденсатов по сравнению с исходным расстоянием между центрами ловушек пропорционален $1/(\kappa - 1)$. Мы найдем также критические угловые скорости, необходимые для возникновения вихрей во внешнем и внутреннем конденсатах, когда центры ловушек сдвинуты.

Будем рассматривать ту же задачу и в тех же приближениях, что и прежде, но со сдвигом потенциала ловушек для конденсатов 1 и 2 на величину $2z_0$ вдоль оси z . В безразмерных переменных раздела 2 уравнения Гросса–Питаевского теперь будут отличаться от прежних лишь сдвигом по z' : в уравнении (2) следует z' заменить на $z' + z_0'$, а в уравнении (3) – на $z' - z_0'$. Теперь вместо (4) и (5) получим для плотностей выражения

$$|\psi'_1(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_1}(\mu'_1 - (r'^2 + \lambda^2(z' + z'_0)^2))\Theta(\mu'_1 - (r'^2 + \lambda^2(z' + z'_0)^2)) \times \\ \times \Theta(r'^2 + \lambda^2(z' - z'_0)^2 - \mu'_2), \quad (32)$$

$$|\psi'_2(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{u_2}(\mu'_2 - (r'^2 + \lambda^2(z' - z'_0)^2))\Theta(\mu'_2 - (r'^2 + \lambda^2(z' - z'_0)^2)) \times \\ \times \Theta(r'^2 + \lambda^2(z' + z'_0)^2 - \mu'_1). \quad (33)$$

Здесь Θ обозначает единичную ступенчатую функцию. Остальные обозначения те же, что и раньше, а для энергии справедливы формулы (6)–(8). Чтобы определить положение границы между конденсатами, снова используем условие термодинамического равновесия для давлений. В результате получим уравнение для границы раздела:

$$\rho''^2 + \left(\lambda z'' - \frac{\alpha(\kappa + 1)}{\kappa - 1} \right)^2 = R^2, \quad (34)$$

Рис. 3. Расстояние между центрами масс конденсатов, деленное на полную длину в направлении z , как функция α для $N_1 = N_2$, рассчитанное в приближении ТФ (сплошная линия) и посредством численной минимизации функционала энергии (пунктирная линия).

где $z' = \sqrt{\mu_1'} z''$, $\rho' = \sqrt{\mu_1'} \rho''$, $\alpha = \lambda z_0''$ и

$$R^2 = \frac{\mu_1' - \kappa \mu_2'}{\mu_1' (1 - \kappa)} + \frac{4\alpha^2 \kappa}{(\kappa - 1)^2}. \quad (35)$$

Как мы уже говорили, эффективный сдвиг пропорционален $1/(\kappa - 1)$. На рис. 3 представлен расчет для данных из эксперимента по рубидию как на основе приведенных формул в приближении ТФ, так и для моделирования по методу Монте-Карло. В приближении ТФ для $\alpha = 0.03$ расстояние между центрами масс составляет 32% от всей протяженности конденсата, в то время как экспериментальное значение – 20% [12].

Уравнения (34), (35) описывают эволюцию системы при росте α следующим образом. Для $\alpha = 0$ конденсат 1 образует оболочку вокруг эллипсоидального конденсата 2 (см. выше). С ростом α внутренний эллипсоид движется вверх, а наружный – вниз. Можно показать, что они касаются друг друга в точке $\alpha_c = (1/2)(1 - \sqrt{\mu_2'/\mu_1'})$. При $\alpha > \alpha_c$ фазовая граница (34) пересекает границы конденсатов в точках с координатами

$$\lambda z_c'' = \frac{\alpha}{\kappa - 1} - \frac{(\kappa - 1)(R^2 - 1)}{4\alpha\kappa}, \quad (36)$$

$$r_{1,2}'' = \pm \sqrt{1 - (\lambda z_c'' + \alpha)^2}. \quad (37)$$

С ростом α фазовая граница становится более плоской, причем изменение формы является существенным даже при очень малых изменениях α .

Другой интересной задачей является изменение вихревых состояний при сдвиге потенциалов ловушек конденсатов. По-прежнему в приближении ТФ справедливы

Рис. 4. Критические угловые скорости Ω_{N_1}/ω_1 и Ω_{N_2}/ω_1 как функции α для различных значений N_2/N_1 : $N_1 = 3N_2$ (а); $N_1 = N_2$ (б); $N_1 = N_2/3$ (в). Сплошная линия соответствует внешнему конденсату 1, штриховая – внутреннему конденсату 2.

формулы (26) и (29), но со сдвигом центров ловушек, указанным выше. Учет этого сдвига приводит к следующей картине.

Как было показано выше, в случае $\alpha = 0$ при всех значениях N_2/N_1 критическая скорость Ω_{N_2} внутреннего конденсата ниже, чем критическая скорость внешнего конденсата Ω_{N_1} . Таким образом, при росте скорости вращения конденсатов Ω первым появится вихрь на внешнем конденсате. Однако, если при заданной скорости Ω сдвинуть центры потенциалов ловушек друг относительно друга в вертикальном направлении, то внутренний конденсат быстро расширится. При этом разница критических скоростей уменьшится и даже исчезнет при некоторых значениях α и N_2/N_1 .

На рис. 4 показано поведение критических скоростей как функций α для разных значений N_2/N_1 . Из рис. 4б видно, что критические скорости действительно могут пересекаться. Физически это означает, что имеется возможность “пересадить” вихрь с одного конденсата на другой с помощью сдвига центров ловушек друг относительно друга при фиксированной угловой скорости. Интересно было бы проверить это предсказание экспериментально.

5. В этом разделе мы рассмотрим смесь бозе- и ферми-газов в ловушках и покажем, что в случае притяжения между бозе- и ферми-частицами может иметь место

неустойчивость типа коллапса. Из-за принципа Паули ферми-система сама по себе не может быть охлаждена, в отличие от бозе-системы. Однако, находясь в тепловом равновесии с взаимодействующим с ней бозе-газом, она охладится в области пересечения бозе- и ферми-систем [25]–[27].

Мы будем исследовать устойчивость бозонно-фермионной системы с притяжением между бозонами и фермионами в ловушке, используя эффективный гамильтониан бозе-системы, полученный в работах [5]–[7]. Нам удалось количественно изучить свойства смеси ^{87}Rb и ^{40}K , экспериментально исследованной в работе [27], авторы которой обнаружили коллапс бозонного и фермионного облаков при некотором критическом числе бозонов N_{Bc} . Полученные нами значения N_{Bc} при разном числе фермионов и разных температурах находятся в хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Будем использовать представление для большой статистической суммы бозе-ферми-смеси в виде функционального интеграла [28]:

$$Z = \int D[\phi^*]D[\phi]D[\psi^*]D[\psi] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} (S_{\text{B}}(\phi^*, \phi) + S_{\text{F}}(\psi^*, \psi) + S_{\text{int}}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi)) \right\}. \quad (38)$$

Здесь интегрирование ведется по комплексному полю $\phi(\tau, \mathbf{r})$, периодическому на интервале мнимого времени $[0, \hbar\beta]$, и по грассманову полю $\psi(\tau, \mathbf{r})$, антипериодическому на этом интервале. Соответственно $\phi(\tau, \mathbf{r})$ описывает бозе-компоненту смеси, а $\psi(\tau, \mathbf{r})$ – ферми-компоненту. Бозе-газу соответствует член

$$S_{\text{B}}(\phi^*, \phi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \phi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{\text{B}}} + V_{\text{B}}(\mathbf{r}) - \mu_{\text{B}} \right) \phi(\tau, \mathbf{r}) + \frac{g_{\text{B}}}{2} |\phi(\tau, \mathbf{r})|^4 \right\}. \quad (39)$$

Так как принцип Паули запрещает s -волновое рассеяние между ферми-атомами в одном и том же сверхтонком состоянии, то член, относящийся к ферми-газу, записывается в виде

$$S_{\text{F}}(\psi^*, \psi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \psi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{\text{F}}} + V_{\text{F}}(\mathbf{r}) - \mu_{\text{F}} \right) \psi(\tau, \mathbf{r}) \right\}. \quad (40)$$

Взаимодействию между компонентами соответствует член

$$S_{\text{int}}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi) = g_{\text{BF}} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} |\psi(\tau, \mathbf{r})|^2 |\phi(\tau, \mathbf{r})|^2. \quad (41)$$

Здесь $g_{\text{B}} = 4\pi\hbar^2 a_{\text{B}}/m_{\text{B}}$ и $g_{\text{BF}} = 2\pi\hbar^2 a_{\text{BF}}/m_{\text{I}}$, $m_{\text{I}} = m_{\text{B}}m_{\text{F}}/(m_{\text{B}} + m_{\text{F}})$, m_{B} и m_{F} – массы бозе- и ферми-атомов, соответственно, a_{B} и a_{BF} обозначают s -волновые длины рассеяния для бозонно-бозонного и бозонно-фермионного взаимодействий.

Интегралы по ферми-полям являются гауссовыми, так что ферми-поля можно проинтегрировать в части статистической суммы Z_{F} , связанной с S_{F} и S_{int} , и

получить эффективный бозонный гамильтониан в виде (подробности см. в работах [5]–[7])

$$H_{\text{eff}} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_B} |\nabla\phi|^2 + (V_B(\mathbf{r}) - \mu_B) |\phi|^2 + \frac{g_B}{2} |\phi|^4 + f_{\text{eff}}(|\phi|) \right\}. \quad (42)$$

Здесь $\epsilon = p^2/2m_F$, $\tilde{\mu} = \mu_F - V_F(\mathbf{r}) - g_{BF}|\phi(\mathbf{r})|^2$ и $\eta = 2^{1/2}m_F^{3/2}/(3\pi^2\hbar^3)$. Первые три члена в выражении (42) имеют обычный вид, соответствующий уравнению Гросса–Питаевского, а последний член возникает из-за взаимодействия бозонов с фермионами. В пределе низких температур $\tilde{\mu}/(k_B T) \gg 1$ можно записать

$$f_{\text{eff}}(|\phi|) = -\frac{2}{5}\eta\tilde{\mu}^{5/2} - \frac{\pi^2}{4}\eta(k_B T)^2\tilde{\mu}^{1/2}. \quad (43)$$

Как обычно, химический потенциал μ_F может быть определен из уравнения

$$N_F = \int d\mathbf{r} n_F(\mathbf{r}), \quad (44)$$

где

$$n_F(\mathbf{r}) = \frac{3}{2}\eta \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \tilde{\mu})}}. \quad (45)$$

При низких температурах

$$n_F(\mathbf{r}) = \eta\tilde{\mu}^{3/2} + \frac{\pi^2\eta}{8\tilde{\mu}^{1/2}}(k_B T)^2. \quad (46)$$

В принципе можно исследовать свойства бозе-ферми-смеси с помощью f_{eff} (43) без всяких разложений. Однако можно учесть тот факт, что, как легко проверить, разложение функции $f(x) = (1+x)^{5/2}$ (входящей в выражение (43)) до третьего порядка дает хорошее приближение для $f(x)$ даже при больших значениях x (лучшее, чем более высокие разложения), и рассматривать соответствующее разложение для эффективного гамильтониана, которое к тому же имеет прозрачный физический смысл:

$$H_{\text{eff}} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_B} |\nabla\phi|^2 + (V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu_B) |\phi|^2 + \frac{g_{\text{eff}}}{2} |\phi|^4 + \frac{\eta}{8\mu_F^{1/2}} g_{BF}^3 |\phi|^6 \right\}, \quad (47)$$

где

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{3}{2}\eta\mu_F^{1/2}g_{BF} \right) \frac{1}{2}m_B\omega_B^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2), \quad (48)$$

$$g_{\text{eff}} = g_B - \frac{3}{2}\eta\mu_F^{1/2}g_{BF}^2 \quad (49)$$

и $\rho^2 = x^2 + y^2$.

При выводе формул (47)–(49) мы также использовали тот факт, что вследствие принципа Паули (квантового давления) радиус бозе-конденсата много меньше, чем радиус ферми-облака $R_F \approx \sqrt{\mu_F/V_0}$, так что можно использовать разложение по степеням $V_F(\mathbf{r})/\mu_F$.

Из уравнения (48) видно, что взаимодействие с ферми-газом приводит к эффективному изменению потенциала ловушки. В случае притяжения между фермионами и бозонами система ведет себя так, как если бы удерживающий потенциал имел большие частоты, чем фактические, что находится в согласии с экспериментом [27]. Кроме того, бозонно-фермионное взаимодействие приводит к дополнительному притяжению между бозонами независимо от знака g_{BF} .

Последний член в H_{eff} (47) соответствует трехчастичным *упругим* столкновениям, возникающим вследствие бозонно-фермионного взаимодействия. В противоположность *неупругим* трехчастичным столкновениям, в результате которых имеет место рекомбинация и удаление частиц из системы [29], этот член при $g_{\text{BF}} < 0$ приводит к возрастанию плотности газа в центре ловушки, что дает понижение общей энергии. Стабилизируют систему два первых члена в выражении (47). Однако, если плотность в центре растет слишком сильно, кинетическая энергия и бозонно-бозонное отталкивание более не в состоянии предотвратить коллапс газа, который имеет место, когда число частиц превосходит некоторое критическое значение N_{Bc} .

Критическое значение N_{Bc} можно вычислить, используя хорошо известное вариационное выражение для волновой функции бозонов [30]:

$$\phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{N_{\text{B}} \lambda}{w^3 a^3 \pi^{3/2}} \right)^{1/2} e^{-(\rho^2 + \lambda^2 z^2)/(2w^2 a^2)}, \quad (50)$$

где w – безразмерный вариационный параметр, фиксирующий ширину конденсата (линейный поперечный размер), $a = \sqrt{\hbar/(m_{\text{B}} \omega_{\text{B}})}$.

В этом случае вариационная энергия E_{B} принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{B}}}{N_{\text{B}} \hbar \omega_{\text{B}}} &= \frac{2 + \lambda}{4} \frac{1}{w^2} + b w^2 + \frac{c_1 N_{\text{B}}}{w^3} + \frac{c_2 N_{\text{B}}^2}{w^6}, \\ b &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \eta \mu_{\text{F}}^{1/2} g_{\text{BF}} \right), \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left(g_{\text{B}} - \frac{3}{2} \eta \mu_{\text{F}}^{1/2} g_{\text{BF}}^2 \right) \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2} \hbar \omega_{\text{B}} a^3}, \\ c_2 &= \frac{\eta}{8 \mu_{\text{F}}^{1/2}} g_{\text{BF}}^3 \frac{\lambda^2}{3^{3/2} \pi^3 \hbar \omega_{\text{B}} a^6}. \end{aligned} \quad (51)$$

На рис. 5 приведена энергия (51) как функция w для нескольких значений N_{B} . Расчет проводился для параметров, соответствующих эксперименту [27]. Видно, что при $N_{\text{B}} < N_{\text{Bc}}$ функция E_{B} имеет локальный минимум, соответствующий метастабильному состоянию системы. Этот минимум возникает из-за конкуренции суммы трех положительных первых членов в выражении (51) и отрицательного четвертого члена. Этот локальный минимум исчезает, когда число бозонов превосходит критическое значение, которое рассчитывается из требования, чтобы первая и вторая производные от E_{B} исчезали в критической точке. В этом случае поведение E_{B} определяется в основном вторым и четвертым членами выражения (51).

Рис. 5. Вариационная энергия $E_b = E_B/(N_B \hbar \omega_B)$ как функция w для различных значений числа бозонов: сплошная линия – $N_B = 9 \cdot 10^4$; штриховая линия – $N_B = 7 \cdot 10^4$; пунктир – $N_B = 5 \cdot 10^4$. Число фермионов $N_F = 20000$.

Для $N_F = 2 \times 10^4$ и $a_{BF} = -19.44$ нм получаем $N_{Bc} \approx 9 \times 10^4$ в хорошем согласии с экспериментом [27].

С ростом числа фермионов отталкивание между бозонами уменьшается, что приводит к коллапсу при меньшем значении числа бозонов. Заметим также, что критическое число бозонов очень чувствительно к значению бозонно-фермионной длины s -волнового рассеяния.

В бозонной подсистеме смеси бозонов и фермионов могут существовать вихри [8], что свидетельствует о существовании сверхтекучести в этой системе. Вариационная функция в этом случае имеет вид

$$\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\lambda N_B}{(\omega a)^5 \pi^{3/2}}} \rho e^{-(\rho^2 + \lambda^2 z^2)/(2\omega^2 a^2)} e^{i\varphi l}.$$

Соответствующая вариационная энергия может быть легко рассчитана:

$$\frac{E_B}{N_B \hbar \omega_B} = \frac{2 + \lambda^2 + 2l^2}{4} \frac{1}{\omega^2} + B\omega^2 + \frac{C_1 N_B}{\omega^3} + \frac{C_2 N_B^2}{\omega^6},$$

$$B = \frac{5}{3}b, \quad C_1 = \frac{1}{2}c_1, \quad C_2 = \frac{2}{9}c_2.$$

На рис. 6 представлена вариационная энергия системы с вихрями и без вихрей. Видно, что появление вихря увеличивает критическое значение бозонов, тем самым повышая устойчивость системы. Это понятно физически, так как наличие вихря снижает плотность бозонов в центре ловушки, тем самым снижая рекомбинацию бозонов, являющуюся физической причиной коллапса системы.

Рис. 6. Вариационная энергия $E_b = E_B/(N_B \hbar \omega_B)$ как функция w для различных значений числа бозонов: сплошная линия – $N_B = 5 \cdot 10^4$; штриховая линия – $N_B = 9 \cdot 10^4$; пунктир – $N_B = 13.8 \cdot 10^4$. Число фермионов $N_F = 20000$. Жирные линии соответствуют системе с вихрем.

В заключение заметим, что открытие бозе-конденсации ультрахолодных атомов в оптомагнитных ловушках предоставило широкие возможности для теоретического и экспериментального исследования поведения квантовых систем. Это открытие произошло спустя почти 50 лет после основополагающей работы Боголюбова [10], в которой впервые на микроскопическом уровне было объяснено явление сверхтекучести в слабонеидеальном бозе-газе. Долгое время этот результат рассматривался как иллюстративный и не имеющий приложения к реальным системам. Однако ультрахолодные атомы в оптомагнитных ловушках как раз являются замечательным примером слабонеидеального квантового газа, к которому полностью применим формализм, развитый в работе [10] (с соответствующим обобщением уравнений Гросса–Питаевского на случай неоднородного газа). Интересно отметить, что достаточно простые уравнения теории Боголюбова, во многих случаях допускающие аналитическое исследование, позволяют получать не только качественное, но и количественное согласие с экспериментом, что и было в некоторой степени продемонстрировано в настоящей работе.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17621, 05-02-17280).

Список литературы

- [1] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *ЖЭТФ*, **118**:6(12) (2000), 1366.
- [2] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *Phys. Rev. A*, **63** (2001), 023605.

- [3] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *J. Phys. Condens. Matter*, **14**:4 (2002), L77.
- [4] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *Письма в ЖЭТФ*, **75**:5 (2002), 279.
- [5] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *Письма в ЖЭТФ*, **80**:4 (2004), 305.
- [6] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 043607.
- [7] S. T. Chui, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *Phys. Part. Nucl.*, **36**:1 Suppl. (2005), S107.
- [8] A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, S. T. Chui, V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. A*, **73** (2006), 053608.
- [9] M. N. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269** (1995), 198.
- [10] Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **11** (1947), 77.
- [11] Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ*, **40** (1961), 646; E. P. Gross, *Nuovo Cimento* (10), **20** (1961), 454; *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 195.
- [12] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 1539; E. A. Cornell, D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, *Having it both ways: distinguishable yet phase-coherent mixtures of Bose–Einstein condensates*, [arXiv: cond-mat/9808105](#).
- [13] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 2498.
- [14] Л. П. Питаевский, *УФН*, **168**:6 (1998), 641.
- [15] E. Timmermans, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 5718.
- [16] H. Pu, N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 1130.
- [17] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio et al., *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 2502.
- [18] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 806.
- [19] D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 2164.
- [20] A. L. Fetter, *J. Low Temp. Phys.*, **113** (1998), 189; “Theory of a dilute low-temperature trapped Bose condensate”, *Bose–Einstein Condensation in Atomic Gases*, International School of Physics Enrico Fermi, **140**, eds. M. Inguscio, S. Stringari, C. Wieman, IOS Press, Amsterdam, 1999; [arXiv: cond-mat/9811366](#).
- [21] S. Sinha, *Phys. Rev. A*, **55** (1997), 4325.
- [22] P. Ao, S.-T. Chui, *Phys. Rev. A*, **58** (1998), 4836.
- [23] P. Öhberg, S. Stenholm, *Phys. Rev. A*, **57** (1998), 1272.
- [24] S. T. Chui, P. Ao, *Phys. Rev. A*, **59** (1999), 1473.
- [25] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer et al., *Science*, **302** (2003), 2101.
- [26] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin et al., *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 080403.
- [27] G. Modugno, G. Roati, F. Riboli et al., *Science*, **297** (2002), 2240.
- [28] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, М., 1976.
- [29] Yu. Kagan, A. E. Muryshv, G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 933.
- [30] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.*, **71** (1999), 463.

Поступила в редакцию 4.06.2007