Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Квазитермодинамическая поправка к закону Стефана–Больцмана, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 1, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:20:24

© 2008 г.

В. П. Маслов*

КВАЗИТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА К ЗАКОНУ СТЕФАНА–БОЛЬЦМАНА

Приводится поправка к закону Стефана–Больцмана и обсуждается проблема фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное.

Ключевые слова: постоянная Стефана–Больцмана, закон Стефана–Больцмана.

Шредингер в книге [1] отмечает следующий факт: асимптотика по большому числу частиц N может быть получена с точностью не более, чем до $\sqrt{N}$. Главный член асимптотики при $N \rightarrow \infty$ и объеме $V \rightarrow \infty$, $N/V \rightarrow \text{const}$, называется термодинамическим пределом. На примере закона излучения Стефана–Больцмана мы покажем, что следующий член асимптотики имеет порядок $N^{2/3}$ и что большей точности добиться невозможно, а также предьявим этот член. Этот следующий член, т.е. предел разности между точным ответом и термодинамическим пределом, деленный на $N^{2/3}$, мы будем называть квазитермодинамическим пределом.

Ввиду особой актуальности задач, в которых изучаются системы с не очень большим числом частиц, отвечающих нанотехнологиям, ловушкам, мезоскопической физике, указанная проблема встает на повестку дня.

Фазовые переходы в квазитермодинамике могут не ощущаться в термодинамике “в среднем”, но зато ощущаются локально.

В работе Н. Н. Боголобова о сверхтекучести слабо неидеального бозе-газа [2], где совершен переход от вторично-квантованного уравнения Шредингера к уравнению самосогласованного поля, в термодинамическом пределе получены уравнения Гросса–Питаевского (или Гинзбурга–Ландау). Кривая Ландау получается, если решить эту задачу строго математически лишь в квазитермодинамике (ср. [3]). Но в термодинамическом пределе критическая скорость Ландау остается отличной от нуля. Для ферми-газа сверхтекучесть будет иметь место лишь в квазитермодинамическом приближении – в термодинамическом приближении для указанной в работе [3] модели парного взаимодействия критическая скорость Ландау равна нулю.

Мы остановимся на законе Стефана–Больцмана, поскольку оказалось, что *всегда* экспериментальные значения постоянной Стефана–Больцмана превышают теоретическое значение. Об этом упомянуто даже в статье “Физического энциклопедического словаря” [4], причем отмечается, что “причины расхождения не совсем ясны”.

---

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mai.ru

Закон Стефана–Больцмана имеет вид

$$F = -\frac{4\delta}{3c} T^4 V, \quad (1)$$

где F – свободная энергия, $\delta = \pi^2 k_B^4 / (60 h^3 c^2)$ – постоянная Стефана–Больцмана, V – объем, c – скорость света, h – постоянная Планка, k_B – константа Больцмана, T – температура. Квазитермодинамическая поправка к закону имеет вид

$$F = -\frac{4\delta}{3c} T^4 V - 2\zeta(3) \frac{k_B^3 T^3}{(hc)^2} V^{2/3}. \quad (2)$$

где ζ – дзета-функция Римана. Этот результат следует из общей теоремы 3 работы [5], относящейся к теории чисел. Эта теорема применяется к объектам экономики, лингвистики, семиотики. В данном случае она определяет область расположения большинства вариантов, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \leq E, \quad (3)$$

где $E \gg 1$ задано, а $N_{i,j,k}$ – любые натуральные числа (число вариантов, отвечающих (3), конечно). Теорема в общих чертах звучит так (точную формулировку см. в [6]): вероятность того, что число вариантов

$$\left| \sum_{i+j+k \leq s} (i+j+k) N_{i,j,k} - \sum_{i+j+k \leq s} \frac{i+j+k}{e^{(i+j+k)b} - 1} \right| \geq \bar{E} N^{1/2+\varepsilon}, \quad (4)$$

где s задано, экспоненциально мала при $E \rightarrow \infty$, т.е. вариантов вне указанного интервала сравнительно немного. Здесь параметр b определяется из уравнения

$$\sum \frac{i+j+k}{e^{(i+j+k)b} - 1} = E, \quad (5)$$

а $N = \sup \sum_{i,j,k} N_{i,j,k}$ при условии (3); $\bar{E} = E$.

К квантовой статистике эту теорему можно применить, если принять следующие допущения: 1) все варианты распределения частиц по уровням энергии равновероятны (нечто вроде закона равномерного распределения, автор назвал это “законом отсутствия предпочтения”); 2) предполагается полная изотропия излучения черного тела.

В этом случае уточняются оценки теоремы 3 работы [5] почти до $\sqrt{N}$ (именно, до $N^{1/2+\varepsilon}$, где ε сколь угодно мало)¹⁾. В результате применения формулы Эйлера для сумм приходим к поправке (2) в законе Стефана–Больцмана.

Список литературы

- [1] Э. Шредингер, *Что такое жизнь?* РХД, Москва–Ижевск, 2002.
- [2] Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Избранные труды в трех томах*, т. 2, Наукова думка, Киев, 1970, 210–224.
- [3] В. П. Маслов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 388–408.
- [4] *Физический энциклопедический словарь*, т. 5, Советская энциклопедия, М., 1966.
- [5] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 66–95.
- [6] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 220–230.
- [7] Ю. А. Крутков, Дополнение к кн. Г. А. Лоренц, *Статистические теории в термодинамике*, 2-е изд., РХД, Ижевск, 2001.

Поступила в редакцию 19.11.2007

¹⁾Вычисления замечательного российского физика Ю. А. Круткова по методу перевала, приведенные в [7], могут быть строго обоснованы, в частности, для осциллятора. В общем случае точек перевала может быть бесконечно много.