Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Локальная калибровочно-инвариантная
инфракрасная регуляризация для теории Янга–Миллса,
ТМФ, 2008, том 154, номер 2, 213–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:54:45

© 2008 г.

А. А. Славнов*

ЛОКАЛЬНАЯ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ИНФРАКРАСНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

На основе формулировки теории Янга–Миллса в терминах модели, содержащей высшие производные, построена локальная калибровочно-инвариантная инфракрасная регуляризация для этой теории.

Ключевые слова: инфракрасная регуляризация, калибровочная инвариантность, высшие производные.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на большие успехи в изучении неабелевых калибровочных теорий проблема построения калибровочно-инвариантной инфракрасной регуляризации до сих пор не поддавалась решению. Разумеется, в теории Янга–Миллса матрица рассеяния, которая связывает свободные асимптотические состояния, включающие безмассовые состояния, не существует. Тем не менее было бы очень полезно иметь какую-либо калибровочно-инвариантную инфракрасную регуляризацию, позволяющую придать смысл формальным манипуляциям, которые обычно проводятся. Более того, в недиагональных калибровках даже функции Грина обладают инфракрасными расходимостями, которые нужно регуляризовать калибровочно-инвариантным образом.

В данной работе мы предлагаем инфракрасную регуляризацию для теории Янга–Миллса, которая может быть описана локальным калибровочно-инвариантным лагранжианом. Этот лагранжиан содержит высшие производные, и, следовательно, регуляризованная теория включает состояния с неположительной нормой. Тем не менее в пределе, когда регуляризация снимается, нефизические состояния отщепляются.

В разделе 2 будет представлена конструкция такой регуляризации в терминах континуального интеграла. Раздел 3 посвящен реализации этой конструкции в рамках теории поля.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: slavnov@mi.ras.ru

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ТЕРМИНАХ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Чтобы проиллюстрировать основную идею, дадим эвристический вывод регуляризованного действия для $SU(2)$ -калибровочной теории. Эта конструкция непосредственно обобщается на другие группы.

Очевидно, справедливо следующее формальное равенство:

$$\begin{aligned} \int \exp \left\{ i \int [L_{\text{YM}} + m^2 \varphi^* \varphi] dx \right\} d\mu = \\ = \int \exp \left\{ i \int [L_{\text{YM}} + m^{-2} (D^2 \varphi')^* (D^2 \varphi') - d^* D^2 b - b^* D^2 d] dx \right\} d\mu'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_{YM} — это обычный лагранжиан Янга–Миллса,

$$L_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F_{\mu\nu}^j, \quad (2)$$

а комплексные скалярные поля φ образуют $SU(2)$ -дублет, который удобно параметризовать следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{iB^1 + B^2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \frac{B^0 + iB^3}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Антикоммутирующие комплексные скалярные поля b, d образуют аналогичные дублеты. Мера $d\mu$ включает дифференциалы всех полей, а также множители, связанные с фиксацией калибровки. Мера $d\mu'$ отличается присутствием дифференциалов полей b, b^*, d, d^* . Оператор D^2 обозначает сумму $\sum_{\mu} D_{\mu} D_{\mu}$, где D_{μ} — ковариантная производная,

$$D_{\mu} \varphi = \left(\partial_{\mu} + \frac{ig\tau^j}{2} A_{\mu}^j \right) \varphi. \quad (4)$$

Граничные условия для полей Янга–Миллса A_{μ} стандартные. Поля φ быстро убывают, а поля φ', b, d удовлетворяют фейнмановским граничным условиям. Интеграл по полям φ , очевидно, дает тривиальную константу, так что левая часть уравнения (1) фактически совпадает с континуальным интегралом для теории Янга–Миллса. Выполняя явно интегрирование по полям φ', b, d в правой части уравнения (1), мы получаем тот же результат.

Уравнение (1) является формальным, так как ни левая, ни правая его части в действительности не существуют из-за инфракрасных расходимостей. Мы определяем инфракрасно регуляризованную теорию следующим образом. Добавим к действию в правой части уравнения (1) калибровочно-инвариантный член

$$\int \{ \alpha (D_{\mu} \varphi')^* (D_{\mu} \varphi') - \alpha m^2 (d^* b + b^* d) \} dx. \quad (5)$$

Интеграл в правой части уравнения (1) по-прежнему инфракрасно расходится. Однако если мы сделаем сдвиг

$$\varphi' \rightarrow \varphi' + \hat{a}, \quad \hat{a}_1 = 0, \quad \hat{a}_2 = a, \quad (6)$$

то регуляризованное действие приобретет вид

$$A_R = \int \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F_{\mu\nu}^j - m^{-2} (D^2 \varphi)^* (D^2 \varphi) - (D_\mu d)^* D_\mu b - (D_\mu b)^* D_\mu d - \right. \\ \left. - \frac{a^2 g^2}{4m^2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{ag}{\sqrt{2}m^2} \partial^2 B^j \partial_\mu A_\mu^j + \right. \\ \left. + \alpha (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + \frac{\alpha g^2 a^2}{4} A_\mu^2 - \frac{\alpha ga}{2\sqrt{2}} B^j \partial_\mu A_\mu^j - \alpha m^2 (d^* b + b^* d) + \dots \right\}. \quad (7)$$

Здесь многоточием обозначены члены взаимодействия, возникающие в результате сдвига (6).

Видно, что сдвиг (6) порождает массовый член для векторного поля, член $(\partial_\mu A_\mu)^2$, смешивание полей B^j и $\partial_\mu A_\mu^j$, а также дополнительные члены взаимодействия. Для простоты в дальнейшем мы положим $g^2 a^2 = 2m^2$. Тогда масса поля Янга–Миллса равна $\sqrt{\alpha} m$.

Действие (7) локально и инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu^j &\rightarrow A_\mu^j - g \varepsilon^{jik} A_\mu^i \eta^k + \partial_\mu \eta^j, \\ B^0 &\rightarrow B^0 + g (B^j \eta^j), \\ B^j &\rightarrow B^j - m \eta^j - \frac{g}{2} \varepsilon^{jik} B^i \eta^k - \frac{g}{2} B^0 \eta^j. \end{aligned} \quad (8)$$

Эта инвариантность позволяет выбирать в соответствующем континуальном интеграле любую допустимую калибровку. Особенно удобна калибровка Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$. В этой калибровке смешивание полей A_μ^j и B^j отсутствует, и перенормируемость очевидна. В то же время регуляризованное действие (7) содержит массовый член для поля Янга–Миллса и, следовательно, не приводит к инфракрасным расходимостям.

Нужно понимать, что преобразование (6) не является простой заменой переменных. Оно меняет граничные условия в континуальном интеграле. Формула (7) является определением инфракрасно регуляризованного действия теории Янга–Миллса. Точнее,

$$\int \exp \left\{ i \int L_{YM} dx \right\} d\mu \Big|_{\text{reg}} = \int e^{iA_R} d\mu'. \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет инфракрасно регуляризованную матрицу рассеяния в теории Янга–Миллса, записанную в виде континуального интеграла от экспоненты от локального калибровочно-инвариантного действия. Это уравнение позволяет также дать корректное определение корреляционных функций, поскольку в регуляризованной теории можно осуществить поворот Вика во всех фейнмановских интегралах, после чего предельный переход $\alpha \rightarrow 0$ становится законным.

В следующем разделе мы покажем, что конструкция инфракрасной регуляризации с помощью континуального интеграла допускает элегантную реализацию в виде полевой модели, а восстановление унитарности при снятии регуляризации напоминает аналогичный механизм в методе БРСТ-квантования.

3. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И УНИТАРНОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ

В наших работах [1], [2] было показано, что замену переменных в континуальном интеграле, приводящую к появлению высших производных, можно интерпретировать как переход к полевой модели, включающей нефизические духовые поля. Эта модель обладает (супер)симметрией, которая в соответствии с теоремой Нётер приводит к существованию сохраняющегося нильпотентного заряда Q . Существование такого заряда позволяет выделить физические состояния условием

$$Q|\psi\rangle_{\text{phys}} = 0. \quad (10)$$

Состояния, удовлетворяющие этому условию, обладают неотрицательной нормой, и матрица рассеяния в этом подпространстве унитарна.

Ниже мы покажем, что аналогичную конструкцию можно построить и в данной модели. Особенностью этой модели является тот факт, что в отличие от примеров, рассмотренных ранее, сохраняющийся заряд Q не является нильпотентным. Нильпотентность восстанавливается только в пределе $\alpha \rightarrow 0$, и этот предел (в тех случаях, когда он существует) определяет теорию Янга–Миллса. Предел $\alpha \rightarrow 0$ в общем случае не существует для S -матрицы на массовой поверхности из-за появления инфракрасных расходимостей, однако формальное выражение для матричных элементов в пределе снятой регуляризации совпадает с матричными элементами исходной теории Янга–Миллса.

Мы исходим из регуляризованного классического действия

$$A_R = \int \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F_{\mu\nu}^j - m^{-2} (D^2(\varphi + \hat{a}))^* D^2(\varphi + \hat{a}) + (D_\mu d)^* D_\mu b + \right. \\ \left. + (D_\mu b)^* D_\mu d + \alpha [(D_\mu(\varphi + \hat{a}))^* D_\mu(\varphi + \hat{a}) - m^2(d^* b + b^* d)] \right\} dx. \quad (11)$$

Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований (8) и преобразований суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \varepsilon b, \\ \delta d &= m^{-2} D^2(\varphi + \hat{a})\varepsilon, \end{aligned} \quad (12)$$

где ε – антиэрмитов параметр, антикоммутирующий с полями b, d . Покомпонентно это преобразование записывается как

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \varepsilon b, \\ \delta d_1 &= \left[m^{-2} (D^2\varphi)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}m} (i\partial_\mu A_\mu^1 + \partial_\mu A_\mu^2) \right] \varepsilon, \\ \delta d_2 &= \left[m^{-2} (D^2\varphi)_2 - \frac{i}{\sqrt{2}m} \partial_\mu A_\mu^3 - \frac{g}{2m} A_\mu A_\mu \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что эти преобразования не являются нильпотентными, $\delta^2 d \neq 0$. Нильпотентность восстанавливается только в пределе $\alpha = 0$.

Действие (11) инвариантно как относительно калибровочных преобразований, так и относительно преобразований (13). Преобразования суперсимметрии не меняют поля A_μ , поэтому удобно выбрать для квантования явно суперсимметричную и перенормируемую калибровку $\partial_\mu A_\mu = 0$.

В этой калибровке лагранжиан, записанный в терминах компонент B^j , B^0 и аналогичных компонент для полей b , d ,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{ib^1 + b^2}{\sqrt{2}}, & b_2 &= \frac{b^0 + ib^3}{\sqrt{2}}, \\ d_1 &= \frac{d^1 - id^2}{\sqrt{2}}, & d_2 &= \frac{-id^0 + d^3}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} L_R &= -\frac{m^{-2}}{2} \partial^2 B^\rho \partial^2 B^\rho - i \partial_\mu b^\rho \partial_\mu d^\rho - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \\ &+ \alpha [\partial_\mu B^\rho \partial_\mu B^\rho - im^2 b^\rho d^\rho] + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\rho = 0, 1, 2, 3$ и многоточием обозначены члены взаимодействия.

Квантование полей A_μ^j проводится стандартным образом и требует введения духов Фаддеева–Попова $\bar{c}$, c . Квантование скалярных полей b , d также не представляет трудностей.

Поля B^ρ описываются лагранжианом, содержащим высшие производные, и для их квантования мы воспользуемся каноническим формализмом Остроградского [1]–[3]. Поскольку мы работаем в рамках теории возмущений, достаточно рассмотреть квантование свободной теории.

В формализме Остроградского система описывается каноническими координатами

$$X_1^\rho = B^\rho, \quad X_2^\rho = \dot{B}^\rho \quad (16)$$

и сопряженными импульсами

$$\begin{aligned} P_1^\rho &= \frac{\delta L}{\delta \dot{B}^\rho} - \partial_0 \left(\frac{\delta L}{\delta \ddot{B}^\rho} \right) = \alpha \partial_0 B^\rho + m^{-2} \partial_0 \partial^2 B^\rho, \\ P_2^\rho &= \frac{\delta L}{\delta \ddot{B}^\rho} = -m^{-2} \partial^2 B^\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

Гамильтониан для полей B^ρ , записанный в терминах компонент Фурье, имеет вид

$$H = P_1^\rho X_2^\rho + P_2^\rho \dot{X}_2^\rho - L = P_1^\rho X_2^\rho - \frac{m^2}{2} (P_2^\rho)^2 - k^2 P_2^\rho X_1^\rho - \frac{\alpha}{2} (X_2^\rho)^2 + \frac{\alpha k^2}{2} (X_1^\rho)^2 + \dots \quad (18)$$

Вводя операторы рождения и уничтожения, можно представить свободный гамильтониан в форме

$$H^0 = \int [\omega_1(k) q_1^{\rho+}(k) q_1^{\rho-}(k) - \omega_2(k) q_2^{\rho+}(k) q_2^{\rho-}(k)] dk, \quad (19)$$

где

$$q_1^{\rho\pm} = \frac{\pm i \omega_1 \alpha X_1^\rho + P_1^\rho \mp i \omega_1 P_2^\rho}{\sqrt{2\alpha\omega_1}}, \quad q_2^{\rho\pm} = \frac{-\alpha X_2^\rho \mp i \omega_2 P_2^\rho + P_1^\rho}{\sqrt{2\alpha\omega_2}}. \quad (20)$$

В этих уравнениях $\omega_1 = \sqrt{k^2}$, $\omega_2 = \sqrt{k^2 + \alpha m^2}$, а операторы $q_{1,2}^{\rho\pm}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[q_1^{\rho-}(k), q_1^{\sigma+}(k')] = \delta^{\rho\sigma} \delta(k - k'), \quad [q_2^{\rho-}(k), q_2^{\sigma+}(k')] = -\delta^{\rho\sigma} \delta(k - k'). \quad (21)$$

Видно, что операторы $q_2^{\rho+}$ порождают состояния с отрицательной нормой.

Свободный гамильтониан для суперсимметричных духов b^ρ , d^ρ можно получить стандартным образом:

$$H'_0 = i \int \omega_2 [d^{\rho+}(k) b^{\rho-}(k) - b^{\rho+}(k) d^{\rho-}(k)] dk, \quad (22)$$

где операторы рождения и уничтожения определяются уравнениями

$$d^{\rho\pm} = \frac{d^\rho \omega_2 \pm p_b^\rho}{\sqrt{2\omega_2}}, \quad b^{\rho\pm} = \frac{b^\rho \omega_2 \mp p_d^\rho}{\sqrt{2\omega_2}} \quad (23)$$

и удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям

$$[b^{\rho-}(k), d^{\sigma+}(k')]_+ = -i\delta^{\rho\sigma} \delta(k - k'), \quad [d^{\rho-}(k), b^{\sigma+}(k')]_+ = i\delta^{\rho\sigma} \delta(k - k'). \quad (24)$$

Пространство состояний включает много нефизических возбуждений, например, состояния, отвечающие суперсимметричным духам, состояния, соответствующие полям B^ρ , нефизическим компонентам полей A_μ и духам Фаддеева–Попова. Настоящие физические состояния, включающие только поперечные компоненты полей Янга–Миллса, можно выделить, налагая на асимптотические состояния условия

$$Q_0 |\psi\rangle_{\text{phys}} = 0, \quad (25)$$

$$Q_0^{\text{BRST}} |\psi\rangle_{\text{phys}} = 0 \quad (26)$$

и переходя к пределу $\alpha \rightarrow 0$. Здесь Q_0 – свободный заряд, связанный с преобразованиями суперсимметрии (13), а Q_0^{BRST} – свободный БРСТ-заряд.

Инвариантность действия (11) относительно преобразований суперсимметрии (13) порождает согласно теореме Нётер сохраняющийся ток, имеющий асимптотическую форму

$$J_\mu = m^{-2} (\partial_\mu B^\rho b^\rho - B^\rho \partial_\mu b^\rho). \quad (27)$$

Соответствующий сохраняющийся заряд можно записать в виде

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \int \{ b^{\rho+}(P_1^\rho + i\omega_2 P_2^\rho - \alpha X_2^\rho) + (P_1^\rho - i\omega_2 P_2^\rho - \alpha X_2^\rho) b^{\rho-} \} dk \sim M + O(\alpha), \quad (28)$$

где

$$M = \int \left\{ b^{\rho+}(k) \frac{q_1^{\rho-}(k) + q_2^{\rho-}(k)}{2} + \frac{q_1^{\rho+}(k) + q_2^{\rho+}(k)}{2} b^{\rho-}(k) \right\} dk.$$

Видно, что, хотя при конечных α заряд Q_0 не является нильпотентным, в пределе $\alpha \rightarrow 0$ нильпотентность восстанавливается, поскольку операторы $b^{\rho+}$, $b^{\rho-}$ антикоммутируют, а $q_+^{\rho\pm} = q_1^{\rho\pm} + q_2^{\rho\pm}$ коммутируют.

Любой вектор, который обращается в нуль при действии оператора Q_0 , можно представить в виде

$$|\varphi\rangle = |\varphi\rangle_A + M|\chi\rangle + O(\alpha). \quad (29)$$

Здесь $|\varphi\rangle_A$ обозначает вектор, не содержащий возбуждений, которые отвечают духовым полям $q_{1,2}^\rho$ и b^ρ, c^ρ . Этот вектор зависит только от возбуждений, отвечающих полям Янга–Миллса и духам Фаддеева–Попова. Налагая на допустимые векторы условие (26), которое совместно с условием (25), мы делаем вывод о том, что векторы $|\psi\rangle_{\text{phys}}$ имеют вид

$$|\psi\rangle_{\text{phys}} = |\psi\rangle_{\text{tr}} + |N\rangle, \quad (30)$$

где вектор $|\psi\rangle_{\text{tr}}$ зависит только от поперечных компонент поля Янга–Миллса, а $|N\rangle$ является вектором с нулевой нормой. Следовательно, в пределе $\alpha \rightarrow 0$ мы возвращаемся к исходной теории Янга–Миллса. Это завершает доказательство.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе предложена локальная калибровочно-инвариантная регуляризация теории Янга–Миллса. Предлагаемая конструкция основана на механизме, отличном от механизма, который, как правило, используется в процессе регуляризации. Обычно регуляризованная теория включает некоторые нефизические возбуждения, исчезающие из спектра, когда регуляризация снята. В нашей схеме нефизические возбуждения не исчезают в пределе снятой регуляризации, но полностью отщепляются от физических возбуждений, и этого достаточно для физической интерпретации теории.

Благодарности. Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00541), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-672.2006.1) и программы РАН “Теоретические проблемы математики”. Работа была закончена во время моего визита в Университет г. Тренто (Италия). Я благодарен И. Ладзидзера за гостеприимство.

Список литературы

- [1] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **258** (1991), 391.
- [2] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **620** (2005), 97.
- [3] A. A. Slavnov, *Nucl. Phys. B*, **31** (1971), 301.

Поступила в редакцию 24.04.2007