Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Клевцов, К вертекс-операторной конструкции
квантовых аффинных алгебр, *ТМФ*, 2008, том 154, но-
мер 2, 240–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:06:16

© 2008 г.

С. Е. Клевцов*

К ВЕРТЕКС-ОПЕРАТОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ КВАНТОВЫХ АФФИННЫХ АЛГЕБР

Описана конструкция квантовых аффинных алгебр вершинными операторами в теории свободных полей. Доказаны тождества Серра для борелевских подалгебр квантовых аффинных алгебр, в частности случай $\widehat{sl}_2$ рассмотрен детально. Также построены генераторы, соответствующие положительным корням $\widehat{sl}_2$.

Ключевые слова: квантовые группы, квантовые аффинные алгебры, теория свободных полей, минимальные модели, соотношения Серра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебры вершинных (вертексных) операторов [1]–[3] в теории свободных полей [4]–[6] обладают богатой математической структурой. Хорошо известна их связь с теорией представлений аффинных алгебр Ли [7], а также с теорией квантовых групп [8]. Различные аспекты вертекс-операторных конструкций квантовых групп также изучались в работах [9], [10].

В этой статье мы изучаем вертекс-операторную конструкцию квантовых борелевских подалгебр конечномерных и аффинных алгебр в теории свободных полей φ^i , $i = 1, 2, \dots, n$. Теория свободных полей описывается действием

$$S = \int d^2z (\partial\varphi^i \bar{\partial}\varphi^i + i\alpha_0 R \rho^i \varphi^i), \quad (1)$$

где R – двумерная кривизна фоновой метрики, α_0 – экранирующий заряд, ρ^i – некоторый постоянный вектор. Пусть φ^i принимают значения на некотором торе. Решетка корней, соответствующая тору, порождает некоторую алгебру Ли g [2]. Мы рассматриваем вершинные операторы конформной размерности 1 и изучаем их коммутационные соотношения. Строго говоря, если алгебра Ли g имеет некоторое разложение Картана $g = n_- \oplus h \oplus n_+$, то вершинные операторы, соответствующие простым корням, удовлетворяют соотношениям $U_q(n_+)$ с некоторым параметром деформации $q = q_+$. Аналогично можно получить квантовую группу $U_q(n_-)$ (с некоторым другим параметром деформации q_-).

*Институт теоретической и экспериментальной физики; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: klevtsov@itep.ru

Конструкции подобного рода для конечномерных алгебр типа ADE были предложены в работе [6] и изучены в [9] (см. также [10]). Целью настоящей работы является обобщение этой конструкции на случай квантовых аффинных алгебр (рассмотрены также и конечномерные алгебры). Мы доказываем соотношения Серра и приводим явные формулы для генераторов в аффинном случае. Отметим, что соотношения Серра в аффинных квантовых алгебрах изучались также в работах [11], [12].

В классическом пределе $\alpha_0 \rightarrow 0$ вершинные операторы в теории с действием (1) должны сводиться к известным формулам [2]. В подходе, примененном в данной работе, предел $\alpha_0 \rightarrow 0$ может быть получен явно (ср. с [9], [10], [13], где этот предел неочевиден).

Существует тесная связь между конформными минимальными моделями и квантовой конформной теорией Тоды при специальных значениях параметров. Можно полагать, что предложенная в этой работе конструкция может быть полезна для понимания квантования конформной аффинной теории Тоды [14].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описана конструкция $U_q(sl_3)$. В разделе 3 доказаны тождества Серра в этом случае. Конструкция квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ представлена в разделе 4; детали доказательства тождеств Серра и формулы для генераторов приведены в приложении. Отметим также, что доказательство соотношений Серра для $U_q(sl_3)$ полностью переносится на случай произвольной алгебры типа ADE , т.е. представленная конструкция обобщается на случай произвольной алгебры данного типа.

2. КОНСТРУКЦИЯ $U_q(sl_3)$

Тензор энергии-импульса, соответствующий действию (1), дается выражением

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi(z), \partial\varphi(z)) + i\alpha_0(\rho, \partial^2\varphi(z)), \quad (2)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение, т.е. $\varphi^i\varphi^i = (\varphi, \varphi)$. Тензор $T(z)$ генерирует алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c = n - 12\alpha_0^2(\rho, \rho)$. Рассмотрим следующие вершинные операторы, проинтегрированные по подходящему контуру:

$$\int dz V_\alpha^\pm(\varphi) = \int dz :e^{i\alpha_\pm(\alpha, \varphi)}:,$$

где $:\dots:$ обозначает нормальное упорядочение, а $\alpha_\pm$ – некоторые константы, значения которых определяются из условия равенства единице конформной размерности оператора Δ :

$$\begin{aligned} \Delta(V_\alpha^\pm) &= \frac{1}{2}\alpha_\pm^2(\alpha, \alpha) - \alpha_0\alpha_\pm(\rho, \alpha) = 1, \\ \alpha_\pm &= \frac{\alpha_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы подразумеваем, что α и β – простые корни sl_3 , а $\rho^i = (1/2)\sum_+ \alpha^i$ – вектор Вейля, т.е. $(\alpha, \alpha) = 2$, $(\alpha, \beta) = -1$ и $(\rho, \alpha) = (\rho, \beta) = 1$. Рассмотрим алгебру

с двумя генераторами

$$E_\alpha = \int dz :e^{i\alpha+(\alpha,\varphi)}:, \quad E_\beta = \int dz :e^{i\alpha+(\beta,\varphi)}:, \quad (4)$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости z проходит из точки $z = 1$ вокруг нуля обратно в точку $z = 1$ против часовой стрелки. Для произведения n вершинных операторов получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} [[V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_n}]] &:= \int_{\Gamma_n} dz_1 \dots dz_n :e^{i\alpha+(\alpha_1,\varphi)}(z_1): \dots :e^{i\alpha+(\alpha_n,\varphi)}(z_n): = \\ &= \int_{\Gamma_n} dz_1 \dots dz_n \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_k - z_l)^{\alpha_+^2(\alpha_k, \alpha_l)} \times \\ &\quad \times :e^{i\alpha+(\alpha_1,\varphi)}(z_1) \dots e^{i\alpha+(\alpha_n,\varphi)}(z_n):, \end{aligned} \quad (5)$$

где использовано правило Вика. Контур интегрирования Γ_n (рис. 1) выбран согласно прескрипции Фельдера [6]. Он состоит из n вложенных контуров единичного радиуса, ориентированных против часовой стрелки и идущих из точки $z = 1$ вокруг нуля обратно в ту же точку. Интеграл (5), определенный таким образом, содержит сингулярности при $z_k = z_l$. Мы регуляризуем их с помощью раздвижки точек на малую величину ε ; снятие регуляризации происходит в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рис. 1. Контур интегрирования Γ_n .

Генератор, соответствующий корню $\alpha + \beta$, дается следующим квантовым коммутатором:

$$E_{\alpha+\beta} = -[E_\alpha, E_\beta]_{q^{-1}} := -[[V_\alpha V_\beta - q^{-1}V_\beta V_\alpha]], \quad q = q_+ = e^{i\pi\alpha_+^2}. \quad (6)$$

Этот генератор не может быть записан как локальный интеграл в z -плоскости, он имеет некоторую нелокальную форму (см. раздел 3). Все остальные возможные q -коммутаторы (E_α, E_β с $E_{\alpha+\beta}$) должны быть равны нулю согласно соотношениям Серра для $U_q(sl_3)$:

$$[E_\alpha, [E_\alpha, E_\beta]_{q^{-1}}]_q = [[V_\alpha V_\alpha V_\beta - (q + q^{-1})V_\alpha V_\beta V_\alpha + V_\beta V_\alpha V_\alpha]] = 0. \quad (7)$$

Доказательство, приведенное в разделе 3, основано на регуляризации выражения (7) раздвижкой точек. Основное наблюдение в процессе доказательства (7) состоит в том, что все сингулярные по $1/\varepsilon$ члены сокращаются во всех порядках.

Выражения (6), (7) определяют коммутационные соотношения для верхнетреугольной части квантовой группы $U_q(sl_3)$ с квантовым параметром q_+ .

Существует классический предел данной конструкции $\alpha_0 \rightarrow 0$ ($q \rightarrow -1$), при взятии которого действие (1) содержит только кинетический член. Этот предел не

совпадает со стандартным пределом $q \rightarrow 1$, при котором квантовая группа переходит в соответствующую алгебру Ли. В данном случае при взятии классического предела мы получаем конструкцию Френкеля–Каца–Сегала [1], [2] в теории бозонной струны. Квантовый коммутатор (6) принимает вид $E_\alpha E_\beta - (-1)^{(\alpha, \beta)} E_\beta E_\alpha$, а множитель $(-1)^{(\alpha, \beta)}$ может быть удален с помощью введения коциклов в определение вершинных операторов (см. [2]).

3. СООТНОШЕНИЯ СЕРРА ДЛЯ $U_q(sl_3)$

В этом разделе мы приводим доказательство соотношений Серра (7).

Введем следующее обозначение для интеграла (5) с упорядоченным порядком интегрирования:

$$I_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \int_{\arg z_k < \arg z_{k+1} - \varepsilon} dz_1 \dots dz_n : e^{i\alpha_+(\alpha_1, \varphi)}(z_1) : \dots : e^{i\alpha_+(\alpha_n, \varphi)}(z_n) :, \quad (8)$$

где $1 \leq k \leq n - 1$. Можно явно построить третий генератор, используя $q = e^{i\pi\alpha_+^2}$:

$$\begin{aligned} E_{\alpha+\beta} &= -[[V_\alpha V_\beta - q^{-1} V_\beta V_\alpha]] = \\ &= - \int_{\Gamma_2} dz_1 dz_2 (z_1 - z_2)^{-\alpha_+^2} : e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_1) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_2) : + q^{-1} \cdot (\alpha \leftrightarrow \beta). \end{aligned} \quad (9)$$

При замене переменных $z_1 \leftrightarrow z_2$ во втором интеграле возникает дополнительный компенсирующий множитель q и контур интегрирования может быть заменен со-

Рис. 2. Контур интегрирования в формуле (9).

гласно рис. 2. Далее можно отдельно проинтегрировать по окружности радиуса ε ($z_1 - z_2 = \varepsilon e^{i\psi}$) и переписать интеграл в виде (8):

$$\begin{aligned} E_{\alpha+\beta} &= -\varepsilon^{1-\alpha_+^2} \int i d\psi dz_2 e^{i(1-\alpha_+^2)\psi} \times \\ &\times : e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_2 + \varepsilon e^{i\psi}) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_2) : - (1 - q^{-2}) I_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Множитель $(1 - q^{-2})$ появился благодаря фактору $(z_1 - z_2)^{-\alpha_+^2}$ в подынтегральном выражении. Заметим, что в классическом пределе $\alpha_0 \rightarrow 0$ (или, что эквивалентно, $q \rightarrow -1$) коэффициент при нелокальном члене $I_{\alpha\beta}$ обращается в нуль и мы воспроизводим классическое определение третьего генератора [1], [2]:

$$E_{\alpha+\beta} = \int dz : e^{i(\alpha+\beta, \varphi)} :.$$

Главной проверкой верности нашей конструкции является выполнение тождества Серра (7) для квантовой группы $U_q(sl_3)$. Оно может быть переписано в следующем

виде:

$$\begin{aligned}
 & [[V_\alpha V_\alpha V_\beta - q^{-1} V_\alpha V_\beta V_\alpha]] - q[[V_\alpha V_\beta V_\alpha - q^{-1} V_\beta V_\alpha V_\alpha]] = \\
 & = \int_{C_1} dz_1 dz_2 dz_3 (z_1 - z_2)^{2\alpha_+^2} (z_1 - z_3)^{-\alpha_+^2} (z_2 - z_3)^{-\alpha_+^2} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_1) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_2) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_3): - \\
 & \quad - q \int_{C'_2} dz_1 dz_2 dz_3 (z_1 - z_2)^{-\alpha_+^2} (z_1 - z_3)^{2\alpha_+^2} (z_2 - z_3)^{-\alpha_+^2} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_1) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_2) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_3):. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Производя замену переменных $z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_3, z_3 \rightarrow z_1$ во втором интеграле (после которой контур C'_2 заменяется на C_2 и появляется фактор q^{-1}) и интегрируя

Рис. 3. Контурсы интегрирования в формулах (11), (12) (во всех контурах направление движения против часовой стрелки).

по окружности радиуса ε : $z_1 - z_3 = \varepsilon e^{i\theta}$, $z_2 - z_3 = \varepsilon e^{i\psi}$, получаем для предыдущего выражения (см. рис. 3)

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^2 \int i d\theta i d\psi dz_3 (e^{i\theta} - e^{i\psi})^{2\alpha_+^2} e^{i(1-\alpha_+^2)(\theta+\psi)} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_3 + \varepsilon e^{i\theta}) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_3 + \varepsilon e^{i\psi}) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_3): + \\
 & \quad + \varepsilon^{1-\alpha_+^2} \int i d\psi dz_1 dz_3 (z_1 - z_3 - \varepsilon e^{i\psi})^{2\alpha_+^2} (z_1 - z_3)^{-\alpha_+^2} e^{i(1-\alpha_+^2)\psi} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_1) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_3 + \varepsilon e^{i\psi}) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_3): + \\
 & \quad + \varepsilon^{1-\alpha_+^2} \int i d\theta dz_2 dz_3 (z_3 - z_2 + \varepsilon e^{i\theta})^{2\alpha_+^2} (z_2 - z_3)^{-\alpha_+^2} e^{i(1-\alpha_+^2)\theta} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_2) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_3 + \varepsilon e^{i\theta}) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_3): + \\
 & \quad + \int_{C_\varepsilon} dz_1 dz_2 dz_3 (z_1 - z_2)^{2\alpha_+^2} (z_1 - z_3)^{-\alpha_+^2} (z_2 - z_3)^{-\alpha_+^2} \times \\
 & \quad \times :e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_1) e^{i\alpha_+(\alpha, \varphi)}(z_2) e^{i\alpha_+(\beta, \varphi)}(z_3):. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (12), возникшее при интегрировании по двум окружностям радиуса ε , исчезает в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Сингулярные слагаемые (второе и третье) взаимно сокращаются. Контур C_ε в четвертом слагаемом совпадает с контуром C за вычетом окружностей радиуса ε . Он содержит интегрирование по окружности $|z_1 - z_2| = \varepsilon$, исчезающее в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Оставшийся интеграл может быть переписан через базис интегралов $I_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ (8):

$$I_{\alpha\alpha\beta} + q^2 q^{-4} I_{\alpha\alpha\beta} - q^2 q^{-4} I_{\alpha\alpha\beta} - q^{-2} q^2 I_{\alpha\alpha\beta} = 0. \quad (13)$$

Это завершает доказательство тождеств Серра.

4. КВАНТОВАЯ ГРУППА $U_q(\widehat{sl}_2)$

Для обобщения приведенной конструкции на аффинный случай нужно ввести два дополнительных светоподобных поля φ_+ и φ_- и заменить действие (1) на

$$S = \int d^2z (\partial\varphi^i\partial\varphi^i + \partial\varphi_+\partial\varphi_- + i\alpha_0 R(\rho^i\varphi^i + \rho_+\varphi_- + \rho_-\varphi_+)). \quad (14)$$

Пусть β_0 и β_1 – простые корни аффинной алгебры Ли $\widehat{sl}_2$ с матрицей Картана

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Вершинные операторы конформной размерности 1, соответствующие простым корням, задаются выражениями

$$E_0 = \int dz e^{i\alpha_+((\beta_0, \varphi) + \varphi_+)}, \quad E_1 = \int dz e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}. \quad (16)$$

Выпишем коммутационные соотношения $U_q(\widehat{sl}_2)$, содержащие только генераторы, соответствующие простым корням:

$$e_\delta = [E_0, E_1]_{q^{-2}}, \quad (17)$$

$$e_n = A(n, q)[E_1, [E_0, [E_1, [E_0, \dots [E_1, [E_0, E_1]_{q^{-2}}] \dots]_{q^2}]]_{q^2}, \quad (18)$$

$$e_{n\delta} = B(n, q)[E_0, e_{n-1}]_{q^2}, \quad (19)$$

где $A(n, q)$ и $B(n, q)$ – некоторые нормировочные множители. Генератор e_n соответствует корню $\beta_1 + n\delta$. Соотношения Серра в этом случае выглядят следующим образом:

$$[e_{n+1}, e_m]_{q^2} + [e_{m+1}, e_n]_{q^2} = 0, \quad (20)$$

$$[E_1, [E_1, [E_1, E_0]_{q^2}]]_{q^{-2}} = 0, \quad m = n = 0. \quad (21)$$

Доказательство соотношений Серра (21) во многом аналогично случаю $U_q(sl_3)$ и содержится в приложении. Там же приведены формулы для генераторов (18), (19).

В классическом пределе ($\alpha_0 \rightarrow 0$) генераторы (16) сводятся к

$$E_0 = \int dz e^{i((\beta_0, \varphi) + \varphi_+)}, \quad E_1 = \int dz e^{i(\beta_1, \varphi)}, \quad (22)$$

что совпадает с конструкцией Френкеля–Каца–Сегала для $\widehat{sl}_2$ [1], [2].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали вертекс-операторную конструкцию $U_{q+}(n_+)$, где n_+ – борелевская подалгебра некоторой алгебры Ли g . Заметим, что аналогично можно построить $U_{q-}(n_-)$. Открытой проблемой остается объединение двух частей в один объект.

Конструкции такого типа (использующие только скаляры φ^i) могут быть также построены для следующих алгебр: конечномерных простых типа A , D , E , аффинных $A^{(1)}$, $D^{(1)}$, $E^{(1)}$ и, возможно, некоторых гиперболических.

Мы также обсудили связь между вертекс-операторной конструкцией квантовых групп и конструкцией Френкеля–Каца–Сегала. Возможные приложения результатов данной работы к квантованию конформной аффинной теории Тоды мы оставляем за рамками данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем доказательство тождеств Серра для $U_q(\widehat{sl}_2)$ и формулы для генераторов, соответствующих положительным корням $U_q(\widehat{sl}_2)$. Прежде всего, генератор, соответствующий нулевому корню (17), дается выражением

$$e_\delta = [E_0, E_1]_{q^{-2}} = \varepsilon^{1-2\alpha_+^2} \int i d\psi dz e^{i(1-2\alpha_+^2)\psi} \times \\ \times :e^{i\alpha_+((\beta_0, \varphi) + \varphi_+)}(z + \varepsilon e^{i\psi})e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(z): + (1 - q^{-4})I_{01}. \quad (\text{П.1})$$

В классическом пределе ($\alpha_0 \rightarrow 0$) второе слагаемое исчезает и первый интеграл сводится к $e_\delta = \int dz \partial\varphi e^{\varphi_+}$.

Доказательство тождеств Серра (21) сводится к доказательству следующего равенства:

$$\int_\Gamma dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 (z_1 - z_2)^{2\alpha_+^2} (z_1 - z_3)^{2\alpha_+^2} (z_1 - z_4)^{-2\alpha_+^2} \times \\ \times (z_2 - z_3)^{2\alpha_+^2} (z_2 - z_4)^{-2\alpha_+^2} (z_3 - z_4)^{-2\alpha_+^2} \times \\ \times :e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(z_1)e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(z_2)e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(z_3)e^{i\alpha_+((\beta_0, \varphi) + \varphi_+)}(z_4): = 0. \quad (\text{П.2})$$

Контур Γ выбирается следующим образом. Каждая из переменных z_1, z_2, z_3 интегрируется от $z = 1$ обратно до $z = 1$ вокруг точки z_4 , после этого переменная z_4 интегрируется вдоль единичной окружности. При этом контуры интегрирования вдоль z_1, z_2, z_3 вложены друг в друга.

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть δ_j , $1 < j < 3$, обозначает контур интегрирования переменной z_j , состоящий из окружностей радиуса ε вокруг z_4 : $z_j - z_4 = \varepsilon e^{i\theta_j}$. Обозначим также через γ_j контур интегрирования переменной z_j , состоящий из двух частей: сначала мы интегрируем против часовой стрелки вокруг дуги $0 < \arg z_j < \arg z_4 - \varepsilon$, $|z_j| > |z_4|$, затем по часовой стрелке вокруг дуги $0 < \arg z_j < \arg z_4 - \varepsilon$, $|z_j| < |z_4|$.

Согласно введенным обозначениям контур Γ в (П.2) разделяется на восемь частей.

1. Интегрирование по $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и z_4 . Этот интеграл пропорционален ε^3 и исчезает в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

2–4. Интегрирование по $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$ и z_4 ; $\gamma_1, \delta_2, \gamma_3$ и z_4 ; $\gamma_1, \gamma_2, \delta_3$ и z_4 . Каждый из этих интегралов пропорционален интегралу

$$\varepsilon^{2(1-\alpha_+^2)} \int i d\chi dx dy dz (x - y)^{2\alpha_+^2} (x - z - \varepsilon e^{i\chi})^{2\alpha_+^2} (x - z)^{-2\alpha_+^2} \times \\ \times (y - z - \varepsilon e^{i\chi})^{2\alpha_+^2} (y - z)^{-2\alpha_+^2} e^{i(1-2\alpha_+^2)\chi} \times \\ \times :e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(x)e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(y)e^{i\alpha_+(\beta_1, \varphi)}(z + \varepsilon e^{i\chi})e^{i\alpha_+((\beta_0, \varphi) + \varphi_+)}(z):. \quad (\text{П.3})$$

Здесь интегрирование по x, y, z упорядочено согласно (8). Сумма коэффициентов пропорциональности равна нулю.

5–7. Интегрирование по $\delta_1, \delta_2, \gamma_3$ и $z_4, \delta_1, \gamma_2, \delta_3$ и $z_4, \gamma_1, \delta_2, \delta_3$ и z_4 . Эти интегралы аналогично взаимно сокращаются.

8. Интегрирование по $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и z_4 . Интегрирование по раздвинутым точкам z_1, z_2 и z_3 исчезает в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Оставшийся интеграл может быть переписан в базисе $I_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ (10) и обращается в нуль аналогично (13).

Приведем также вычисления некоторых генераторов в аффинном случае. Они основаны на следующих формулах:

$$[E_0, I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n}] = (1 - q^{-4}) \sum_{i=0}^n [a_i + 1]_{q^2} I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{i-1} 0 \epsilon_i \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n}, \quad (\text{П.4})$$

$$[E_1, I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n}] = (q^2 - q^{-2}) \sum_{i=0}^n [b_i]_{q^2} I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{i-1} 1 \epsilon_i \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n}, \quad (\text{П.5})$$

где

$$a_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-1} (\beta_{\epsilon_k}, \beta_0), \quad b_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-1} (\beta_{\epsilon_k}, \beta_1)$$

и введено обозначение $I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n} = I_{\beta_{\epsilon_0} \beta_{\epsilon_1} \dots \beta_{\epsilon_{n-1}} \beta_{\epsilon_n}}$ ($\epsilon_i = 0$ или 1) (см. (8)).

Выражения для e_n и $e_{n\delta}$ могут быть переписаны аналогично (5) и (12). Можно аналитически продолжить подынтегральные выражения (считая α_+^2 комплексным, см. [15]) из области, в которой они хорошо определены, так что сингулярные по ε слагаемые не дают вклада. Используя формулы, приведенные выше, можно переписать генераторы (18) в базисе интегралов $I_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{n-1} \epsilon_n}$:

$$e_n = A(n, q) q^{2n} (1 - q^{-4})^{2n} \sum_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2n-1} = n} c_{0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{2n-1} 1} I_{0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{2n-1} 1}, \quad (\text{П.6})$$

где суммирование идет по всем нетривиальным перестановкам $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2n-1}$. Коэффициенты $c_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{2n-1} \epsilon_{2n}}$ даются выражениями

$$\begin{aligned} c_{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{2n-1} \epsilon_{2n}} &= \\ &= \sum_{\substack{j_1 \\ (\epsilon_{j_1}=1)}} \sum_{\substack{j_2 \neq j_1 \\ (\epsilon_{j_2}=0)}} \dots \sum_{\substack{j_{2n-1} \neq j_{2n-2} \neq \dots \neq j_1 \\ (\epsilon_{j_{2n-1}}=1)}} [b_{j_1}]_{q^2} [a'_{j_2} + 1]_{q^2} \dots [a'_{j_{2n-2}} + 1]_{q^2} [b'_{j_{2n-1}}]_{q^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где использованы обозначения

$$a'_{j_{2l}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j_1, \dots, j_{2l-1}}}^{j_{2l}-1} (\beta_{\epsilon_k}, \beta_0), \quad b'_{j_{2l-1}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j_1, \dots, j_{2l-2}}}^{j_{2l-1}-1} (\beta_{\epsilon_k}, \beta_1).$$

Символ суммы $\sum_{j_k (\epsilon_{j_k}=1)}$ означает суммирование по всем j_k ($1 \leq j_k \leq 2n-1$) таким, что $\epsilon_{j_k} = 1$. Используя (19), (П.4), можно получить формулу для $e_{n\delta}$. Например, используя (П.4)–(П.7), получаем

$$\begin{aligned} e_\delta &= (1 - q^{-4}) I_{01}, \\ e_1 &= [E_1, [E_0, E_1]_{q^{-2}}] = -q^2 (1 - q^{-4})^2 I_{011}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{2\delta} &= [E_0, [E_1, [E_0, E_1]_{q^{-2}}]]_{q^2} = -q^2(1 - q^{-4})^3(I_{0101} + (1 + [2]_{q^2})I_{0011}), \\
e_2 &= [E_1, [E_0, [E_1, [E_0, E_1]_{q^{-2}}]]_{q^2} = \\
&= q^4(1 - q^{-4})^4(I_{01101} + (2 + [2]_{q^2})I_{01011} + (1 + [2]_{q^2})^2I_{00111}), \\
e_{3\delta} &= [E_0, [E_1, [E_0, [E_1, [E_0, E_1]_{q^{-2}}]]_{q^2}]_{q^2} = q^4(1 - q^{-4})^5((1 + [2]_{q^2})(2 + [2]_{q^2})I_{001101} + \\
&\quad + (3 + [2]_{q^2})I_{010101} + I_{011001} + (1 + [2]_{q^2})^2(2 + [2]_{q^2})I_{010011} + \\
&\quad + (1 + [2]_{q^2})(2 + [2]_{q^2} + [2]_{q^2}(2 + [2]_{q^2}))I_{001011} + \\
&\quad + (1 + [2]_{q^2})^2(1 + [2]_{q^2} + [3]_{q^2})I_{000111})
\end{aligned}$$

с точностью до нормировочных множителей $A(n, q)$, $B(n, q)$.

Благодарности. Автор выражает признательность А. Герасимову за многочисленные полезные дискуссии, руководство и поддержку. Он также благодарен А. Александрову, В. Долгушеву, А. Дымарскому, А. Зотову, А. Конечному, В. Побережному и С. Харчеву за полезные обсуждения и Э. Ахмедову, А. Морозову и Е. Сусловой за ценные советы. Работа была частично поддержана грантом Президента РФ № 00-15-99296, РФФИ (грант № 07-02-00878), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8004.2006.2), грантом INTAS № 00-334, а также Федеральным агентством по атомной энергии.

Список литературы

- [1] I. Frenkel, V. Kac, *Invent. Math.*, **62** (1980), 23; G. Segal, *Comm. Math. Phys.*, **80** (1981), 301.
- [2] P. Goddard, D. Olive, *Internat. J. Modern Phys. A*, **1** (1986), 303.
- [3] M. B. Halpern, *Phys. Rev. D*, **12** (1975), 1684; **13** (1976), 337; T. Banks, D. Horn, H. Neuberger, *Nucl. Phys. B*, **108** (1976), 119.
- [4] V. Dotsenko, *Adv. Stud. Pure Math.*, **16** (1988), 123.
- [5] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5** (1990), 2495.
- [6] G. Felder, *Nucl. Phys. B*, **317** (1989), 215; Erratum, **324** (1989), 548.
- [7] Б. Л. Фейгин, Э. В. Френкель, *УМН*, **43:5** (263) (1988), 227.
- [8] A. Tsuchiya, Y. Kanie, *Lett. Math. Phys.*, **13** (1987), 303.
- [9] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *Comm. Math. Phys.*, **131** (1990), 125.
- [10] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **102** (1990), 67.
- [11] A. Varchenko, V. Schechtman, *Integral Representations of N-Point Conformal Correlators in the WZW Model*, Preprint MPI/89-51, Max-Planck Institute, Bonn, 1989.
- [12] A. Varchenko, *Multidimensional Hypergeometric Functions and Representation Theory of Lie Algebras and Quantum Groups*, Adv. Ser. Math. Phys., **21**, World Scientific, Singapore, 1995.
- [13] B. Feigin, E. Frenkel, "Integrals of motion and quantum groups", *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., **1620**, Springer, Berlin, 1996, 349; [arXiv:hep-th/9310022](#).
- [14] O. Babelon, L. Bonora, *Phys. Lett. B*, **244** (1990), 220.
- [15] V. Dotsenko, V. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240** (1984), 312; **251** (1985), 691.

Поступила в редакцию 16.01.2006,
после доработки 8.08.2007