Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, Размерная перенормировка в p -адических моделях теории поля, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 3, 462–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 05:11:28

© 2000 г.

Э. Ю. Лернер*, М. Д. Миссаров*

РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА В p -АДИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дано определение дробно-мерных p -адических фейнмановских амплитуд и построена процедура размерной перенормировки с минимальными вычитаниями. В случае фермионной модели другая процедура размерной перенормировки определяется как обращение нормализующего отображения для преобразования иерархической ренормализационной группы в тривиальной неподвижной точке.

Этой работой мы заканчиваем цикл статей по теории перенормировок p -адических фейнмановских амплитуд [1–4]. Мотивацию интереса к p -адическим моделям математической физики, обсуждение ряда таких моделей и введение в p -адический анализ можно найти в книге Владимирова, Воловича, Зеленова [5]. В работах [2, 3] построена теория аналитических перенормировок в схемах минимальных вычитаний для p -адических фейнмановских амплитуд. В работе [4] показано, что аналитическая перенормировка в p -адической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели может быть определена как обращение нормализующего отображения для преобразования ренормализационной группы (РГ) иерархической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели в тривиальной неподвижной точке. В этом случае перенормировка определяется сразу путем задания контрчленов без вычисления вершинных частей отдельных фейнмановских амплитуд. Близкое построение можно выполнить и для бозонной φ^4 -теории [6].

Теория размерной перенормировки в евклидовых моделях квантовой теории поля изучалась в работах [7, 8]. В настоящей работе мы рассматриваем размерную перенормировку в p -адических моделях. В разделе 1 дается определение p -адических фейнмановских интегралов, размерность аргументов которых принимает комплексное значение. В разделе 2 мы исследуем полюсы этих амплитуд как обобщенных функций (по размерности пространства) и строим процедуру размерной перенормировки с минимальными вычитаниями. В разделе 3 мы анализируем $(4-d)$ -разложение в фермионной иерархической модели, определяем преобразование иерархической РГ при дробной размерности d и строим процедуру размерной перенормировки через обращение нормализующего отображения к преобразованию РГ в гауссовской неподвижной точке.

*Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: Moukadas.Missarov@ksu.ru

1. p -АДИЧЕСКИЕ ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ В ДРОБНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Пусть G – некоторый граф, $L(G)$ – множество ребер, $V(G)$ – множество вершин графа. Последнее делится на две части: множество внутренних вершин $V_{\text{int}} \equiv V_{\text{int}}(G)$ и множество внешних вершин графа $V_{\text{ext}} \equiv V_{\text{ext}}(G)$. В этом разделе мы считаем, что концы $i(l)$, $f(l)$ любого ребра l графа G не совпадают (в теории графов это так называемые графы без петель).

Сопоставим каждой вершине v графа G точку y_v d -мерного p -адического пространства Q_p^d . Напомним, что норма $\|y\|_p$ d -мерного p -адического вектора x определяется как максимум из p -адических норм его компонент. Фейнмановская амплитуда, соответствующая графу G , в координатном представлении определяется формулой

$$F_G(y_{V_{\text{ext}}}; \lambda; d) = \int_{(Q_p^d)^{V_{\text{int}}}} \prod_{l \in L(G)} \|y_{i(l)} - y_{f(l)}\|_p^{\lambda_l} \prod_{v \in V_{\text{int}}} dy_v, \quad (1)$$

где dy – мера Хаара на пространстве Q_p^d . Фейнмановский интеграл зависит от набора комплексных параметров $\lambda = (\lambda_l, l \in L(G))$ и вектора внешних переменных $y_{V_{\text{ext}}} = (y_v, v \in V_{\text{ext}})$. В дальнейшем мы будем опускать индекс V_{ext} в обозначении вектора внешних переменных. Мы будем рассматривать фейнмановский интеграл при несовпадающих значениях внешних переменных: $y_v \neq y_{v'}$, если $v \neq v'$, $v, v' \in V_{\text{ext}}$. В дальнейшем мы будем также опускать индекс p в обозначении нормы.

Обозначим через $A(y) = (a_{v,v'})_{v,v' \in V_{\text{ext}}}$ матрицу попарных расстояний между внешними переменными графа G : $a_{v,v'} = \|y_v - y_{v'}\|$. Из ультраметричности p -адического расстояния следует, что для любых v, v' и v'' выполнено неравенство

$$\max\{a_{v,v''}, a_{v'',v'}\} \leq a_{v,v'}, \quad (2)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} a_{v,v'} &\in \{p^k, k \in \mathbb{Z}\}, & \text{если } v &\neq v', \\ a_{v,v'} &= 0, & \text{если } v &= v'. \end{aligned} \quad (3)$$

Легко показать, что для любой симметричной матрицы A , элементы которой удовлетворяют условиям (2), (3), существует размерность d_0 такая, что для всех $d \geq d_0$ существует вектор $y = (y_v, v \in V_{\text{ext}})$, $y_v \in Q_p^d$, для которого $A(y) = A$. Обозначим через S совокупность симметричных матриц, для которых выполнены условия (2), (3).

Без ограничения общности мы будем предполагать, что граф G связан и имеет не менее двух внешних вершин. Напомним, что нетривиальный связный подграф H графа G называется отделимым, если любой путь из вершины $v \in V(H)$ в вершину $v' \in V(G) \setminus V(H)$ проходит через фиксированную вершину $v_0 \in V(H)$, причем все вершины подграфа H , за исключением, может быть, вершины v_0 , являются внутренними вершинами графа G .

В работе [9] было показано, что для любого графа G , не содержащего отделимых подграфов, для любой размерности d существует область $\Omega_d(G)$ значений параметров λ , в которой фейнмановский интеграл $F_G(y; \lambda; d)$ сходится.

Каждая матрица $A \in S$ порождает иерархию $\mathcal{H}_A$ на множестве V_{ext} . Напомним (см. [1]), что иерархия $\mathcal{H}$ на конечном множестве V определяется как семейство $\mathcal{H}$ подмножеств V таких, что $V \in \mathcal{H}$, $\{v\} \in \mathcal{H}$ для всех $v \in V$, и для любой пары $V' \in \mathcal{H}$, $V'' \in \mathcal{H}$ либо $V' \cap V'' = \emptyset$, либо $V' \subset V''$, либо $V'' \subset V'$. Для любого $V' \in \mathcal{H}$ мы обозначим через $\tau(V')$ минимальное подмножество в $\mathcal{H}$, содержащее V' , но не совпадающее с ним (предполагая, что $V' \neq V$). Пусть $K(V') = \{V'' \in \mathcal{H} \mid \tau(V'') = V'\}$. В дальнейшем мы будем употреблять обозначение $k(V') = |K(V')|$.

В нашем случае иерархия $\mathcal{H}_A$ на V_{ext} определяется следующим образом:

$$\mathcal{H}_A = \left\{ V \subseteq V_{\text{ext}} : \max_{v, v' \in V} a_{v, v'} < \min_{v \in V, v' \in V_{\text{ext}} \setminus V} a_{v, v'} \right\}.$$

Далее мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\lambda(V, V') = \sum_{l \in L(V, V')} \lambda_l, \quad \lambda(V) = \lambda(V, V),$$

где $L(V, V')$ — множество всех линий, которые соединяют вершины множества V с вершинами множества V' .

Пусть I обозначает некоторое разбиение V_{int} , индексированное элементами $\mathcal{H}' = \{V' \in \mathcal{H} : |V'| > 1\}$:

$$I = \{I_V; V \in \mathcal{H}'\}, \quad I_{V'} \cap I_{V''} = \emptyset, \quad \text{если} \quad V' \neq V'', \quad \bigcup_{V \in \mathcal{H}'} I_V = V_{\text{int}}$$

(некоторые из частей разбиения I могут быть пустыми). Для любого $V \in \mathcal{H}$ определим множество $W(V; I)$ как

$$W(V; I) = \left(\bigcup_{V' \subseteq V, V' \in \mathcal{H}'} I_{V'} \right) \cup V.$$

Положим, что

$$\beta(V; I; \lambda; d) = \lambda(W(V; I)) - \sum_{V' \in K(V)} \lambda(W(V'; I)) + d|I_V|, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} c(V; I; \lambda; d) = & \int_{(Q_p^d)^{I_V}} \prod_{l \in L(I_V)} \|y_{i(l)} - y_{f(l)}\|^{\lambda_l} \times \\ & \times \prod_{v \in I_V} \left(\prod_{V' \in K(V)} |y_v - j_{V'}|^{\lambda(v, W(V'; I))} \right) dy_v, \end{aligned} \quad (5)$$

где $L(I_V)$ – множество всех ребер подграфа G , порожденного вершинами I_V , $j = \{j_{V'}, V' \in K(V)\}$ – произвольный набор d -мерных p -адических векторов таких, что $\|j_{V'} - j_{V''}\| = 1$, если $V' \neq V''$. Заметим, что $c(V; I; \lambda; d)$ не зависит от выбора j .

Пример иерархической структуры на множестве внешних вершин и некоторого разбиения множества внутренних вершин представлен на рисунке. Темные кружки соответствуют внешним вершинам графа, светлые кружки – внутренним вершинам. Множество темных кружков в определенном прямоугольнике соответствует определенному элементу V из $\mathcal{H}'$. Множество светлых кружков в этом же прямоугольнике, не принадлежащих внутренним прямоугольникам, соответствует I_V , а множество всех кружков, лежащих внутри этого прямоугольника, задает множество $W(V; I)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть y – вектор внешних переменных, $A = A(y)$, $\mathcal{H}$ – иерархия, порождаемая матрицей A . Имеет место формула

$$F_G(y; \lambda; d) = \sum_I \prod_{V \in \mathcal{H}'} c(V; I; \lambda; d) \max_{v, v' \in V} (a_{v, v'})^{\beta(V; I; \lambda; d)}, \quad (6)$$

где сумма берется по всем разбиениям I множества V_{int} , индексированным элементами $\mathcal{H}'$, а коэффициенты $\beta(V; I; \lambda; d)$ и $c(V; I; \lambda; d)$ определяются формулами (4) и (5).

Доказательство этой теоремы (в одномерном случае) приведено в работе [1].

Заметим также, что коэффициент $c(V; I; \lambda; d)$ можно трактовать как фейнмановскую амплитуду для стянутого графа $G_V|_{\{G_{V'}, V' \in K(V)\}}$. Здесь G_V обозначает граф с множеством вершин (внутренних и внешних) $V(I)$, а $G_V|_{\{G_{V'}, V' \in K(V)\}}$ есть граф, в котором все вершины из V' , $V' \in K(V)$, стягиваются в одну точку, которая обозначается как $\{V'\}$. При этом каждой внешней вершине $\{V'\}$ стянутого подграфа приписывается внешняя переменная $j_{V'}$.

Коэффициент $c(V; I; \lambda; d)$ представляется конечной суммой слагаемых типа

$$p^b \prod_{i=1}^n g^i,$$

где g^i есть интеграл вида

$$\int \prod_{v, v' \in V_i} \|x_v - x_{v'}\|^{\gamma_i(v, v')} \prod_{v \in V_i} \chi(x_v) dx_v,$$

$V_i \in V(G)$, а γ_i и b – целочисленные линейные комбинации коэффициентов λ_l , $l \in L(G)$, и размерности d ($\chi(x)$ – индикатор шара единичного радиуса с центром в нуле в пространстве Q_p^d). Этот факт в одномерном случае доказан в работе [1], обобщение на d -мерный случай не представляет труда.

Пусть

$$g_V(\gamma; d) = \int \prod_{v, v' \in V} \|x_v - x_{v'}\|^{\gamma(v, v')} \prod_{v \in V} \chi(x_v) dx_v.$$

Для любого $V' \subseteq V$ определим

$$\gamma(V') = \sum_{v, v' \in V'} \gamma(v, v').$$

В работе [1] (см. также [2]) было доказано, что если интеграл $g_V(\gamma; d)$ сходится, то справедлива следующая формула:

$$g_V(\gamma; d) = p^{\gamma(V)} \sum_{\mathcal{H}} \prod_{V' \in \mathcal{H}'} \frac{(p^d - 1) \dots (p^d - k(V') + 1)}{p^{\gamma(V') + d(|V'| - 1)} - 1}, \quad (7)$$

где суммирование ведется по всем иерархиям $\mathcal{H}$ на множестве V .

Из формулы (7) и теоремы 1 следует, что при фиксированной матрице попарных расстояний $A = A(y)$ интеграл $F_G(y; \lambda; d)$ представляет собой рациональную функцию от переменной p^d и переменных p^{λ_l} , $l \in L(G)$, и, таким образом, является мероморфной функцией от λ_l и d . Мы обозначим эту функцию $\Phi_{A, G}(\lambda; d)$, ее можно считать определением интеграла $F_G(y; \lambda; d)$ для любой комплексной размерности d . При фиксированных значениях p и $A(y)$ такое определение в классе рациональных функций от переменных p^d и p^{λ_l} , $l \in L(G)$, единственно возможное. Поскольку мы будем изучать все интегралы как функции от λ и d , то будем трактовать матрицу A как параметр.

2. РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА p -АДИЧЕСКИХ ФЕЙНМАНОВСКИХ АМПЛИТУД

В разделе 1 мы рассматривали фейнмановские интегралы как регулярные функции. Для описания сингулярностей p -адических амплитуд и построения процедуры размерной перенормировки необходимо исследовать свойства этих амплитуд как обобщенных функций. Поскольку основные функции в p -адическом случае представляют из себя конечные линейные комбинации индикаторов шаров, то достаточно изучить интегралы вида

$$F'(j; \lambda; d; r) = \int_{(Q_p^d)^{V_{\text{ext}}}} F_G(y; \lambda; d) \prod_{v \in V_{\text{ext}}} \chi_r(y_v - j_v) dy_v,$$

где $r = p^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\chi_r(x) = \chi(r^{-1}x)$ – индикатор шара радиуса r с центром в нуле, $j_v \in Q_p^d$. Пусть $B(j)$ – матрица попарных расстояний между центрами шаров j_v , $v \in V_{\text{ext}}$. Без ограничения общности можно считать, что эта матрица не содержит ненулевых элементов, меньших или равных r .

Ниже мы построим аналитическое продолжение функции $F'(\lambda; d; j; r)$ по переменной d при фиксированной матрице $B(j)$ и изучим полюсы этого продолжения. Отметим, что ранее в работе [3] рассматривались полюсы p -адических фейнмановских интегралов как функций от переменных λ_l , $l \in L(G)$, при фиксированном натуральном значении d , при этом основным аппаратом исследования фейнмановских интегралов являлось разложение по малым, большим и ограниченным значениям внешних переменных, введенное в [9]. Аналогичное разложение существует и для интегралов $F'(\lambda; d; j; r)$.

Пусть $m, M \in \{0, \infty\} \cup \{p^n, n \in \mathbb{Z}\}$ и $m < M$. Обозначим через $F_G(y; \lambda; d; m, M)$ фейнмановский интеграл с “обрезанным пропагатором”:

$$F_G(y; \lambda; d; m, M) = \int_{(Q_p^d)^{V_{\text{int}}}} \prod_{l \in L(G)} \|y_l\|^{\lambda_l} (\chi_M(y_l) - \chi_m(y_l)) \prod_{v \in V_{\text{int}}} dy_v, \quad (8)$$

где $y_l = y_{i(l)} - y_{f(l)}$. При $m > 0$ (или $M < \infty$) для любого связного графа G в некоторой области значений параметров λ определен вакуумный интеграл

$$f_G(\lambda; d; m, M) = \int_{(Q_p^d)^{V'}} \prod_{l \in L(G)} \|y_l\|^{\lambda_l} (\chi_M(y_l) - \chi_m(y_l)) \prod_{v \in V'} dy_v.$$

Здесь $V' = V(G) \setminus \{v_0\}$, v_0 – любая фиксированная вершина из множества $V(G)$ (легко видеть, что значение интеграла f_G не зависит от ее выбора). Если граф G несвязен, то положим, что

$$f_G(\lambda; d; m, M) = \prod_{i=1}^n f_{G_i}(\lambda; d; m, M),$$

где G_i – компоненты связности графа G .

Очевидно, что интеграл $f_G(\lambda; d; 0, 1)$ совпадает с интегралом $g_{V(G)}(\lambda; d)$, явная формула для которого дана в предыдущем разделе. Явную формулу для интеграла $f_G(\lambda; d; 1, \infty)$ удобнее всего записать в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} f_G(\lambda; d; 1, \infty) &= \sum_{\mathcal{R}} \frac{f_{G|_{\{G_V, V \in \mathcal{R}\}}}(\lambda; d; 1, \infty)}{1 - p^{\lambda(V(G)) + d(|V(G)| - 1)}} \times \\ &\times \prod_{V \in \mathcal{R}} p^{\lambda(V)} (p^d - 1) \dots (p^d - |V| + 1), \end{aligned} \quad (9)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $\mathcal{R}$ на множестве $V(G)$ таким, что $|\mathcal{R}| < |V(G)|$, обозначение $G|_{\{G_V, V \in \mathcal{R}\}}$ было введено в предыдущем разделе. Таким образом, интегралы $f_G(\lambda; d; 0, M)$ и $f_G(\lambda; d; m, \infty)$ при фиксированных значениях m и M представляют собой рациональные функции от переменных p^{λ_l} и p^d . Если считать d

комплексной переменной, то эти интегралы являются мероморфными функциями от d и λ_l .

Ниже, также при произвольном комплексном значении параметра d , мы определим функции $F_G(y; \lambda; d; m, M)$ в случаях $0 < m, M < \infty$ и $0 < m, M = \infty$.

Используя ультраметричность p -адической нормы, несложно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть $A \in S$, $A(y) = A$ и $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. Тогда $F_G(y; \lambda; d; 1, M)$ есть полином $P_{A,M}$ от переменных p^d и p^{λ_l} , $l \in L(G)$.

Очевидно, что

$$F_G(y; \lambda; d; m, M) = m^{\sum_{l \in L(G)} \lambda_l + d|V_{\text{int}}(G)|} F_G(y; \lambda; d; 1, M/m).$$

Таким образом, функция $F_G(y; \lambda; d; m, M)$ определена при всех значениях d . Пусть $A \in S$. Определим функцию

$$\Phi_{A,G}(\lambda; d; m, M) = F_G(y; \lambda; d; m, M), \quad (10)$$

где $A(y) = A$, $0 < m \leq M < \infty$, d в этом равенстве можно считать произвольным комплексным числом.

Пусть G — связный граф. Обозначим через G/H фактор-граф графа G по подграфу H . Напомним, что в теории фейнмановских интегралов подграф H называется полным, если он связан и редуцированный граф G/H не содержит петель. Подграф H называется остовным, если $V(H) = V(G)$. Обозначим через $\pi(G)$ совокупность остовных подграфов H графа G , каждая компонента связности которых представляет собой полный подграф, $\pi'(G)$ — часть $\pi(G)$, состоящая из таких подграфов H , что $L(G/H)$ не содержит ребер, соединяющих внешние вершины графа G . Пусть $H \in \pi'(G)$. Назовем вершину графа G/H внешней, если она соответствует компоненте связности графа H , содержащей хотя бы одну внешнюю вершину. Пусть $M = p^n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $M \geq \max_{v, v' \in V_{\text{ext}}} \|y_v - y_{v'}\|$. Разложение по большим значениям внешних переменных фейнмановского интеграла заключается в следующем представлении интеграла $F_G(y; \lambda; d; m, \infty)$:

$$F_G(y; \lambda; d; m, \infty) = \sum_{H \in \pi'(G)} f_{\widehat{G/H}}(\lambda; d; M, \infty) F_H(y; \lambda; d; m, M), \quad (11)$$

где $\widehat{G/H}$ — граф, получающийся из G/H отождествлением всех его внешних вершин (в работе [10] в формуле (11) ошибочно приведен граф G/H вместо графа $\widehat{G/H}$). Пользуясь формулами (9)–(11), мы можем определить при $A(y) = A$ функцию

$$\Phi_{G,A}(\lambda; d; m, \infty) = F_G(y; \lambda; d; m, \infty).$$

Определим $\pi(G; r)$ как множество таких подграфов H из $\pi(G)$, что если v и v' содержатся в одной компоненте связности графа H , то $b_{v,v'} = \|j_v - j_{v'}\| \leq r$, т.е. $j_v = j_{v'}$ (здесь $b_{v,v'}$ — элемент матрицы $B(j)$). Имеет место формула

$$F'_G(j; \lambda; d; r) = \sum_{H \in \pi(G; r)} r^{|V_{\text{ext}}| - C(H)} F_{G/H}(j'; \lambda; d; r, \infty) f_H(\lambda; d; 0, r), \quad (12)$$

где $C(H)$ — число компонент связности графа H , имеющих непустое множество внешних вершин; $j' = (j'_1, \dots, j'_{C(H)})$ — вектор внешних переменных графа $G' = G/H$; внешняя переменная j_k , соответствующая компоненте связности H_k графа H , полагается равной j_v , v — какая-либо из вершин $V(H_k) \cap V_{\text{ext}}(G)$. Заметим, что интеграл $F'_G(j; \lambda; d; r)$ определен и в том случае, когда некоторые из компонент вектора j' совпадают.

Определим функцию $\Phi_{G,B,r}(\lambda; d)$, где $B \in S$, при комплексных значениях d соотношением

$$\Phi_{G,B,r}(\lambda; d) = \sum_{H \in \pi(G;r)} r^{|V_{\text{ext}}| - C(H)} \Phi_{G/H,B'}(\lambda; d; r, \infty) f_H(\lambda; d; 0, r),$$

где B' — матрица попарных расстояний между внешними вершинами графа G/H , индуцированная матрицей B попарных расстояний между внешними вершинами графа G . В силу формулы (12) при $B(j) = B$, $d \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Phi_{G,B,r}(\lambda; d) = F'_G(j; \lambda; d; r).$$

В дальнейшем мы положим $\lambda_l = 2 - d$ для всех $l \in L(G)$, весь набор таких значений λ обозначим $\lambda_0(d)$. Такому выбору λ в импульсном представлении соответствует пропагатор $\|k\|_p^{-2}$, который можно считать p -адическим аналогом пропагатора $\|k\|^{-2}$, соответствующего оператору Лапласа в евклидовой квантовой теории поля.

Напомним, что подграф H называется одновершинно неприводимым, если удаление из него любой вершины вместе с инцидентными ей ребрами не увеличивает числа компонент связности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G — связный граф, $B \in S$, $r = p^n$, $n \in \mathbb{N}$. Полюсы функции $\Phi_{G,B,r}(\lambda_0(d); d)$ лежат в множестве точек

$$d = \frac{2|L(H)| + 2\pi i k / \ln p}{|L(H)| - |V(H)| + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

где H — полный одновершинно неприводимый подграф графа G такой, что $|V(H) \cap V_{\text{ext}}(G)| \leq 1$ (ультрафиолетовая серия полюсов), и

$$d = \frac{2|L(\widehat{G/H})| + 2\pi i k / \ln p}{|L(\widehat{G/H})| - |V(\widehat{G/H})| + 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где H — полный подграф графа $\widehat{G}$ такой, что граф $\widehat{G/H}$ одновершинно неприводим (инфракрасная серия полюсов).

В частности, если G — граф φ^4 -теории, то функция $\Phi_{G,B,r}(\lambda_0(d); d)$ может иметь ультрафиолетовый полюс при $d = 4$.

Пусть $d = 4 - \varepsilon$. Сопоставим каждому нетривиальному подграфу H , $H \in \pi(G)$, некоторый полином, называемый вершинной частью подграфа,

$$O(H) = \sum_{1 \leq j \leq |V(H)|-1} a_j \varepsilon^{-j}.$$

Если $|V(H)| = 1$, то положим, что $O(H) = 1$. Пусть G – связный граф. Определим оператор размерной перенормировки

$$R^{\dim} \Phi_{G,B,r}(\lambda_0(4-\varepsilon); 4-\varepsilon) = \sum_{H \in \pi(G;r)} \Phi_{G/H,B',r}(\lambda_0(4-\varepsilon); 4-\varepsilon) O(H). \quad (14)$$

Заметим, что $\pi(G;r) \subseteq \pi(G)$. Обычно при определении процедуры перенормировки суммирование в формуле вида (14) ведется по всем подграфам $H \in \pi(G)$. Но можно показать, что для $H \in \pi(G) \setminus \pi(G;r)$ при целых значениях размерности d выполняется $F'_{G/H}(j; \lambda; d; r) = 0$, поэтому мы исключаем соответствующие слагаемые из разложения в формуле (14) и при произвольном значении d .

ТЕОРЕМА 3. *Существует не зависящий от матрицы B и константы r набор полиномов $O(H)$, при котором для любого графа G φ^4 -теории перенормированные фейнмановские амплитуды $R^{\dim} \Phi_{G,B,r}(\lambda_0(4-\varepsilon); 4-\varepsilon)$ являются мероморфными функциями переменной ε , аналитичными при $\varepsilon = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теорем 2 и 3 аналогичны доказательствам соответствующих результатов для случая аналитической перенормировки, приведенных в работе [3].

3. $(4-d)$ -РАЗЛОЖЕНИЕ И РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА КАК НОРМАЛИЗУЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть $T_p^d = \{x \in Q_p^d : x = \{x\}\}$, $\{x\}$ – дробная часть p -адического вектора x , T_p^d является иерархической решеткой относительно p -адического расстояния. Сопоставим каждому узлу этой решетки четырехкомпонентные спины $\xi^*(i) = (\bar{\xi}_1(i), \xi_1(i), \bar{\xi}_2(i), \xi_2(i))$, компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана. Рассмотрим фермионное поле, задаваемое гамильтонианом

$$H(\xi^*; f; r, g) = H_0(\xi^*; f) + \sum_{i \in T_p^d} L(\xi^*(i); r, g),$$

где гауссовская часть

$$H_0(\xi^*; f) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \sum_{i,j \in T_p^d: \|i-j\|=p^k} (\bar{\xi}_1(i)\xi_1(j) + \bar{\xi}_2(i)\xi_2(j)), \quad f = (f(0), f(1), \dots),$$

а взаимодействие определяется потенциалом

$$L(\xi^*(i); r, g) = r(\bar{\xi}_1(i)\xi_1(i) + \bar{\xi}_2(i)\xi_2(i)) + g\bar{\xi}_1(i)\xi_1(i)\bar{\xi}_2(i)\xi_2(i).$$

Обобщая результаты, приведенные в [11], можно показать, что РГ-преобразование

$$(r(\alpha; d)\xi^*)(j) = p^{-\alpha d/2} \sum_{i \in T_p^d: \|i-p^{-1}j\| \leq p} \xi^*(i)$$

преобразует гамильтониан $H(\xi^*; f; r, g)$ в гамильтониан $H(\xi^*; f'; r', g')$, где

$$\begin{aligned} f'(0) &= p^{d(\alpha-1)} f(0) + (p^{d\alpha} - p^{d(\alpha-1)}) f(1), \quad f'(k) = p^{d\alpha} f(k+1), \quad k = 1, 2, \dots, \\ r' &= p^{d(\alpha-1)} \left(\frac{(r + f(1) - f(0))^2 - g}{(r + f(1) - f(0))^2 - g/p^d} (r + f(1) - f(0)) + f(0) - f(1) \right), \\ g' &= p^{d(2\alpha-3)} \left(\frac{(r + f(1) - f(0))^2 - g}{(r + f(1) - f(0))^2 - g/p^d} \right)^2 g. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют РГ-преобразование в пространстве коэффициентных функций $(f; r, g)$, которое можно назвать пространством обобщенных гамильтонианов. Заметим, что оно корректно определено и при комплексных значениях d .

С точностью до постоянного множителя гауссовская неподвижная точка $(f_0(\alpha; d); 0, 0)$ задается формулами

$$f_0(0; \alpha; d) = \frac{1 - p^{-d}}{1 - p^{-d\alpha}}, \quad f_0(k; \alpha; d) = \frac{1 - p^{d(\alpha-1)}}{1 - p^{-d\alpha}} p^{-kd\alpha}.$$

РГ-преобразование $R(\alpha; d)$, действующее в пространстве констант (r, g) , при $f = f_0$ имеет вид

$$r' = p^{d(\alpha-1)} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/p^d} (r+1) - 1 \right), \quad g' = p^{d(2\alpha-3)} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/p^d} \right)^2 g.$$

Пусть $\alpha = (d+2)/d$. Как будет показано ниже, при таком выборе α ядро гауссовской части непрерывной (p -адической) модели является аналогом лапласовского ядра в непрерывном случае. Пусть $d = 4 - \varepsilon$. Тогда при $\varepsilon = 0$ от гауссовской ветви отделяется негауссовская ветвь $f_0((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); r(\varepsilon), g(\varepsilon))$, где

$$r(\varepsilon) = \frac{p^{2-\varepsilon/2} - p^2}{1 - p^{2-\varepsilon/2}}, \quad g(\varepsilon) = \frac{r(\varepsilon)(1+r(\varepsilon))^2}{1+r(\varepsilon)+p^{-2+\varepsilon/2}}. \quad (15)$$

Рассмотрим p -адическую $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модель, которая задается гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\psi^*; \alpha; r, g) = \mathcal{H}_0(\psi^*; \alpha) + \int L(\psi^*(x); u, v) dx,$$

где гауссовская часть имеет вид

$$\mathcal{H}_0(\psi^*; \alpha) = \frac{1 - p^{d(\alpha-1)}}{1 - p^{-d\alpha}} \int \|x - y\|^{-\alpha d} (\bar{\psi}_1(x) \psi_1(y) + \bar{\psi}_2(x) \psi_2(y)) dx dy,$$

dx — мера Хаара на Q_p^d . Гауссовская часть $\mathcal{H}_0(\psi^*; \alpha)$ инвариантна относительно групп скейлинговых преобразований

$$(S_\lambda(\alpha; d)\psi^*)(x) = \|\lambda\|^{(1-\alpha)d/2} \psi^*(\lambda x),$$

где $\alpha \in R$ – параметр этой группы, $\lambda \in Q_p^d$. Действие преобразования $S_{p^{-1}}(\alpha; d)$ в пространстве гамильтонианов сводится к растяжению констант связи, которое мы обозначим через $S(\alpha; d)$:

$$S(\alpha; d)(u, v) = (p^{d(\alpha-1)}u, p^{d(2\alpha-3)}v).$$

Рассмотрим последовательность измельчающихся иерархических решеток $T_{p,m}^d$: $T_{p,m}^d = p^m T_p^d$. Дискретизацией поля $\psi(x)$ на иерархическую решетку $T_{p,m}^d$ назовем случайное поле $\xi_m(j)$, $j \in T_{p,m}^d$, определяемое как усреднение поля ψ по шарам $\Delta_m(j) = \{x \in Q_p^d : |x - j| \leq p^{-m}\}$:

$$\xi_m^*(j) = p^{md} \langle \psi^*, \chi_{m,j} \rangle \equiv p^{md} \int \psi^*(x) \chi_{m,j}(x) dx, \quad (16)$$

$\chi_{m,j}(x) = \chi((x - j)/p^m)$ – индикатор шара $\Delta_m(j)$. Гамильтониан дискретизованного поля ξ_m имеет вид (см. [12])

$$H'(\xi^*; \alpha, d; r_m, g_m) = H_{m,0}(\xi_m^*; \alpha) + \sum p^{-md} L(\xi_m^*(i); r_m, g_m),$$

где $r_m = r_m(u, v; \alpha, d)$, $g_m = g_m(u, v; \alpha, d)$, а гауссовская часть задается формулой

$$\begin{aligned} H_{m,0}(\xi_m^*; \alpha) = & \sum_{\substack{i,j \in T_{p,m}^d \\ i \neq j}} |i - j|^{-\alpha d} p^{-2md} (\bar{\xi}_{m,1}(i) \xi_{m,1}(j) + \bar{\xi}_{m,2}(i) \xi_{m,2}(j)) + \\ & + \sum_{i \in T_{p,m}^d} p^{m(\alpha-2d)} \frac{1 - p^{-d}}{1 - p^{-\alpha d}} (\bar{\xi}_{m,1}(i) \xi_{m,1}(i) + \bar{\xi}_{m,2}(i) \xi_{m,2}(i)). \end{aligned}$$

Определим оператор дискретизации

$$P_m(\alpha, d)(u, v) = (r_m(u, v; \alpha, d), g_m(u, v; \alpha, d)).$$

В частности, оператор дискретизации $P_0(\alpha, d)$ при натуральных значениях d определяется нетривиальным функциональным интегралом

$$L(\xi^*(0); r_0(u, v), g_0(u, v)) = -\ln \langle \exp \{ -L(\xi^*(0) + \eta^*(x); 0, 0) dx \} \rangle_{\mu(d\eta^*)}, \quad (17)$$

где среднее берется по гауссовской мере с бинарной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_k(x) \eta_l(y) \rangle &= \delta_{k,l} \chi(x - y) \left(\frac{1 - p^{d(1-\alpha)}}{1 - p^{d(\alpha-2)}} \|x - y\|^{(\alpha-2)d} - \frac{1 - p^{-d}}{1 - p^{d(\alpha-2)}} \right), \\ \langle \bar{\eta}_k(x) \bar{\eta}_l(y) \rangle &= \langle \eta_k(x) \eta_l(y) \rangle = 0, \quad k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Функции $r_0(u, v)$ и $g_0(u, v)$ разлагаются в ряды:

$$r_0(u, v) = \sum_{k,l: k+l \geq 1} a_{k,l}^2 u^k v^l, \quad g_0(u, v) = \sum_{k,l: k+l \geq 1} a_{k,l}^4 u^k v^l,$$

где коэффициенты разложения $a_{k,l}^i$ суть суммы фейнмановских интегралов $\Phi'_G(\alpha; d)$ для графов G с k 4-хвостками и l 2-хвостками и i внешними линиями. Здесь

$$\Phi'_G(\alpha; d) = \int \prod_{l \in L(G)} \left(\frac{1 - p^{d(\alpha-2)}}{1 - p^{d(1-\alpha)}} \|y_l\|^{(\alpha-2)d} - \frac{1 - p^{d(\alpha-2)}}{1 - p^{-d}} \right) \prod_{v \in V(G)} \chi(y_v) dy_v,$$

где G — произвольный граф, из каждой вершины которого выходят две или четыре линии. Отметим, что интеграл $\Phi'_G(\alpha; d)$ представляет собой рациональную функцию от p^α и p^d и поэтому имеет аналитическое продолжение на произвольные значения d и α .

Действие оператора дискретизации $P_0(\alpha; d)$ проще вычислять из функционального уравнения

$$R(\alpha; d)P_0(\alpha; d) = P_0(\alpha; d)S(\alpha; d). \quad (18)$$

Так как собственные числа оператора $R(\alpha; d)$ в точке $(0, 0)$ совпадают с диагональными элементами матрицы линейного оператора $S(\alpha, d)$, то оператор $P_0(\alpha, d)$ может рассматриваться как нормализующее преобразование к отображению $R(\alpha; d)$ в точке $(r = 0, g = 0)$, корректно определенное при условии отсутствия резонансов [13, 4]. Несложно показать, что имеет место соотношение

$$P_m = S^m P_0 S^{-m}. \quad (19)$$

В равенстве (18) d можно считать произвольным комплексным числом. Пусть $\alpha = (d + 2)/d$. Дифференциал РГ-преобразования $R((d + 2)/d; d)$ в точке $(r = 0, g = 0)$ (которая соответствует гауссовской неподвижной точке) имеет собственные числа $\lambda_1 = p^2$ и $\lambda_2 = p^{4-d}$. Напомним, что резонансные значения d определяются из условий $\lambda_1^k \lambda_2^l = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $k, l = 1, 2, \dots$, $k + l \geq 2$. Отсюда видно, что значение $d = 4$ является резонансным. Любое рациональное значение $d > 4$ также является резонансным, а при $d < 4$ резонансные значения задаются формулой $d = 4 - 2/l$, $l = 2, 3, \dots$. Эти резонансные значения полюсов совпадают с серией ультрафиолетовых полюсов, задаваемых формулой (13).

Пусть $d = 4 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В этом случае $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 1$. Если d нерезонансно, то по теореме Пуанкаре [13] формальный ряд для нормализующего отображения $P(1 + 2/d; d)$, где $d = 4 - \varepsilon$, корректно определен и сходится в некоторой окрестности точки $(u = 0, v = 0)$.

Преобразование $P_0^{-1}((6 - \varepsilon)/(4 - \varepsilon); 4 - \varepsilon)$, обратное к оператору дискретизации, можно считать новым вариантом размерной перенормировки. В самом деле, процедуру перенормировки можно понимать как процедуру отыскания констант связи непрерывной теории (контрчленов)

$$w_1(u, v) = \sum_{k, l: k+l \geq 1} c_{k,m}^1 u^k v^l, \quad w_2(u, v) = \sum_{k, l: k+l \geq 1} c_{k,m}^2 u^k v^l$$

таких, что константы связи гамильтонианов дискретизации теории на решетку $T_{p,m}^d$

$$r_m(w_1(u, v), w_2(u, v)), \quad g_m(w_1(u, v), w_2(u, v)), \quad m \in \mathbb{N},$$

не содержат сингулярностей по ε в коэффициентах разложения по степеням u и v . Отображение P^{-1} задает подходящий выбор контрчленов $w_1(u, v)$, $w_2(u, v)$, поскольку из коммутационных соотношений (18), (19) следует, что

$$P_m P_0^{-1} = S^m P_0 S^{-m} P_0^{-1} = S^m P_0 P_0^{-1} R^m = S^m R^{-m},$$

где операторы $S((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); 4-\varepsilon)$ и $R((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); 4-\varepsilon)$ не сингулярны по ε в нуле. Преобразование $P_0^{-1}((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); 4-\varepsilon)$, в отличие от оператора $R^{\dim}$ размерной перенормировки с минимальными вычитаниями (см. раздел 2), сразу задается как отображение в пространстве констант связи.

Обычно перенормировка определяется в терминах фейнмановских диаграмм заданием вершинных частей $O(H)$ (см. раздел 2). Покажем, что введенная перенормировка также может быть определена подобным образом. Отметим, что в классических схемах действие оператора перенормировки R на фейнмановскую амплитуду F_G задается формулой

$$RF_G = \sum_{H \in \pi(G)} F_{G/H} O(H),$$

т.е. суммирование ведется по наборам *полных* подграфов графа G . В современных схемах перенормировки (см. [14, 15]) действие оператора R имеет вид

$$RF_G = \sum_{H \in \pi_0(G)} F_{G/H} O(H), \quad (20)$$

где $\pi_0(G)$ — совокупность *всевозможных* остовных подграфов графа G . Легко видеть, что если мы зададим процедуру перенормировки формулой (20) с вершинными частями, определенными рекуррентными соотношениями

$$O(G) = 1, \quad \text{если} \quad L(G) = \emptyset, \\ O(G) = - \sum_{\substack{H \in \pi_0(G), \\ H \neq G}} \Phi'_{G/H}((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); 4-\varepsilon) O(H), \quad \text{если} \quad |L(G)| \geq 1,$$

то контрчлены, соответствующие этой процедуре R , будут совпадать с контрчленами, порожденными отображением $P_0^{-1}((6-\varepsilon)/(4-\varepsilon); 4-\varepsilon)$.

Оператор РГ может быть вложен (локально) в полугруппу преобразований R_τ (τ — вещественный параметр) следующим образом: $R_\tau = P S^\tau P^{-1}$ (здесь и далее мы опускаем в обозначениях операторов их зависимость от ε). Коэффициенты векторного поля, порождающего эту полугруппу, являются β -функциями p -адической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -теории поля. Они могут быть найдены с помощью соотношений

$$\beta_1(u, v) = D^{-1} \left(\ln \lambda_1 w_1 \frac{\partial w_2}{\partial v} - \ln \lambda_2 w_2 \frac{\partial w_1}{\partial v} \right), \\ \beta_2(u, v) = D^{-1} \left(\ln \lambda_2 w_2 \frac{\partial w_1}{\partial u} - \ln \lambda_1 w_1 \frac{\partial w_2}{\partial u} \right),$$

где $\lambda_1 = p^2$, $\lambda_2 = p^\varepsilon$,

$$D = \frac{\partial w_1}{\partial u} \frac{\partial w_2}{\partial v} - \frac{\partial w_1}{\partial v} \frac{\partial w_2}{\partial u}.$$

В первых двух порядках теории возмущений мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\beta_1(u, v; \varepsilon) &= 2 \ln p u + \ln p a_{01}(2 - \varepsilon)v - \ln p a_{11} \varepsilon uv + \\ &\quad + \ln p (2a_{02} - 2a_{01}a_{11} - 2a_{02}\varepsilon + a_{01}a_{11}\varepsilon + a_{01}b_{02}\varepsilon)v^2, \\ \beta_2(u, v; \varepsilon) &= \ln p \varepsilon v + \ln p b_{02} \varepsilon v^2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_{01} &= -\frac{1 - p^{\varepsilon-4}}{1 - p^{\varepsilon-2}}, \quad a_{11} = \frac{1 - p^{\varepsilon-4}}{1 - p^\varepsilon}, \quad b_{02} = -2a_{01}, \\ a_{02} &= \frac{p^2(1 - p^{\varepsilon-4})}{(p^2 - p^\varepsilon)(p^\varepsilon - 1)} \left(1 - p^{\varepsilon-4} + \frac{(p^2 - 1)^2(p^2 + p^\varepsilon)}{(p^2 - p^{2\varepsilon})p^{4-\varepsilon}} \right).\end{aligned}$$

Так же как и в случае аналитической перенормировки (см. [6]), можно показать, что коэффициенты разложения β -функций в ряд по степеням u и v не сингулярны в нуле. Нетривиальный нуль этого векторного поля задает негауссовскую неподвижную точку, которая в нашем случае находится явно (см. (15)).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00375).

Список литературы

- [1] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 35–48.
- [2] *M. D. Missarov.* Renormalization group and renormalization theory in p -adic and adelic scalar models. In: Dynamical Systems and Statistical Mechanics (Moscow, 1991). (Adv. Sov. Math. V. 3). Ed. Ya. G. Sinai. Providence, RI: AMS, 1991. P. 143–164.
- [3] *Э. Ю. Лернер.* ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 233–249.
- [4] *M. D. Missarov.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 347–356.
- [5] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленев.* p -Адиический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [6] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 3–16.
- [7] *G. 't'Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 50. P. 318–353.
- [8] *P. Breitenlohner, M. Mayson.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 52. P. 11–38.
- [9] *Э. Ю. Лернер.* ТМФ. 1995. Т. 102. № 3. С. 367–377.
- [10] *Э. Ю. Лернер.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 371–392.
- [11] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817.
- [12] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 40–50.
- [13] *В. И. Арнольд.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [14] *О. И. Завьялов.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
- [15] *В. А. Смирнов.* Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Поступила в редакцию 30.VII.1999 г.,
после доработки 28.IX.1999 г.