Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, Некоммутативные унитары, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 220–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:52:38

© 2008 г.

А. В. Домрин*

НЕКОММУТАТИВНЫЕ УНИТОНЫ

Согласно результатам Уленбек каждое гармоническое отображение из римановой сферы S^2 в унитарную группу $U(n)$ разлагается в произведение так называемых унитонов – специальных отображений из S^2 в грассманианы $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \subset U(n)$, удовлетворяющих некоторым системам дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей работе построен некоммутативный аналог этой факторизации, применимый к тем решениям некоммутативной унитарной сигма-модели, которые являются конечномерными возмущениями решений нулевой энергии. В частности, показано, что энергия всякого решения указанного класса есть целое кратное 8π , приведены примеры решений, не эквивалентных грассмановым, и рассмотрен вопрос о реализуемости неграссмановых нулевых мод гессияна энергии посредством касательных направлений к пространству модулей решений.

Ключевые слова: некоммутативная сигма-модель, унитарная факторизация.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$. Напомним некоторые свойства этих “коммутативных двойников” изучаемых ниже объектов (подробное изложение с многочисленными ссылками на литературу содержится, например, в [1]–[3]). Рассмотрим функционал энергии

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1} d\varphi|^2 dx dy = 2 \int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi|^2 dx dy \quad (1.1)$$

на множестве всех гладких отображений $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow U(n)$. Здесь $\bar{\partial}\varphi = (\varphi_x + i\varphi_y)/2$ означает производную по $\bar{z}$, а норма матрицы A определяется как $|A|^2 = \text{tr}(AA^*)$. Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$ – это критические точки функционала $E(\varphi)$ или, эквивалентно, решения конечной энергии уравнений Эйлера–Лагранжа $\partial(\varphi^{-1}\bar{\partial}\varphi) + \bar{\partial}(\varphi^{-1}\partial\varphi) = 0$, где $\partial\psi = (\psi_x - i\psi_y)/2$ означает производную по z . Простейшие примеры таких решений задаются голоморфными и антиголоморфными отображениями из $S^2 = \mathbb{CP}^1$ в комплексный грассманиан $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, вложенный в унитарную группу $U(n)$ в качестве вполне геодезического подмногообразия по формуле $V \mapsto \varphi = I - 2Q$, где $Q: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ есть ортопроектор с образом V .

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: domrin@mi.ras.ru

Голоморфные и антиголоморфные решения не исчерпывают множества всех *грассмановых решений* (т.е. решений со значениями в некотором $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$), за исключением случая, когда $n = 2$ и $k = 1$. Однако всякое грассманово решение получается из голоморфных и антиголоморфных решений посредством конечного числа геометрических модификаций: на каждом шагу мы вычитаем некоторое голоморфное подрасслоение из образа Q и добавляем некоторое голоморфное подрасслоение ядра Q . Это дает достаточно явное описание пространства модулей всех таких решений.

Конструкция Уленбек [4] дает аналогичную факторизацию для всех (не обязательно грассмановых) решений. А именно, для любого гармонического отображения $\varphi: S^2 \rightarrow U(n)$ найдется последовательность гармонических отображений $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m: S^2 \rightarrow U(n)$ такая, что φ_0 есть постоянное отображение (или, эквивалентно, решение нулевой энергии), $\varphi_m = \varphi$, а каждое отображение φ_{j+1} получается из φ_j добавлением некоторого φ_j -унитона. Последнее означает, что $\varphi_{j+1}(\zeta) = \varphi_j(\zeta)(I - 2P_j(\zeta))$ для некоторого семейства $\{P_j(\zeta) \mid \zeta \in \mathbb{C}\}$ ортопроекторов на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнениям

$$PAP^\perp = 0, \quad P^\perp AP + 2P^\perp \bar{\partial}P = 0, \quad (1.2)$$

где $P = P_j$ – указанное семейство проекторов, $A = \varphi_j^{-1} \bar{\partial} \varphi_j$ – логарифмическая $\bar{\partial}$ -производная отображения φ_j . Таким образом, конструкция Уленбек сводит решение дифференциальных уравнений второго порядка (уравнений гармонических отображений) к решению последовательности дифференциальных уравнений первого порядка (1.2). Если $A = 0$, то уравнения (1.2) сводятся к условию $P^\perp \bar{\partial}P = 0$, означающему, что P есть антиголоморфное отображение из $\mathbb{C}P^1$ в соответствующий грассманиан (или, эквивалентно, отображение $P^\perp = I - P$ голоморфно). Как показано в работе [5], из уравнений (1.2) вытекает следующая формула для разности энергий:

$$E(\varphi_{j+1}) - E(\varphi_j) = 8\pi c_1(P_j)[S^2], \quad (1.3)$$

где $c_1(P_j)$ – первый класс Чженя векторного расслоения на S^2 , слоем которого над точкой $\zeta \in S^2$ является образ $P_j(\zeta)$ проектора P_j , а правая часть с точностью до множителя 8π равна значению этого класса когомологий на фундаментальном цикле базы $[S^2] \in H_2(S^2)$. Поскольку числа $c_1(P_j)[S^2]$ всегда целые, отсюда вытекает, что энергия любого гармонического отображения из S^2 в $U(n)$ есть целое кратное 8π . С помощью этих результатов было получено сравнительно явное описание множества всех гармонических отображений из S^2 в $U(n)$ для $n \leq 4$.

1.2. Некоммутативная сигма-модель. Для описания физически мотивированного некоммутативного аналога функционала (1.1) введем следующие обозначения. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Обозначим через a стандартный оператор уничтожения с областью определения $\mathrm{dom} a = \{x \in H \mid \sum_{j=0}^\infty (j+1)|x_j|^2 < \infty\}$, действующий по формуле $a(e_j) = \sqrt{j} e_{j-1}$ для $j = 0, 1, 2, \dots$. Сопряженный к нему оператор a^* имеет ту же область определения $\mathrm{dom} a^* = \mathrm{dom} a$ и действует по формуле $a^*(e_j) = \sqrt{j+1} e_{j+1}$.

Рассмотрим плотные в H подпространства

$$D_k := \left\{ x \in H \left| \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^k |x_j|^2 < \infty \right. \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Пространство $D_k = \text{dom } a^k = \text{dom } a^{*k}$ является областью определения любого произведения k операторов a, a^* . При этом $a(D_k) \subset D_{k-1}$ и $a^*(D_k) \subset D_{k-1}$ для всех $k \geq 1$. Оператор $a: D_1 \rightarrow D_0 = H$ замкнут, плотно определен на H и удовлетворяет каноническому коммутационному соотношению

$$[a, a^*] = I \quad (1.5)$$

в том смысле, что $aa^*x - a^*ax = x$ для всех $x \in D_2$. Для каждого целого $n \geq 1$ можно распространить обозначения D_k и a на гильбертово пространство $H^n := \underbrace{H \oplus H \oplus \dots \oplus H}_{n \text{ слагаемых}} = \mathbb{C}^n \otimes H$. А именно, объявим элемент $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n$ принадлежащим D_k в том и только том случае, когда каждая компонента $x_i \in H$, $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежит D_k , и положим $a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n)$. Тогда равенство (1.5) будет выполнено на $D_2 \subset H^n$.

Перенесем задачу описания критических точек функционала (1.1) на семейство $\{\mathbb{R}_\theta^2 \mid \theta \geq 0\}$ некоммутативных плоскостей, полученное из обычной плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{R}_0^2$ посредством деформации Мойяла или квантования Мойяла–Вейля (многочисленные ссылки на физические и математические работы, посвященные этим понятиям, содержатся, например, в [6], [7]). Этот переход основан на формальных правилах исчисления Вейля псевдодифференциальных операторов (см. [8], § 18.5) и приводит к следующему результату [9], [10]. Отображения $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow U(n)$ заменяются на унитарные операторы $\Phi \in U(H^n)$, производные $\bar{\partial}$ и ∂ – на коммутаторы с $(2\theta)^{-1/2}a$ и $-(2\theta)^{-1/2}a^*$, соответственно, а взятие интеграла по $\mathbb{C}$ – на взятие $2\pi\theta \text{Tr}$, где $\text{Tr } X$ означает след ядерного оператора X на H^n . Таким образом, аналогом функционала (1.1) является не зависящий от θ функционал

$$E(\Phi) := 2\pi \|[a, \Phi]\|_{\text{HS}}^2 \quad (1.6)$$

на множестве всех операторов $\Phi \in U(H^n)$ таких, что коммутатор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается по непрерывности со своей области определения на все H^n , причем это продолжение принадлежит классу $\text{HS}(H^n)$ операторов Гильберта–Шмидта. Здесь $\|A\|_{\text{HS}}^2 := \text{Tr}(AA^*)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта.

1.3. Область определения функционала энергии. Обозначим через $\mathcal{B}(H^n)$ банахово пространство всех ограниченных линейных операторов на H^n . Некоторые операторы $A \in \mathcal{B}(H^n)$ коммутируют с a в том смысле, что оператор $[a, A]$ определен на плотном подпространстве в H^n и равен нулю на этом подпространстве. Для таких операторов функционал (1.6) принимает наименьшее возможное значение, равное нулю. Например, указанным свойством обладают операторы вида $A = \Lambda \otimes I$, где $\Lambda \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$ – любая $(n \times n)$ -матрица, а I – тождественный оператор на H (иными словами, A есть $(n \times n)$ -матрица из операторов на H , и каждый из этих операторов есть скалярное кратное тождественного). Можно рассматривать

эти операторы как некоммутативные аналоги постоянных отображений, поскольку на последних функционал (1.1) принимает свое минимальное значение, равное нулю. С этой точки зрения естественно рассмотреть следующие пространства операторов, в некотором смысле аналогичные пространствам k раз дифференцируемых ($k = 0, 1, 2, \dots$) матричнозначных функций на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ с равномерно ограниченными интегрируемыми производными:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &:= \{ \Lambda \otimes I + K \in \mathcal{B}(H^n) \mid \Lambda \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \dim \operatorname{im} K < \infty, \operatorname{im} K \subset D_k \} = \\ &= (\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \otimes I) \oplus \mathcal{F}_k^0,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где $\mathcal{F}_k^0$ – пространство всех операторов на H^n , образ которых конечномерен и содержится в D_k . Пространства (1.7) обладают удобными алгебраическими свойствами: каждое $\mathcal{F}_k$ есть векторное подпространство и даже подалгебра в $\mathcal{B}(H^n)$, а пересечение $U(H^n) \cap \mathcal{F}_k$ есть подгруппа в $U(H^n)$. Функционал энергии (1.6) корректно определен на $U(H^n) \cap \mathcal{F}_1$, поскольку для любого $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_1$ оператор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается на все пространство H^n до оператора с конечномерным образом.

Выбор области определения функционала энергии играет принципиальную роль при изучении его критических точек. В настоящей работе мы рассматриваем функционал (1.6) только на $U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$, хотя определение (1.6) имеет смысл и для более широкого класса унитарных операторов (достаточно, чтобы $[a, \Phi]$ был плотно определен и продолжался по непрерывности до оператора Гильберта–Шмидта на всем H^n). Такой “минимальный” выбор области определения для E позволяет нам не углубляться в тонкие вопросы, связанные с областями определения различных операторов, и в то же время развить достаточно содержательную теорию. Отметим, что этот выбор дает те же уравнения экстремума, что и более широкий. В случае $U(1)$ -модели очень правдоподобно (хотя пока не доказано), что все решения, имеющие конечную энергию, принадлежат $\mathcal{F}_2$. Однако для $U(n)$ -моделей с $n \geq 2$ это заведомо не так. Например, если $P \in \mathcal{B}(H^2)$ есть ортопроектор на H^2 , образ которого совпадает с графиком оператора a , то унитарный оператор $\Phi = I - 2P$ имеет конечную энергию и является решением $U(2)$ -модели (см. [9], [10]), но не принадлежит $\mathcal{F}_1$ из-за бесконечномерности образа оператора $[a, \Phi]$. Таким образом, распространение теории унитарных операторов на все решения конечной энергии остается открытым вопросом.

Структура работы следующая. В разделе 2 мы вводим обозначения и напоминаем некоторые свойства решений некоммутативной $U(n)$ -модели, что позволяет читать работу независимо от других источников.

В разделе 3 изложены общие результаты теории унитарных операторов, начиная с некоммутативных аналогов класса Чжэня (1.3) и процедуры добавления унитарного оператора (1.2). Из существования канонических отрицательных унитарных операторов (п. 3.3) выводится наличие унитарной факторизации и целочисленность энергии (с точностью до множителя 8π) всех изучаемых решений. Далее введено понятие канонического ранга решения и дано описание решений с наименьшим и наибольшим возможными значениями канонического ранга при данной энергии, а также установлены некоторые общие свойства грассмановых решений.

В разделе 4 полученные результаты иллюстрируются на примере диагональных решений $U(1)$ -модели, а также решений, соответствующих некоторым неграссмановым нулевым модам гессииана энергии. В частности, здесь построены многочисленные явные примеры решений, не эквивалентных грассмановым. Насколько известно автору, до сих пор таких примеров в литературе указано не было, хотя в их существовании никто не сомневался.

Отметим, что (как и в коммутативном случае п. 1.1) теория унитаров позволяет не только построить примеры решений, но и дать явное описание пространств модулей всех решений изучаемого класса с небольшими значениями энергии (скажем, $E \leq 8\pi \cdot 5$ для $n = 1$). Этим результатам и смежным вопросам будет посвящена отдельная работа [11].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О НЕКОММУТАТИВНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

2.1. Уравнения экстремалей. Определим операторы $\partial_- : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0^0$ и $\partial_+ : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0^0$ формулами

$$\partial_- X := [a, X], \quad \partial_+ X := -[a^*, X]. \quad (2.1)$$

Как уже упоминалось в п. 1.2, эти операторы суть некоммутативные аналоги частных производных $\bar{\partial}$ и ∂ из п. 1.1. Ясно, что $\partial_{\pm}(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Операторы $\partial_{\pm}$ линейны и удовлетворяют правилу Лейбница $\partial_{\pm}(XY) = \partial_{\pm}XY + X\partial_{\pm}Y$. Кроме того, прямое вычисление (или тождество Якоби) дает формулу $\partial_+\partial_-X - \partial_-\partial_+X = [[a, a^*], X]$ для всех $X \in \mathcal{F}_2$, на основании которой мы заключаем из (1.5), что операторы ∂_+ и ∂_- коммутируют на $\mathcal{F}_2$. Поэтому можно определить оператор $\Delta : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_0^0$ (некоммутативный аналог лапласиана) формулами

$$\Delta := \partial_+\partial_- = \partial_-\partial_+. \quad (2.2)$$

Приведем еще одно немедленное следствие коммутационного соотношения (1.5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если оператор $X \in \mathcal{F}_2$ эрмитов, то оператор $\Delta X \in \mathcal{F}_0^0$ также эрмитов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Унитарный оператор $\Phi_0 \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ называется *экстремалью* функционала энергии $E(\Phi)$ или, эквивалентно, *решением* некоммутативной $U(n)$ -модели, если $t = 0$ является критической точкой функции $t \mapsto E(\Phi(t))$ для любого гладкого отображения $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi(0) = \Phi_0$. Здесь слово “гладкий” означает, что функции $\Lambda(t)$ и $K(t)$, определенные формулой $\Phi(t) = \Lambda(t) \otimes I + K(t)$, дифференцируемы в точке $t = 0$ в обычном смысле.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Оператор $\Phi_0 \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ является экстремалью функционала $E(\Phi)$ тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1}\Delta\Phi_0 = \Phi_0^*\Delta\Phi_0$ эрмитов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что операторы ∂_+ и $-\partial_-$ сопряжены друг другу относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта:

$$\langle X, \partial_- Y \rangle_{\text{HS}} = -\langle \partial_+ X, Y \rangle_{\text{HS}} \quad \forall X, Y \in \mathcal{F}_1^0, \quad (2.3)$$

где $\langle A, B \rangle_{\text{HS}} := \text{Tr}(AB^*)$. Действительно, прямое вычисление показывает, что $X(\partial_- Y)^* + (\partial_+ X)Y^* = \partial_+(XY^*)$. Взяв след от обеих частей и воспользовавшись равенством $\text{Tr}(\partial_+ Z) = 0$, справедливым для всех $Z \in \mathcal{F}_1^0$ (это доказывается так же, как уравнение (III.4.17) в [12]), получаем (2.3).

Для любой гладкой кривой $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi(0) = \Phi_0$, оператор $\varphi := \Phi'(0)$ принадлежит векторному пространству $\mathcal{F}_2 \cap T_{\Phi_0} \text{U}(H^n)$, где $T_{\Phi_0} \text{U}(H^n) = \{\varphi \in \text{B}(H^n) \mid (\Phi_0^{-1}\varphi)^* = -\Phi_0^{-1}\varphi\}$ есть касательное пространство к унитарной группе в точке Φ_0 . Подставим $\Phi(t) = \Phi_0 + \varphi t + o(t)$ в формулу (1.6) и вычислим $e(t) := E(\Phi(t))$ по формуле для квадрата модуля суммы двух векторов. Применяя последовательно равенства (2.3), (2.2) и $\langle UA, UB \rangle_{\text{HS}} = \langle A, B \rangle_{\text{HS}}$ для всех унитарных U (в нашем случае $U = \Phi_0^{-1}$), получаем

$$e'(0) = 2 \text{Re} \langle \partial_- \Phi_0, \partial_- \varphi \rangle_{\text{HS}} = -2 \text{Re} \langle \Delta \Phi_0, \varphi \rangle_{\text{HS}} = -2 \text{Re} \langle \Phi_0^{-1} \Delta \Phi_0, \Phi_0^{-1} \varphi \rangle_{\text{HS}}.$$

Таким образом, Φ_0 является экстремалью тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1} \Delta \Phi_0 \in \mathcal{F}_0^0$ ортогонален (в смысле вещественного скалярного произведения $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$) к пространству $\mathcal{V}_-$ всех косоэрмитовых операторов¹⁾ класса $\mathcal{F}_0^0$. Однако легко видеть, что ортогональным дополнением к $\mathcal{V}_-$ в $\text{HS}(H^n)$ является пространство $\mathcal{V}_+$ всех эрмитовых операторов из $\text{HS}(H^n)$. Поэтому Φ_0 является экстремалью тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1} \Delta \Phi_0 \in \mathcal{F}_0^0$ эрмитов. Утверждение доказано.

Нам потребуются и другие формы записи указанного в утверждении 2 условия экстремума. Для их формулировки заметим, что при любом $\Phi \in \text{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_1$ равенство (1.6) можно записать в виде

$$E(\Phi) = 2\pi \|\partial_- \Phi\|_{\text{HS}}^2 = 2\pi \|\Phi_-\|_{\text{HS}}^2 = 2\pi \|\Phi_+\|_{\text{HS}}^2 = 2\pi \|\partial_+ \Phi\|_{\text{HS}}^2, \quad (2.4)$$

где через Φ_+ и Φ_- обозначены “левые логарифмические производные” (т.е. образы $\partial_{\pm} \Phi$ при переносе в единицу группы $\text{U}(H^n)$)

$$\Phi_+ := \Phi^{-1} \partial_+ \Phi = a^* - \Phi^* a^* \Phi, \quad \Phi_- := \Phi^{-1} \partial_- \Phi = \Phi^* a \Phi - a. \quad (2.5)$$

В силу унитарности Φ имеем

$$\Phi_+ = -\Phi_-^*, \quad (2.6)$$

чем и объясняется третье равенство в (2.4). Возвращаясь к утверждению 2 (с заменой Φ_0 на Φ), запишем

$$\Phi^{-1} \Delta \Phi = \Phi^* \partial_+ \partial_- \Phi = \partial_+ (\Phi^* \partial_- \Phi) - \partial_+ \Phi^* \partial_- \Phi = \partial_+ \Phi_- + (\partial_- \Phi)^* \partial_- \Phi,$$

где последнее равенство вытекает из очевидного свойства

$$\partial_+(X^*) = (\partial_- X)^* \quad \forall X \in \mathcal{F}_1. \quad (2.7)$$

¹⁾Заметим, что $\mathcal{V}_-$ является векторным подпространством пространства $\mathcal{F}_0^0$ только над $\mathbb{R}$, чем и объясняется появление вещественного скалярного произведения. Для обоснования слова “всех” заметим, что каждый оператор $\varphi \in \mathcal{F}_2^0 \cap T_{\Phi_0} \text{U}(H^n)$ является касательным вектором к некоторой гладкой кривой $\Phi(t)$ указанного выше вида, а пространство $\mathcal{F}_2^0$ плотно в $\mathcal{F}_0^0$ (и даже в $\text{HS}(H^n)$) по норме Гильберта–Шмидта (см. [12], § V.2.4, задача 2.17).

Поскольку оператор $(\partial_- \Phi)^* \partial_- \Phi$ всегда эрмитов, мы получаем, что условие экстремума из утверждения 2 эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_+ \Phi_-$. Применяя (2.6) и (2.7) с $X = \Phi_+$, видим, что это, в свою очередь, эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_- \Phi_+$ или, в более симметричной форме, выполнению равенства $\partial_+ \Phi_- + \partial_- \Phi_+ = 0$. Этим доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Каждое из следующих условий равносильно тому, что оператор $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ является экстремалью:*

- а) оператор $\partial_+ \Phi_-$ эрмитов,
- б) оператор $\partial_- \Phi_+$ эрмитов,
- в) $\partial_+ \Phi_- + \partial_- \Phi_+ = 0$.

2.2. Эллиптическая регулярность. С помощью утверждения 3 можно установить следующий аналог свойства эллиптической регулярности (всякое гармоническое отображение класса C^2 автоматически принадлежит C^∞), который будет играть существенную роль в п 3.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Всякое решение $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ принадлежит $\bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{F}_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\Phi = \Lambda \otimes I + K_0$ согласно (1.7). Поскольку оператор Φ унитарен, матрица Λ тоже унитарна. Поэтому, заменяя Φ на другое решение $(\Lambda \otimes I)^{-1} \Phi$, можно считать, что $\Phi = I + K$ для некоторого $K \in \mathcal{F}_2^0$.

Унитарность Φ означает, что $K + K^* + KK^* = 0 = K^* + K + K^*K$. Из равенств $K^* = -(K + KK^*)$ и $K = -(K^* + K^*K)$ вытекает, что $\text{im } K^* \subset \text{im } K$ и $\text{im } K \subset \text{im } K^*$, т.е. $\text{im } K^* = \text{im } K$. Теперь из формулы $\Phi_- = (I + K^*)(aK - Ka)$ получаем, что $\text{im } \Phi_- \subset \text{im}(aK - Ka) + \text{im } K^* \subset a(\text{im } K) + \text{im } K$. Аналогичное рассуждение можно провести и для Φ_+ . В итоге получаем

$$\text{im } \Phi_- \subset a(\text{im } K) + \text{im } K, \quad \text{im } \Phi_+ \subset a^*(\text{im } K) + \text{im } K. \quad (2.8)$$

Эти включения доказаны для всех $\Phi = I + K \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$: мы нигде не использовали тот факт, что Φ является решением. Теперь воспользуемся им и запишем условие “в” утверждения 3 в виде

$$-a^* \Phi_- x + \Phi_- a^* x + a \Phi_+ x - \Phi_+ a x = 0 \quad \forall x \in D_1. \quad (2.9)$$

Второе и четвертое слагаемые принадлежат пространству $W := \text{im } K + a(\text{im } K) + a^*(\text{im } K)$ в силу (2.8). С другой стороны, имеем $\Phi_- x - aKx \in \text{im } K + \text{im } K^* = \text{im } K$ по приведенной выше формуле для Φ_- и аналогично $\Phi_+ x + a^*Kx \in \text{im } K$. Подставляя эти включения в первое и третье слагаемые в (2.9), выводим, что $-(aa^* + a^*a)Kx \in W$ для всех $x \in D_1$. В частности,

$$(aa^* + a^*a)(\text{im } K) \subset \text{im } K + a(\text{im } K) + a^*(\text{im } K). \quad (2.10)$$

Оператор $aa^* + a^*a$ имеет в стандартном базисе $\{e_j\}$ пространства H диагональную матрицу с $2j + 1$ в качестве jj -го элемента (см. п. 1.2). Поэтому для любого $x \in D_2$ с $(aa^* + a^*a)x \in D_k$ имеем $x \in D_{k+2}$. Это свойство позволяет закончить доказательство с помощью индукции. Действительно, правая часть (2.10) содержится в D_1 в силу условия $\Phi \in \mathcal{F}_2$, так что из (2.10) вытекает включение $\text{im } K \subset D_3$, т.е. $\Phi \in \mathcal{F}_3$. Но тогда правая часть (2.10) содержится в D_2 , и мы аналогично заключаем, что $\text{im } K \subset D_4$, и т.д. Утверждение доказано.

2.3. Решения нулевой энергии. Покажем, что оператор $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ удовлетворяет условию $E(\Phi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi = \Lambda \otimes I$ для некоторой унитарной матрицы $\Lambda \in U(n)$.

Действительно, любой оператор $X \in B(H^n)$ может быть записан в виде $(n \times n)$ -матрицы $(X_{ij})_{i,j=1}^n$, элементы которой суть операторы на H . При этом $[a, X]_{ij} = [a, X_{ij}]$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: если $X \in B(H)$ и $\partial_- X = 0$, то $X = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Для этого воспользуемся формулой

$$[a, X]_{kl} = \sqrt{k+1} X_{k+1,l} - \sqrt{l} X_{k,l-1},$$

где через $X_{kl} := (Xe_l, e_k)$ обозначаются матричные элементы оператора X в стандартном базисе $\{e_0, e_1, \dots\}$ пространства H (см. п. 1.2). Приравнивая числа $[a, X]_{kl}$ нулю и рассматривая отдельно каждую диагональ $\mathcal{D}_m := \{X_{kl} \mid k, l \geq 0, k - l = m\}$, легко видеть, что числа $X_{kl} \in \mathcal{D}_m$ с данным $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ могут быть равномерно ограниченными только в том случае, когда они все равны нулю. При $m = 0$ то же самое рассуждение показывает, что все диагональные элементы X_{kk} должны совпадать. Поэтому $X = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнение $\partial_- X = 0$ (т.е. $aX = Xa$) имеет также *неограниченные* решения X , например непостоянные полиномы от a . Естественно ожидать, что все решения $X: H \rightarrow H$ имеют вид $X = f(a)$, где f – целая функция с надлежащим условием на рост (строгие результаты такого типа см. в [13]).

2.4. Грассмановы решения. По аналогии с п. 1.1 заметим, что каждый ортопроектор $P \in \mathcal{F}_2$ определяет унитарный оператор $\Phi := I - 2P \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Геометрически Φ есть ортогональное отражение относительно подпространства $\ker P$ ($\Phi x = x$ для $x \in \ker P$ и $\Phi x = -x$ для $x \in \operatorname{im} P$). В частности, имеем $\Phi^{-1} = \Phi = \Phi^*$. Обратно, любой элемент $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi^{-1} = \Phi$ имеет вид $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ называется *грассмановым*, если $\Phi^{-1} = \Phi$ (эквивалентно, $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$).

Иногда удобно, несколько нарушая терминологию, отождествлять грассманово решение $\Phi = I - 2P$ с замкнутым векторным подпространством $V := \operatorname{im} P \subset H^n$ и использовать выражения вида “рассмотрим решение V ” или “ $\langle e_0, e_1 \rangle$ есть грассманово решение $U(1)$ -модели”.

Следующее утверждение выражает условия экстремума (утверждения 2, 3) для $\Phi = I - 2P$ в терминах ортопроектора P . Из него сразу видно, что всякое инвариантное подпространство V оператора уничтожения a задает два грассмановых решения: V и $V^\perp$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $P \in \mathcal{F}_2$ – ортопроектор. Каждое из следующих условий эквивалентно тому, что унитарный оператор $\Phi = I - 2P$ является решением:

- а) оператор $\partial_+(P^\perp a P)$ эрмитов,
- б) оператор $\partial_+(P a P^\perp)$ эрмитов.

В частности, если $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$ (эквивалентно, $P^\perp a P = 0$) или $a(\ker P) \subset \ker P$ (эквивалентно, $P a P^\perp = 0$), то $\Phi = I - 2P$ является решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$ можно написать $\Phi^{-1} = I - 2P = 2P^\perp - I$, откуда $\Phi_- = \Phi^{-1}\partial_-\Phi = (2P^\perp - I)(-2\partial_-P) = -4P^\perp\partial_-P + 2\partial_-P$ и, следовательно, $\partial_+\Phi_- = -4\partial_+(P^\perp\partial_-P) + 2\Delta P$. Утверждение 3 показывает, что Φ является решением в том и только том случае, когда оператор $\partial_+\Phi_-$ эрмитов. Но оператор ΔP всегда эрмитов согласно утверждению 1, а $P^\perp\partial_-P = P^\perp aP$. Поэтому Φ есть решение тогда и только тогда, когда выполнено условие “а”. Повторяя это рассуждение для $\partial_+\Phi_-$ вместо $\partial_-\Phi_+$, видим, что свойство Φ быть решением эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_-(P^\perp a^*P)$, что равносильно условию “б” в силу (2.7). Далее, если один из операторов $P^\perp aP$, $PaP^\perp$ равен нулю, то, очевидно, выполняется одно из условий “а”, “б”, так что Φ является решением. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решения $\Phi = I - 2P \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$ называются *BPS-решениями*²⁾, а аналогичные решения с $a(\ker P) \subset \ker P$ называются *анти-BPS-решениями*.

Заметим, что BPS- и анти-BPS-решения являются простейшими (после решений нулевой энергии) решениями некоммутативной сигма-модели. Они аналогичны (см. п. 1.1) голоморфным и антиголоморфным отображениям $\mathbb{C}P^1$ в грассманианы, вложенные в $U(n)$. Как и в коммутативном случае, эти решения являются точками глобального минимума функционала $P \mapsto E(I - 2P)$ в своих топологических классах (см. [9] или утверждение 8 ниже), а их пространства модулей допускают полное и сравнительно простое явное описание (см. [10], [11]). Примеры BPS- и анти-BPS-решений будут даны в разделе 4, а сейчас мы опишем простую конструкцию грассмановых решений, которые не являются ни BPS-, ни анти-BPS-решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть V_1, V_2 суть BPS-решения, причем $V_1 \subset V_2$ и $a^*V_1 \subset V_2$. Тогда ортогональное дополнение $V := V_2 \ominus V_1$ является решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ортопроекторы на V_1, V_2 и V через P_1, P_2 и P , соответственно. Поскольку $V_1 \subset V_2$, имеем $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$ и $P = P_2 - P_1$. В частности, $P^\perp = I - P_2 + P_1 = P_2^\perp + P_1$. Согласно утверждению 5 достаточно проверить, что результат применения ∂_+ к оператору

$$\begin{aligned} PaP^\perp &= (P_2 - P_1)a(P_2^\perp + P_1) = P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp + (P_2 - P_1)aP_1 = \\ &= P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp + (-P_2^\perp + P_1^\perp)aP_1 = P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp - P_2^\perp aP_1 + P_1^\perp aP_1 \end{aligned}$$

есть эрмитов оператор. Но результаты применения ∂_+ к первому и четвертому слагаемым последнего выражения эрмитовы, поскольку V_1 и V_2 суть решения. С другой стороны, второе слагаемое равно нулю в силу условия $a^*V_1 \subset V_2$ (которое следует записать в виде $P_2^\perp a^*P_1 = 0$ и применить сопряжение). Остается рассмотреть третье слагаемое $-P_2^\perp aP_1 = -P_2^\perp aP_2P_1$. Оно также равно нулю, так как V_2 есть BPS-решение. Утверждение доказано.

²⁾BPS-решения – решения Богомольного–Прасада–Зоммерфельда.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ясно, что доказательство справедливо для любого решения V_1 (не обязательно BPS-решения) при условии, что V_2 есть BPS-решение. Записав третье слагаемое $-P_2^\perp a P_1$ в виде $-P_2^\perp P_1^\perp a P_1$, мы получаем, что утверждение 6 остается справедливым, если считать, что V_1 есть BPS-решение, а V_2 – любое решение. Забегая вперед, отметим, что эти случаи подпадают под действие теории унитаров (п. 3.2): в первом случае P_2 есть унитар для $I - 2P_1$, а во втором P_1 есть унитар для $I - 2P_2$. Неизвестно, останется ли утверждение 6 справедливым, если считать V_1, V_2 любыми решениями (не обязательно BPS-решениями).

3. ТЕОРИЯ УНИТОНОВ

3.1. Топологический заряд проектора. Для $k = 1, 2, \dots$ обозначим через $\mathcal{F}'_k$ множество всех операторов $A = \Lambda \otimes I + K \in \mathcal{F}_k$ таких, что $\Lambda \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ есть скалярное кратное единичной матрицы: $\Lambda = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Как и в п. 1.3, множество $\mathcal{F}'_k$ есть подалгебра в $B(H^n)$, а $U(H^n) \cap \mathcal{F}'_k$ есть подгруппа в $U(H^n)$. Ясно, что ортопроектор $P \in B(H^n)$ принадлежит $\mathcal{F}'_1$ тогда и только тогда, когда либо $\text{im } P$, либо $\ker P = \text{im } P^\perp$ является конечномерным подпространством в $D_k \subset H^n$. Число

$$Q(P) := \|PaP^\perp\|_{\text{HS}}^2 - \|P^\perp a P\|_{\text{HS}}^2 \quad (3.1)$$

корректно определено для всех ортопроекторов $P \in \mathcal{F}'_1$, поскольку оба оператора в правой части имеют конечномерный образ. Как и в § 2.3 работы [10], будем называть число $Q(P)$ *топологическим зарядом* ортопроектора P . Следующее утверждение играет важную роль в теории унитаров. Оно аналогично утверждению о целочисленности классов Чжэня, возникающих в (1.3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $P: H^n \rightarrow H^n$ – ортопроектор класса $\mathcal{F}'_2$. Тогда число $Q(P)$ целое. Более точно,

$$Q(P) = \begin{cases} \dim \text{im } P, & \text{если } \dim \text{im } P < \infty, \\ -\dim \ker P, & \text{если } \dim \ker P < \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\dim \text{im } P < \infty$, так как отображение $P \mapsto P^\perp$ переставляет ядро и образ P и меняет знак числа $Q(P)$ (см. (3.1)). Из определения $\|A\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr}(A^*A) = \text{tr}(AA^*)$ видно, что $Q(P)$ есть след оператора

$$\begin{aligned} (PaP^\perp)(PaP^\perp)^* - (P^\perp a P)^*(P^\perp a P) &= Pa(I - P)a^*P - Pa^*(I - P)aP = \\ &= Paa^*P - PaPa^*P - Pa^*aP + Pa^*PaP = \\ &= P - PaPa^*P + Pa^*PaP = P + [Pa^*P, PaP]. \end{aligned}$$

Заметим, что предпоследнее равенство основано на соотношении (1.5) и предположении $P \in \mathcal{F}'_2$ (гарантирующем, что $aa^* - a^*a = I$ на $\text{im } P \subset D_2$). Далее, поскольку операторы Pa^*P и PaP имеют конечномерный образ, след их коммутатора равен нулю (см. [12], гл. III, § 4, формула (4.17)). Поэтому $Q(P) = \text{tr } P$ совпадает с $\dim \text{im } P$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Все BPS- и анти-BPS-решения класса $\mathcal{F}'_2$ являются глобальными минимумами функционала $P \mapsto E(I - 2P)$ в своих топологических классах, т.е. среди всех ортопроекторов P того же ранга или коранга, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все ортопроекторы $P \in \mathcal{F}'_2$ с $\dim \operatorname{im} P = k$, где $k \geq 0$ – фиксированное целое число. Пользуясь (3.1) и (3.2), можно переписать формулу

$$(8\pi)^{-1}E(I - 2P) = \|PaP^\perp\|_{\text{HS}}^2 + \|P^\perp aP\|_{\text{HS}}^2,$$

вытекающую, например, из (2.4) и второй формулы (3.7) ниже, в виде

$$(8\pi)^{-1}E(I - 2P) = k + 2\|P^\perp aP\|_{\text{HS}}^2.$$

Ясно, что правая часть принимает свое минимальное значение (равное k) тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} P$ есть BPS-решение ранга k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства утверждения 8 видно, что энергия любого BPS-решения ранга k (а также любого анти-BPS-решения коранга k) равна $8\pi k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Топологический заряд $Q(P)$ корректно определен формулой (3.1) для всех ортопроекторов $P \in \mathcal{F}'_1$, и очень правдоподобно, что формула (3.2) остается справедливой для этого более широкого класса проекторов. Нам это обобщение формулы (3.2) не потребуется. Отметим лишь, что для одномерных ортопроекторов P с $\operatorname{im} P = \langle u \rangle$, где $\|u\| = 1$, определение (3.1) принимает вид $Q(P) = \|a^*u\|^2 - \|au\|^2$. Поэтому любое доказательство указанного обобщения (3.2) должно опираться на “проинтегрированную форму” коммутационных соотношений (1.5), имеющую вид $\|a^*u\|^2 - \|au\|^2 = \|u\|^2$ для всех $u \in D_1$. С другой стороны, хорошо известно, что существуют “нестандартные” решения a коммутационных соотношений (1.5), не удовлетворяющие этому соотношению на всем пространстве $\operatorname{dom} a$. Простейший пример содержится в классической книге фон Неймана [14] (гл. II, § 8): возьмем $a = 2^{-1/2}(x + d/dx)$ на гильбертовом пространстве $H = L^2(0, 1)$ с $\operatorname{dom} a = \{\text{абсолютно непрерывные функции } u \in H \mid u' \in H, u(1) = u(0)\}$. Тогда $\|a^*u\|^2 - \|au\|^2 = \|u\|^2 - |u(0)|^2$ для всех $u \in \operatorname{dom} a$. Следовательно, в этом случае топологический заряд (3.1) одномерных ортопроекторов с образом, лежащим в $\operatorname{dom} a = \operatorname{dom} a^*$ (но не в $\operatorname{dom}(aa^*) \cap \operatorname{dom}(a^*a)$), не обязан быть целым: он может принимать любое вещественное значение, не превосходящее единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Можно распространить понятие топологического заряда на ортопроекторы P класса $\mathcal{F}_2$ (а не только $\mathcal{F}'_2$). Нам это обобщение не потребуется.

3.2. Добавление унитона. Следующее утверждение содержит некоммутативные аналоги формул добавления унитона (1.2) и скачка энергии (1.3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть унитарный оператор $\Phi \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ и ортопроектор $P \in \mathcal{F}'_2$ таковы, что

$$P\Phi_-P^\perp = 0, \quad P^\perp\Phi_-P + 2P^\perp aP = 0. \quad (3.3)$$

Тогда оператор $\Psi := \Phi(I - 2P)$ принадлежит $\mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ и справедливы следующие утверждения.

А. $\Psi_- = \Phi_- + 2\partial_- P$.

Б. $E(\Psi) = E(\Phi) + 8\pi Q(P)$.

В. Если Φ – решение, то Ψ – тоже решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оператор ∂_- к обеим частям равенства $\Psi = \Phi \times (I - 2P)$ и умножая на Φ^{-1} , получаем

$$\Psi_- = (I - 2P)\Phi_-(I - 2P) - 2(I - 2P)\partial_- P. \quad (3.4)$$

Теперь перейдем в P -базис, т.е. будем представлять каждый оператор X следующей (2×2) -матрицей операторов:

$$X = \begin{pmatrix} PXP & PXP^\perp \\ P^\perp XP & P^\perp XP^\perp \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Тогда уравнения (3.3) означают, что

$$\Phi_- = \begin{pmatrix} S & 0 \\ -2P^\perp aP & T \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

для некоторых S и T . Подставляя (3.6) в (3.4) и пользуясь очевидными формулами

$$I - 2P = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \partial_- P = \begin{pmatrix} 0 & -PaP^\perp \\ P^\perp aP & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

мы видим, что

$$\Psi_- = \begin{pmatrix} S & -2PaP^\perp \\ 0 & T \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Сравнение (3.8) и (3.6) немедленно дает утверждение п. А. Далее, поскольку квадрат нормы Гильберта–Шмидта любого оператора X равен сумме квадратов норм Гильберта–Шмидта четырех операторов, стоящих в правой части (3.5), мы имеем

$$\|\Psi_-\|_{\text{HS}}^2 - \|\Phi_-\|_{\text{HS}}^2 = 4\|PaP^\perp\|_{\text{HS}}^2 - 4\|P^\perp aP\|_{\text{HS}}^2,$$

что с учетом (3.1) дает утверждение п. Б. Для доказательства утверждения п. В напомним, что оператор $\Phi \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ является решением тогда и только тогда, когда оператор $\partial_+ \Phi_-$ эрмитов (см. утверждение 3). Но из утверждения п. А вытекает, что $\partial_+ \Psi_- = \partial_+ \Phi_- + 2\Delta P$, а оператор ΔP всегда эрмитов в силу утверждения 1. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ортопроектор $P \in \mathcal{F}'_2$ называется *унитоном для решения* $\Phi \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ (или *Φ -унитоном*), если пара (Φ, P) удовлетворяет соотношениям (3.3). В этом случае будем говорить, что новое решение $\Psi = \Phi(I - 2P)$ получено из Φ добавлением Φ -унитона P . Будем называть Φ -унитон P *положительным* (или *отрицательным*), если $Q(P) > 0$ (или $Q(P) < 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В процедуре добавления унитона используется не само решение Φ , а только его логарифмическая производная Φ_- . Поэтому с точки зрения теории унитаров естественно не различать решения $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$, которые эквивалентны друг другу в том смысле, что $(\Phi_1)_- = (\Phi_2)_-$ (или, что то же самое, $\Phi_2 = C\Phi_1$ для некоторого решения $C \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ нулевой энергии). Это и в самом деле отношение эквивалентности. Например, каждое анти-BPS-решение $\Phi = I - 2P$ эквивалентно соответствующему BPS-решению $-\Phi = I - 2P^\perp$, так что теория унитаров не различает BPS- и анти-BPS-решения. Ясно также, что любое решение

$\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ эквивалентно некоторому решению класса $U(H^n) \cap \mathcal{F}'_2$ (см. начало доказательства утверждения 4). Однако свойство $\Phi^2 = I$, вообще говоря, не сохраняется при переходе к эквивалентному решению, так что решение, эквивалентное грассманову, не обязано быть грассмановым.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В общем случае, если решения Φ_1 и Φ_2 связаны соотношением $\Phi_2 = \Phi_1(I - 2P)$ для некоторого ортопроектора P , то P не обязан быть Φ_1 -унитоном. Тем не менее процедура добавления унитарности всегда обратима в следующем смысле: *если Ψ получается из Φ добавлением Φ -унитона P , то $P^\perp$ является Ψ -унитоном, добавление которого к Ψ дает $-\Phi$* . Действительно, формулу $\Psi = \Phi(I - 2P)$ можно переписать в виде $-\Phi = \Psi(I - 2P^\perp)$. Чтобы проверить, что $P^\perp$ есть Ψ -унитон, достаточно (пользуясь п. А утверждения 9) заменить Φ_- на $\Psi_- + 2\partial_- P^\perp$ в (3.3). Тогда первое равенство (3.3) для Φ и P превратится во второе равенство (3.3) для Ψ и $P^\perp$, и наоборот.

3.3. Канонические унитарности. Покажем, что каждое решение обладает нетривиальными положительными и отрицательными унитарностями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ – любое решение, а P_Φ^- – ортопроектор с $\ker P_\Phi^- = \text{im } \Phi_-$. Тогда P_Φ^- является Φ -унитоном. Аналогично, если P_Φ^+ есть ортопроектор с $\text{im } P_\Phi^+ = \text{im } \Phi_+$, то P_Φ^+ является Φ -унитоном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записав условия (3.3) в виде

$$P\Phi_-P^\perp = 0, \quad P(\Phi_-^* + 2a^*)P^\perp = 0, \quad (3.9)$$

мы видим, что ортопроектор $P \in \mathcal{F}'_2$ с конечномерным ядром удовлетворяет (3.3) тогда и только тогда, когда $\ker P$ есть общее инвариантное подпространство для операторов Φ_- и $\Phi_-^* + 2a^*$. Утверждение 4 (об эллиптической регулярности) гарантирует принадлежность проектора P_Φ^- классу $\mathcal{F}'_2$ (а не только классу $\mathcal{F}'_1$, как вытекает из условия $\Phi \in \mathcal{F}_2$). При этом ясно, что $\text{im } \Phi_-$ является инвариантным подпространством для Φ_- . Чтобы проверить инвариантность этого подпространства относительно $\Phi_-^* + 2a^*$, запишем условие “а” утверждения 3 в виде

$$[\Phi_-, \Phi_-^* + 2a^*] = 0 \quad (3.10)$$

и воспользуемся следующим очевидным утверждением: если $[A, B] = 0$ и $\text{im } A \subset \text{dom } B$, то $B(\text{im } A) \subset \text{im } A$. Этим доказаны равенства (3.3) для $P = P_\Phi^-$. Доказательство для P_Φ^+ проводится совершенно аналогично на основе того факта, что ортопроектор $P \in \mathcal{F}'_2$ с конечномерным образом удовлетворяет (3.3) тогда и только тогда, когда $\text{im } P$ является общим инвариантным подпространством для операторов $\Phi_-^* = -\Phi_+$ (см. (2.6)) и $\Phi_- + 2a$, которые коммутируют в силу утверждения 3 или формулы (3.10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Φ -унитон P_Φ^- (P_Φ^+) называется *каноническим отрицательным* (*положительным*) *унитоном* для решения Φ .

Канонический отрицательный унитарность существует, и это особенно важно. Добавление этого унитарности уменьшает энергию любого данного решения Φ на число

$8\pi \dim \operatorname{im} \Phi_-$, которое всегда положительно, за исключением тривиального случая $E(\Phi) = 0$. Получаем два немедленных следствия этого факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11 (унитонная факторизация). *Для любого решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ найдется последовательность решений $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ такая, что $\Phi_0 = U \otimes I$ для некоторой матрицы $U \in U(n)$, $\Phi_m = \Phi$, и каждое решение Φ_{j+1} получается из Φ_j добавлением некоторого положительного Φ_j -унитона P_j , $j = 0, 1, \dots, m-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понизим энергию Φ добавлением канонического отрицательного унитарона и будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не получим решение Φ_0 нулевой энергии. Это произойдет за конечное число шагов, так как на каждом шагу энергия убывает на положительное целое кратное числа 8π . Согласно п. 2.3 имеем $\Phi_0 = U \otimes I$ для некоторой матрицы $U \in U(n)$. Теперь обратим все шаги указанной конструкции, пользуясь замечанием 7. Получим требуемую последовательность решений $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12 (целочисленность энергии). *Энергия $E(\Phi)$ любого решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ есть целое кратное 8π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из п. Б утверждения 9 получаем

$$E(\Phi) = 8\pi \sum_{j=0}^{m-1} \dim \operatorname{im} P_j$$

в обозначениях утверждения 11.

3.4. Базовые унитароны. Этот класс унитаронов, содержащий все канонические, характеризуется тем свойством, что одно из равенств (3.3) выполняется автоматически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Положительный (отрицательный) Φ -унитон $P \in \mathcal{F}'_2$ называется *базовым*, если $\operatorname{im} P \supset \operatorname{im} \Phi_+$ ($\ker P \supset \operatorname{im} \Phi_-$).

Согласно утверждению 12 нормированная энергия

$$e(\Phi) := (8\pi)^{-1} E(\Phi)$$

принимает целые значения для любого решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Назовем целое число $r(\Phi) := \dim \operatorname{im} \Phi_- = \dim \operatorname{im} \Phi_+$ (равенство вытекает из (2.6)) *каноническим рангом* произвольного решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Эти понятия и обозначения используются в следующем утверждении, содержащем основные свойства базовых унитаронов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. А. Унитарон, обратный к каноническому, является базовым.

Б. Добавление канонического унитарона не увеличивает канонический ранг.

В. Для любого решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ имеем $r(\Phi) \leq e(\Phi)$. Если $r(\Phi) = e(\Phi)$, то Φ эквивалентно некоторому BPS-решению класса $\mathcal{F}'_2$.

Г. Если $r(\Phi) = 1$, то Φ эквивалентно BPS-решению класса $\mathcal{F}'_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пусть решение $\Psi = \Phi(I - 2P)$ получено из Φ добавлением канонического отрицательного унитарона, т.е. $\ker P = \operatorname{im} \Phi_-$. Поскольку обратная операция задается равенством $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$ (см. замечание 7), нам надо показать, что $\operatorname{im} \Psi_+ \subset \operatorname{im} \Phi_-$. Однако из (2.6) и (3.8) видно, что оператор

$$\Psi_+ = -\Psi_-^* = \begin{pmatrix} -S^* & 0 \\ 2P^\perp a^* P & -T^* \end{pmatrix}$$

действительно имеет только $(\ker P)$ -значные компоненты, так как $S = 0$ по определению канонического отрицательного унитарона. В случае, когда решение Ψ получается из Φ добавлением канонического положительного унитарона ($\operatorname{im} P = \operatorname{im} \Phi_+$), аналогично имеем $T = 0$, и в Ψ_- присутствуют только $(\operatorname{im} P)$ -значные компоненты, откуда получаем требуемое включение $\operatorname{im} \Psi_- \subset \operatorname{im} P = \operatorname{im} \Phi_+$.

Б. Это утверждение вытекает из полученных в ходе доказательства п. А включений $\operatorname{im} \Psi_+ \subset \operatorname{im} \Phi_-$ (для канонического отрицательного Φ -унитарона) и $\operatorname{im} \Psi_- \subset \operatorname{im} \Phi_+$ (для канонического положительного Φ -унитарона).

В. Если Ψ получается из Φ добавлением канонического отрицательного унитарона $P = P_\Phi^-$, то $e(\Psi) = e(\Phi) - r(\Phi)$. Поэтому $e(\Phi) - r(\Phi) \geq 0$. Если в этом соотношении имеет место равенство, то Ψ есть решение нулевой энергии. Тогда $\Psi_- = 0$, и из (3.3) ясно, что все положительные унитароны для Ψ суть проекторы на BPS-подпространства. Поэтому из замечания 7 вытекает, что решение $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$ эквивалентно BPS-решению $I - 2P^\perp$ с $\dim \operatorname{im} P^\perp < \infty$.

Г. Доказательство проведем методом индукции по $e(\Phi)$. Если $e(\Phi) = 1$, то $r(\Phi) = e(\Phi)$ и требуемое утверждение вытекает из п. В. Допустим теперь, что утверждение доказано для $e(\Phi) \leq m$ и рассмотрим случай $e(\Phi) = m + 1$. Добавление к решению Φ канонического отрицательного унитарона дает новое решение Ψ с $e(\Psi) = m$ и $r(\Psi) \leq 1$ согласно п. Б. Если $r(\Psi) = 0$, то $\Psi_- = 0$ вопреки предположению $e(\Psi) = m \geq 1$. Поэтому $r(\Psi) = 1$, и согласно п. А решение Φ получается из Ψ добавлением одномерного канонического положительного Ψ -унитарона. По предположению индукции решение Ψ эквивалентно некоторому конечномерному BPS-решению. Записав $\Psi = C(I - 2P)$ и пользуясь формулами (3.7) вместе с BPS-условием $P^\perp a P = 0$, имеем $\Psi_- = -2(I - 2P)\partial_- P = -2(PaP^\perp + P^\perp a P) = -2PaP^\perp$. Поэтому пространство $\operatorname{im} \Phi_+ = \operatorname{im}(P^\perp a^* P)$ ортогонально $\operatorname{im} P$. Отсюда следует, что решение $C^{-1}\Phi$ грасманово. С другой стороны, энергия этого решения $e(\Phi) = e(\Psi) + 1 = m + 1$ совпадает с его рангом $\dim \operatorname{im} P + \dim \operatorname{im} \Phi_+ = m + 1$. Поэтому утверждение 8 влечет, что $C^{-1}\Phi$ есть (конечномерное) BPS-решение, что завершает доказательство шага индукции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Всякое решение $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ энергии $e(\Phi) = 1$ или $e(\Phi) = 2$ эквивалентно некоторому BPS-решению класса $\mathcal{F}'_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для таких решений всегда выполнено либо $r(\Phi) = 1$, либо $r(\Phi) = e(\Phi)$. Поэтому требуемое заключение вытекает из п. В или п. Г утверждения 13.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $e(\Phi) \geq 3$ уже не обязаны быть эквивалентны BPS-решениям (и даже грасмановым решениям). Примеры приведены ниже в п. 4.2.

3.5. Грассмановы решения. Любое грассманово решение $\Phi = I - 2P$ класса $\mathcal{F}'_2$ имеет две целочисленные характеристики: энергию $e(\Phi) = E(\Phi)/(8\pi)$ и топологический заряд $q(\Phi) := Q(P)$ (см. п. 3.1). Будем для определенности считать, что $\dim \operatorname{im} P < \infty$ (в противном случае рассмотрим $I - P$ вместо P), так что $q(\Phi) = \dim \operatorname{im} P \geq 0$ согласно (3.2). Из доказательства утверждения 8 видно, что целое число

$$\delta(\Phi) := e(\Phi) - q(\Phi) = 2\|P^\perp aP\|_{\text{HS}}^2 \quad (3.11)$$

всегда неотрицательно. Оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда Φ есть BPS-решение (см. определение 3). Поэтому число $\delta(\Phi)$ можно назвать *дефектом* грассманова решения Φ и рассматривать как меру отклонения грассманова решения от свойства быть BPS-решением. Теория унитаров позволяет установить, что дефект любого грассманова решения четен (что отнюдь не очевидно с других точек зрения), и дать весьма явное описание всех решений с минимальным ненулевым значением дефекта $\delta(\Phi) = 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Неотрицательное целое число $\delta(\Phi)$ четно для любого грассманова решения $\Phi = I - 2P \in \mathcal{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\dim \operatorname{im} P < \infty$. Равенство $\delta(\Phi) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ есть BPS-решение. Равенство $\delta(\Phi) = 2$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ есть результат вычитания некоторого одномерного BPS-решения из другого BPS-решения, как описано в утверждении 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем $\Phi_- = -2(I - 2P)\partial_- P$ по формуле (3.7):

$$\Phi_- = -2 \begin{pmatrix} 0 & PaP^\perp \\ P^\perp aP & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

откуда

$$\operatorname{im} \Phi_- = \operatorname{im}(PaP^\perp) \oplus \operatorname{im}(P^\perp aP).$$

Вычисляя действие нового решения $\Psi := (I - 2P)(I - 2P_\Phi^-)$ на каждом из четырех попарно ортогональных пространств $V_1 := \operatorname{im}(PaP^\perp)$, $V_2 := \operatorname{im} P \ominus \operatorname{im}(PaP^\perp)$, $V_3 := \operatorname{im}(P^\perp aP)$ и $V_4 := \operatorname{im}(P^\perp) \ominus \operatorname{im}(P^\perp aP)$, мы видим, что это новое решение также грассманово: $\Psi = -(I - 2P_1)$, где $\operatorname{im} P_1 = V_2 \oplus V_3$. Топологический заряд и энергия решения $\Phi_1 := -\Psi$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} q(\Phi_1) &= q(\Phi) - \dim \operatorname{im}(PaP^\perp) + \dim \operatorname{im}(P^\perp aP), \\ e(\Phi_1) &= e(\Phi) - \dim \operatorname{im}(PaP^\perp) - \dim \operatorname{im}(P^\perp aP). \end{aligned}$$

Поэтому дефект $\delta(\Phi_1) = \delta(\Phi) - 2 \dim \operatorname{im}(P^\perp aP)$ отличается от дефекта исходного решения на положительное четное число, за исключением случая, когда исходное решение Φ есть BPS-решение. Повторяя процедуру добавления канонического отрицательного унитарного конечное число раз, придем к решению с $\delta = 0$. Следовательно, число $\delta(\Phi)$ всегда четное.

Теперь допустим, что $\delta(\Phi) = 2$. Тогда из предыдущего рассуждения вытекает, что $V_2 \oplus V_3$ есть BPS-подпространство и $\dim V_3 = 1$. Записав $V_3 = \langle u \rangle$, получаем отсюда, что $au \in V_2 \oplus V_3$, т.е. $au - \lambda u \in V_2$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. В частности, $au - \lambda u \perp Pa u$

для всех $y \in \operatorname{im} P^\perp$. Применяя это к $y = u$ и замечая, что $Pa u = a u - \lambda u$, получаем равенство $a u - \lambda u = 0$, так что $V_3 = \langle u \rangle$ есть одномерное BPS-подпространство. Далее, поскольку $V_3 = \operatorname{im}(P^\perp a P)$ совпадает с $\langle u \rangle$, мы имеем $a V \subset V \oplus \langle u \rangle$, где $V := \operatorname{im} P$. Следовательно, $a(V \oplus \langle u \rangle) \subset V \oplus \langle u \rangle$. Таким образом, V получается вычитанием одномерного BPS-подпространства $W_1 := \langle u \rangle$ из BPS-подпространства $W_2 := V \oplus \langle u \rangle$, как в утверждении 6. Надо только проверить, что $a^* W_1 \subset W_2$. Для этого используем тот факт (вытекающий из второго уравнения (3.9) для $P = P_\Phi^-$), что $\ker P_\Phi^- = V_1 \oplus V_3$ есть инвариантное подпространство оператора

$$\Phi_-^* + 2a^* = 2 \begin{pmatrix} P a^* P & 0 \\ 0 & P^\perp a^* P^\perp \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что $P^\perp a^* P^\perp (V_3) \subset V_3$, т.е. $a^* u \in V \oplus \langle u \rangle$, что и требовалось доказать.

Наконец, для любых BPS-решений W_1, W_2 с $W_1 \subset W_2$ и $a^* W_1 \subset W_2$ (как в утверждении 6) соответствующее грассманово решение $\Phi = I - 2P$ с $\operatorname{im} P = W_2 \ominus W_1$ имеет энергию $e(\Phi) = d_1 + d_2$ и топологический заряд $q(\Phi) = d_2 - d_1$, где $d_1 = \dim W_1$, $d_2 = \dim W_2$. (Формула для $q(\Phi)$ очевидна, а формулу для $e(\Phi)$ легче всего получить из п. Б утверждения 9, заметив, что каждое из подпространств W_1, W_2 является в очевидном смысле унитаром для другого.) Поэтому получаем $\delta(\Phi) = 2d_1$, что действительно равно 2 для одномерных W_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Грассмановы решения $\Phi \in U(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\delta(\Phi) \geq 4$ уже не обязаны быть разностью двух BPS-решений в смысле утверждения 6. Допустим, например, что грассманово решение $\langle e_0, e_2 \rangle$ (дефекта $\delta(\Phi) = 4$) равно $W_2 \ominus W_1$ для некоторых BPS-решений W_1, W_2 с $W_1 \subset W_2$. Поскольку пространство W_2 содержит e_2 , оно должно содержать и $e_1 = 2^{-1/2} a e_2$. Тогда W_1 также обязано содержать e_1 , а значит, и $e_0 = a e_1$. Но в этом случае $W_2 \ominus W_1$ не может содержать e_0 , т.е. мы получили противоречие.

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Диагональные решения $U(1)$ -модели. Рассмотрим унитарные операторы $\Phi = \operatorname{diag}(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots) \in U(H) \cap \mathcal{F}_2$, имеющие диагональную матрицу в стандартном базисе $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ пространства H (см. п. 1.2). Здесь $\zeta_j \in \mathbb{C}$ и $|\zeta_j| = 1$ при $j = 0, 1, 2, \dots$. Из утверждения 2 легко вывести, что Φ является решением тогда и только тогда, когда $\Phi = e^{i\theta}(I - 2P_M)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ и некоторого конечного множества $M \subset \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, где P_M – ортопроектор с $\operatorname{im} P_M = \langle e_j \mid j \in M \rangle$. Таким образом, все диагональные решения эквивалентны грассмановым и, обратно, все диагональные унитарные операторы Φ класса $U(H) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi = \Phi^{-1}$ являются решениями.

Проиллюстрируем понятия и результаты теории унитаров на примере диагональных решений. При этом мы опустим доказательства, так как все они состоят в прямой проверке с помощью формулы (3.12). Энергия и канонический ранг любого диагонального решения $\Phi_M := I - 2P_M$ выражаются формулами

$$e(\Phi_M) = \sum_{j \in M} (j+1), \quad r(\Phi_M) = \sum_{j \in M} 1, \quad (4.1)$$

где $M\Delta(M-1) := (M \cup (M-1)) \setminus (M \cap (M-1))$ – симметрическая разность множеств M и $M-1 := \{j-1 \in \mathbb{N} \mid j \in M\}$. Добавление канонического отрицательного унитарона к решению Φ_M равносильно замене M на $M-1$. Добавление канонического положительного унитарона к Φ_M равносильно замене M на $M+1$ (если $0 \notin M$) или на $\{0\} \cup M+1$ (если $0 \in M$). Дефект решения Φ_M выражается формулой

$$\delta(\Phi_M) = 2 \sum_{j \in (M-1) \setminus M} (j+1) \quad (4.2)$$

и может, таким образом, принимать любые четные неотрицательные значения. Наконец, Φ_M является BPS-решением тогда и только тогда, когда $M = \{0, 1, \dots, r-1\}$ для некоторого целого $r \geq 1$. Это доставляет примеры BPS-решений любой заданной энергии (и канонического ранга 1), но отнюдь не исчерпывает их (см. [10], [11]).

4.2. Неграссмановы нулевые моды гессииана энергии вокруг диагонального BPS-решения. Напомним постановку вопроса из работы [10]. Пусть $\Phi_r = I - 2P_r$ есть диагональное BPS-решение $U(1)$ -модели с $e(\Phi_r) = r$, т.е. $\text{im } P_r = \{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}\}$. Гессииан $\mathcal{H}(\xi)$ функционала энергии E в точке Φ_r – это неограниченный эрмитов оператор на касательном пространстве $\mathcal{V} = T_{\Phi_r}U(H) = \{\xi \in \text{HS}(H) \mid \xi^* = -\Phi_r \xi \Phi_r\}$, определяемый условием, что эрмитова форма $\langle \mathcal{H}\xi, \xi \rangle_{\text{HS}}$ совпадает с формой $E^{(2)}[\Phi_r, \xi]$ второй вариации функционала E в точке Φ_r (см. [10]). Пространство $\mathcal{V}$ распадается в ортогональную прямую сумму инвариантных подпространств $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ оператора $\mathcal{H}$, где $\mathcal{E}_0$ – пространство всех косоэрмитовых диагональных операторов с конечной нормой Гильберта–Шмидта, а

$$\mathcal{E}_k = \{\varphi - \Phi_r \varphi \Phi_r \mid \varphi \in \mathcal{D}_k\}, \quad k \geq 1, \quad (4.3)$$

– ортогональная проекция $\mathcal{D}_k \oplus \mathcal{D}_{-k}$ на $\mathcal{V}$ относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта (см. [10], § 4.1). Здесь для каждого $m \in \mathbb{Z}$ через $\mathcal{D}_m := \{\varphi \in \text{HS}(H) \mid \varphi_{st} = 0 \text{ при } t-s \neq m\}$ обозначается m -я диагональ (см. п. 2.3). При $1 \leq k \leq r-1$ пространство $\mathcal{E}_k$ далее распадается на инвариантные подпространства по формуле

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{\text{im}}^{(k)} \oplus \mathcal{E}_{\text{Gr}}^{(k)} \oplus \mathcal{E}_{\text{ker}}^{(k)}, \quad (4.4)$$

причем слагаемые справа имеют размерность $r-k$, k и ∞ , соответственно (см. [10], формула (4.21)). Интересующее нас подпространство $\mathcal{E}_{\text{im}}^{(k)} \subset \mathcal{E}_k$ выделено в (4.3) условием $\varphi_{st} = 0$ при $s \geq r-k$.

Как показано в § 4.3.2 работы [10], каждое подпространство $\mathcal{E}_{\text{im}}^{(k)}$, $1 \leq k \leq r-1$, содержит ровно две линейно независимые над $\mathbb{R}$ нулевые моды гессииана энергии, т.е. ровно два линейно независимых вектора из ядра $\ker \mathcal{H}$. Эти векторы получены ортогональным проектированием на $\mathcal{V}$ некоторого одномерного комплексного подпространства из $\mathcal{D}_k$ (см. (4.3)), так что можно говорить об одной комплексной нулевой моде $\varphi_r^{(k)} \in \mathcal{D}_k$. Вопрос состоит в том, реализуются ли эти нулевые моды как касательные векторы в точке Φ_r к пространству модулей (автоматически неграссмановых) решений $U(1)$ -модели³⁾.

³⁾О том, почему решения, реализующие эти нулевые моды, обязаны быть неэквивалентными грассмановым, см. в [10], § 3.2–3.4.

Из утверждения 14 вытекает, что нулевая мода $\varphi_2^{(1)} \in \mathcal{D}_1$ не реализуется указанным способом, поскольку все решения энергии $8\pi \cdot 2$ являются грассмановыми (и даже BPS-решениями) с точностью до скалярного множителя $e^{i\theta}$. В то же время теория унитаров дает следующий положительный результат о реализуемости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Обозначим через k_r наибольшее целое число, не превосходящее $(r-1)/2$. Тогда для всякого $j = 1, \dots, k_r$ пространство всех решений энергии $8\pi j$ содержит гладко (и даже вещественно-аналитически) вложенную комплексную прямую $L_r^{(j)} \cong \mathbb{C}P^1$, касательный вектор к которой в точке Φ_r реализует нулевую моду $\varphi_r^{(r-j)} \in \mathcal{D}_{r-j}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $B = I - 2P_0$ диагональное BPS-решение энергии $8\pi j$, т.е. $\text{im } P_0 = \langle e_0, e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$. По условию целое число $s := r - 2j$ удовлетворяет $s \geq 1$. Для каждого $c \in \mathbb{C}$ определим $(r-j)$ -мерный ортопроектор $P(c)$ формулой

$$\text{im } P(c) = \left\langle e_j, \dots, e_{j+s-1}, ce_0 + e_{j+s}, ce_1 + \frac{e_{j+s+1}}{\sqrt{j+s+1}}, \right. \\ \left. \frac{ce_2}{\sqrt{2}} + \frac{e_{j+s+2}}{\sqrt{(j+s+1)(j+s+2)}}, \dots, \frac{ce_{j-1}}{\sqrt{(j-1)!}} + \sqrt{\frac{(j+s)!}{(2j+s)!}} e_{2j+s} \right\rangle. \quad (4.5)$$

Заметим, что оператор a переводит каждый вектор этого базиса, начиная с $ce_0 + e_{j+s}$, в предшествующий ему вектор. Пространство (4.5) содержит $\text{im } B_+ = \langle e_j \rangle$ и инвариантно относительно оператора $B_- + 2a$, равного $2a$ на $\langle e_j \rangle^\perp$ и нулю на $\langle e_j \rangle$. Поэтому из критерия, содержащегося в последней фразе доказательства утверждения 10, вытекает, что при каждом $c \in \mathbb{C}$ ортопроектор $P(c)$ является (базовым) B -унитоном. Соответствующие решения

$$\Phi(c) = (I - 2P_0)(I - 2P(c)), \quad c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (4.6)$$

образуют комплексную прямую $L_r^{(j)} \cong \mathbb{C}P^1$, вложенную в пространство решений энергии $8\pi r$ и соединяющую между собой диагональные грассмановы решения $\Phi(0) = \Phi_r$ и $\Phi(\infty) = I - 2Q$, где $\text{im } Q = \langle e_j, \dots, e_{j+s-1} \rangle$. Из (4.5) следует, что все ненулевые элементы матрицы $\Phi(c)$ лежат на диагоналях $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_{r-j}$ и $\mathcal{D}_{j-r}$. Полагая $\mu = \text{Re } c$, $\nu = \text{Im } c$ и дифференцируя $\Phi(\mu + i\nu)$ по μ и ν в точке $\mu = \nu = 0$, получим, что диагональные матричные элементы этих производных равны нулю. Следовательно, эти производные принадлежат $\mathcal{E}_{r-j}$. Теперь из определения неграссмановых нулевых мод вытекает, что (комплексный) касательный вектор к $L_r^{(j)}$ в точке Φ_r реализует нулевую моду $\varphi_r^{(r-j)} \in \mathcal{D}_{r-j}$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Весьма правдоподобно, что при $j \in \{k_r + 1, \dots, r\}$ нулевые моды $\varphi_r^{(r-j)} \in \mathcal{D}_{r-j}$ не реализуются касательными векторами к пространству модулей решений (частичные результаты в этом направлении вместе с дальнейшим обсуждением содержатся в [11]). Если это так, то наличие указанных нулевых мод гессиана должно объясняться вырожденностью (т.е. высоким порядком нуля) функционала $E(\Phi) - E(\Phi_r)$ вдоль направления $\varphi_r^{(r-j)}$ или, точнее, вдоль вещественных направлений $\varphi - \Phi_r \varphi \Phi_r \in \mathcal{E}_{r-j}$, где $\varphi = \gamma \varphi_r^{(r-j)}$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В качестве явного примера укажем матрицу оператора $\Phi(c)$ из (4.6) в стандартном базисе для простейшего случая, когда $r = 3$ и $j = 1$:

$$\Phi(c) = \begin{pmatrix} k & 0 & -\bar{l} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ l & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\infty \end{pmatrix}, \quad k := \frac{|c|^2 - 1}{|c|^2 + 1}, \quad l := -\frac{2\bar{c}}{|c|^2 + 1}. \quad (4.7)$$

Здесь I_∞ означает тождественную матрицу бесконечного ранга. Заметим, что матрица (4.7) не эрмитова и не становится эрмитовой после умножения на $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Поэтому решения (4.7) не эквивалентны грассмановым при $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это верно и для общих решений (4.6), откуда вытекает справедливость замечания 8.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность О. Лехтенфельду за введение в некоммутативную тематику, постоянный интерес к работе и многочисленные полезные обсуждения, а также А. Д. Попову, впервые предложившему перенести теорию унитаров на некоммутативную сигма-модель. Работа выполнена в рамках совместного проекта РФФИ–DFG 436 RUS 113/669 при частичной поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00981, 05-01-00498) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-9429.2006.1).

Список литературы

- [1] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [2] Й. Давидов, А. Г. Сепреев, *УМН*, **48:3** (1993), 3–96.
- [3] M. A. Guest, “An update on harmonic maps of finite unton number, via the zero curvature equation”, *Integrable Systems, Topology, and Physics. A Conference on Integrable Systems in Differential Geometry* (Tokyo, Japan, 2000), *Contemp. Math.*, **309**, eds. M. Guest et al., AMS, Providence, RI, 2002, 85–113.
- [4] K. Uhlenbeck, *J. Differential Geom.*, **30:1** (1989), 1–50.
- [5] G. Valli, *Topology*, **27:2** (1988), 129–136.
- [6] J. A. Harvey, *Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes*, [arXiv: hep-th/0102076](#).
- [7] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [8] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Т. III. *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.
- [9] O. Lechtenfeld, A. D. Popov, *JHEP*, **11** (2001), 040.
- [10] A. V. Domrin, O. Lechtenfeld, S. Petersen, *JHEP*, **03** (2005), 045.
- [11] А. В. Домрин, “Пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели”, *ТМФ*, 2008 (в печати).
- [12] Т. Каго, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [13] R. Rochberg, N. Weaver, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129:9** (2001), 2679–2687.
- [14] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.

Поступила в редакцию 26.02.2007