Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, М. В. Павлов, В. В. Соколов, Классификация интегрируемых уравнений типа уравнения Власова, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 249–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:31:12

© 2008 г. А. В. Одесский^{*,†}, М. В. Павлов[‡], В. В. Соколов^{*}

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Классификация интегрируемых уравнений типа уравнения Власова сведена к некоторому функциональному уравнению для порождающей функции. Найдено общее решение этого функционального уравнения в терминах гипергеометрических функций.

Ключевые слова: интегрируемые гидродинамические цепочки, гидродинамические редукции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее линейное уравнение:

$$\Lambda_t = \{\Lambda, \psi\}, \quad (1)$$

где

$$\{\Lambda, \psi\} = \psi_p \Lambda_x - \psi_x \Lambda_p.$$

В этом уравнении неизвестная $\Lambda(x, t, p)$ зависит от “спектрального” параметра p и $\psi = \psi(U(x, t), p)$. Следуя [1], мы называем (1) *уравнением власовского типа*, порожденным функцией $\psi(U, p)$. Уравнение (1) также известно как бездисперсионное уравнение Лакса.

Легко проверить, что частичное преобразование годографа $\Lambda(x, t, p) \rightarrow p(x, t, \Lambda)$ приводит уравнение (1) к следующей консервативной форме:

$$p_t = \psi(U, p)_x. \quad (2)$$

В этой формуле Λ играет роль параметра.

Для некоторых функций ψ уравнения власовского типа тесно связаны с интегрируемыми гидродинамическими цепочками [2]–[4]. Цепочка, соответствующая уравнению власовского типа, может быть получена разложением $\Lambda(x, t, p)$ в особой точке

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: odesskii@itp.ac.ru, sokolov@itp.ac.ru

[†]The University of Manchester, Manchester, UK

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: maxim.pavlov@mtu-net.ru

для функции ψ . При этом формула (2) порождает законы сохранения для гидродинамической цепочки.

ПРИМЕР 1 (*цепочка Бенни*) [1], [5]–[7]. Уравнение Власова (бесстолкновительное уравнение Больцмана) имеет вид

$$\Lambda_t + \Lambda_p U_x - p \Lambda_x = 0, \quad (3)$$

где $\psi = p^2/2 + U$. Подставляя разложение

$$\Lambda = p + \frac{A^0}{p} + \frac{A^1}{p^2} + \frac{A^2}{p^3} + \frac{A^3}{p^4} + \dots \quad (4)$$

в (3), мы получаем знаменитую гидродинамическую цепочку Бенни

$$A_t^k = A_x^{k+1} + k A^{k-1} A_x^0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A^0 = U$. Пусть

$$p = \Lambda - \frac{H_0}{\Lambda} - \frac{H_1}{\Lambda^2} - \frac{H_2}{\Lambda^3} - \frac{H_3}{\Lambda^4} + \dots$$

– обратный ряд для (4). Функции H_i могут быть легко вычислены: $H_0 = A^0$, $H_1 = A^1$, $H_2 = A^2 + (A^0)^2$, $\dots$. Формула

$$p_t = \left(\frac{p^2}{2} + U \right)_x$$

порождает бесконечно много законов сохранения для цепочки Бенни:

$$(H_k)_t = \left(H_{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} H_i H_{k-i-1} \right)_x.$$

ПРИМЕР 2 (*цепочка Купершмидта*) [8], [9]. Эта гидродинамическая цепочка

$$B_t^k = B_x^{k+1} + B^0 B_x^k + \beta k B^k B_x^0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

связана с уравнением власовского типа (1), где

$$\psi = \frac{p^{\beta+1}}{\beta+1} + Up,$$

разложением

$$\Lambda = \frac{p^\beta}{\beta} + B^0 + \frac{B^1}{p^\beta} + \frac{B^2}{p^{2\beta}} + \frac{B^3}{p^{3\beta}} + \dots,$$

где $B^0 = U$. Законы сохранения для цепочки могут быть построены тем же способом, что и в примере 1.

Гидродинамические цепочки, описанные в примерах 1, 2, допускают бесконечно много гидродинамических редукций [10], [11]. Соответствующие уравнения власовского типа обладают этими же редукциями.

В работе [2] были найдены следующие “интегрируемые” функции ψ :

- 1) $\psi(U, p) = U + W(p)$, где $W'' = c_1 W'^2 + c_2 W' + c_3$;
- 2) $\psi(U, p) = U W(p)$, где $W'' = (c_1 W'^2 + c_2 W' + c_3)/W$.

Здесь c_i – произвольные параметры. Цепочка Бенни соответствует случаю 1 с $W(p) = p^2/2$.

В этой статье мы описываем все возможные “интегрируемые” функции $\psi(U, p)$, используя метод гидродинамических редукций. В работах [10] существование гидродинамических редукций было выбрано в качестве определения интегрируемости для бездисперсионных многомерных уравнений в частных производных. Мы применяем этот подход для уравнений типа уравнения Власова.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ

Предположим, что имеются полугамильтонова [12] гидродинамическая система вида

$$r_t^i = v^i(\mathbf{r}) r_x^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

и функции $U = u(\mathbf{r})$ и $\Lambda = \lambda(\mathbf{r}, p)$ такие, что эти функции удовлетворяют уравнению (1) для любого решения $\mathbf{r}(x, t)$ системы (5). В этом случае мы скажем, что система (5) определяет гидродинамическую редукцию для уравнения власовского типа (1). Частичное преобразование годографа $\lambda(\mathbf{r}, p) \rightarrow p(\mathbf{r}, \lambda)$ приводит к соответствующей гидродинамической редукции (2).

Подставляя $\Lambda = \lambda(\mathbf{r}, p)$ и $U = u(\mathbf{r})$ в уравнения (1) и (2), мы получаем соотношения вида

$$\lambda_t = \psi_p \lambda_x - \psi_x \lambda_p \quad (6)$$

и

$$p_t = \psi(u, p)_x. \quad (7)$$

Вычисляя производные в силу (5), находим из (6), что

$$\sum_{i=1}^N (\lambda_p \psi_u \partial_i u + [v^i(\mathbf{r}) - \psi_p] \partial_i \lambda) r_x^i = 0,$$

где мы используем обозначение $\partial_i = \partial/\partial r^i$. Поскольку $\mathbf{r}$ – это произвольное решение системы (5), получаем

$$\lambda_p \psi_u \partial_i u = [\psi_p - v^i(\mathbf{r})] \partial_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Определим набор функций $p^i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2, \dots, N$, как решения уравнений

$$v^i(\mathbf{r}) = \psi_p|_{p=p^i}. \quad (9)$$

Тогда из (8) следует, что уравнение $\lambda_p = 0$ имеет N (в случае общего положения попарно различных) решений, т.е.

$$\lambda_p|_{p=p^i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Без ограничения общности мы можем зафиксировать инварианты Римана r^i системы (5) таким образом, что

$$r^i = \lambda|_{p=p^i}. \quad (11)$$

Действительно, рассмотрим уравнение (6) при ограничении $p = p^i$. Из (6), (10) следует, что

$$(\lambda|_{p=p^i})_t = (\psi_p|_{p=p^i})(\lambda|_{p=p^i})_x.$$

Это означает (см. (9)), что $\lambda|_{p=p^i}$ удовлетворяет системе (5) и, таким образом, $\lambda|_{p=p^i} = R_i(r^i)$ для некоторых функций R_i . Согласно (10) точки ветвления римановой поверхности, определенной уравнением $\Lambda = \lambda(\mathbf{r}, p)$, – это не что иное, как инварианты Римана системы (5). Этот факт был хорошо известен для систем гидродинамического типа, получаемых усреднением по Уизему многофазных решений интегрируемых дисперсионных и дискретных уравнений (см. ссылки в [4]).

Подставляя функции $p(\mathbf{r}, \lambda)$, $u(\mathbf{r})$ в (7), получим

$$\partial_i p = \frac{\psi_u \partial_i u}{\psi_p|_{p=p^i} - \psi_p}.$$

Если мы положим $\lambda = r^k$, $k \neq i$, то из (11) следует $p = p^k$, и мы получаем

$$\partial_i p^k = \frac{\psi_u|_{p=p^k} \partial_i u}{\psi_p|_{p=p^i} - \psi_p|_{p=p^k}}. \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$f_i = \frac{\psi_u}{\psi_p|_{p=p^i} - \psi_p}, \quad f_{ik} = \frac{\psi_u|_{p=p^k}}{\psi_p|_{p=p^i} - \psi_p|_{p=p^k}}, \quad i \neq k.$$

Условия совместности

$$\partial_k(\partial_i p) = \partial_i(\partial_k p), \quad i \neq k,$$

эквивалентны соотношениям

$$\partial_{ik}^2 u = \frac{f_{ik} \partial_p^k f_k - f_{ki} \partial_p^i f_i + \partial_u(f_k - f_i) + f_i \partial_p f_k - f_k \partial_p f_i}{f_i - f_k} \partial_i u \partial_k u. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) образуют систему, названную в работе [2] обобщенной системой Гиббонса–Царева (ср. с [11]).

Поскольку u не зависит от p , мы получаем из (13) функциональное уравнение

$$\partial_p \left(\frac{f_{ik} \partial_p^k f_k - f_{ki} \partial_p^i f_i + \partial_u(f_k - f_i) + f_i \partial_p f_k - f_k \partial_p f_i}{f_i - f_k} \right) = 0 \quad (14)$$

для функции $\psi(u, p)$. В следующих разделах мы исследуем это функциональное уравнение и найдем его общее решение. Формула для общего решения содержит пару произвольных решений стандартного гипергеометрического уравнения

$$u(u-1)y(u)'' + [(\alpha + \beta + 1)u - \gamma]y(u)' + \alpha\beta y(u) = 0. \quad (15)$$

Отметим, что решение уравнения Шazi, которое появляется в классификационной работе [13], также параметризуется парой гипергеометрических функций. Наше решение $\psi(u, p)$ является обобщением решения $h(\xi, u)$, найденного в работе [14] (см. приведенный в указанной работе пример 4).

3. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В разделах 4, 5 мы решаем функциональное уравнение (14) в терминах квадратур от гипергеометрических функций. В этом разделе мы рассматриваем частные случаи, для которых ответ может быть записан более явно.

Находя числитель левой части уравнения (14) и разлагая его в точках $p^i = p$, $p^k = p$, находим, что исчезновение членов до восьмого порядка в соответствующих рядах Тейлора эквивалентно следующей системе уравнений в частных производных для функции $\psi(u, p)$:

$$3\psi_{ppp}^3\psi_u^3 - 4\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_{pppp}\psi_u^3 + \psi_{pp}^2\psi_{ppppp}\psi_u^3 - 3\psi_{pp}\psi_{ppp}^2\psi_u^2\psi_{pu} + 2\psi_{pp}^2\psi_{pppp}\psi_u^2\psi_{pu} + \\ + 6\psi_{pp}^2\psi_{ppp}\psi_u^2\psi_{pui} - 5\psi_{pp}^3\psi_u^2\psi_{ppui} - 6\psi_{pp}^4\psi_{pu}\psi_{ui} + 6\psi_{pp}^4\psi_u\psi_{pui} = 0, \quad (16)$$

$$3\psi_{ppp}^2\psi_u^3\psi_{pui} - \psi_{pp}\psi_{pppp}\psi_u^3\psi_{pui} - 3\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_u^3\psi_{ppui} + \psi_{pp}^2\psi_u^3\psi_{ppppui} - \\ - 3\psi_{pp}^2\psi_{ppp}\psi_u\psi_{pui}\psi_{ui} - 6\psi_{pp}^3\psi_{pu}^2\psi_{ui} + 3\psi_{pp}^3\psi_u\psi_{pui}\psi_{ui} + 3\psi_{pp}^2\psi_{ppp}\psi_u^2\psi_{pui} + \\ + 6\psi_{pp}^3\psi_u\psi_{pui}\psi_{pui} - 3\psi_{pp}^3\psi_u^2\psi_{ppui} = 0, \quad (17)$$

$$- 3\psi_{ppp}^2\psi_u^2\psi_{pui}\psi_{ui} + \psi_{pp}\psi_{pppp}\psi_u^2\psi_{pui}\psi_{ui} - 6\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_u\psi_{pu}^2\psi_{ui} - 6\psi_{pp}^2\psi_{pu}^3\psi_{ui} + \\ + 3\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_u^2\psi_{pui}\psi_{ui} + 6\psi_{pp}^2\psi_u\psi_{pui}\psi_{ppui}\psi_{ui} - \psi_{pp}^2\psi_u^2\psi_{ppui}\psi_{ui} + 3\psi_{pp}^2\psi_u^3\psi_{pui} - \\ - \psi_{pp}\psi_{pppp}\psi_u^3\psi_{pui} + 6\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_u^2\psi_{pui}\psi_{pui} + 6\psi_{pp}^2\psi_u\psi_{pu}^2\psi_{pui} - 3\psi_{pp}^2\psi_u^2\psi_{ppui}\psi_{pui} - \\ - 3\psi_{pp}\psi_{ppp}\psi_u^3\psi_{ppui} - 3\psi_{pp}^2\psi_u^2\psi_{pui}\psi_{ppui} + \psi_{pp}^2\psi_u^3\psi_{ppui} = 0. \quad (18)$$

Эта система, как и само функциональное уравнение (14), инвариантна относительно любого преобразования вида $u \rightarrow f(u)$ и относительно следующей группы симметрий:

$$\psi \rightarrow c_2\psi + c_1p + c_0, \quad p \rightarrow k_2\psi + k_1p + k_0. \quad (19)$$

Эти симметрии соответствуют линейным заменам независимых переменных в (1), (2). Кроме того, всякая линейная по p функция удовлетворяет уравнению (14) и системе (16)–(18).

Упомянутые в разделе 1 интегрируемые случаи 1 и 2 вида $\psi(u, p) = u + W(p)$ и $\psi(u, p) = uW(p)$ немедленно находятся из (16). Можно отметить еще два частных интегрируемых случая:

3) $\psi(u, p) = W(u - p)$, где $W'' = c_1W'^3 + c_2W'^2 + c_3W'$;

4) $\psi(u, p) = pu + W(p)$, где $W'' = (c_1W'^2 + c_2W' + c_3)/p$.

Здесь c_i – произвольные постоянные. Цепочка Купершмидта относится к случаю 4. Легко видеть, что случай 3 связан со случаем 1 преобразованием $\psi \leftrightarrow p$. Во всех четырех специальных случаях система (16)–(18) эквивалентна некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению пятого порядка относительно функции W .

Система (16)–(18) допускает подстановку

$$\psi_p = F(p, \psi), \quad (20)$$

соответствующую факторизации относительно группы симметрий $u \rightarrow f(u)$. В результате получается переопределенная система из трех уравнений в частных производных для функции $F(x, y)$, которую мы не приводим ввиду ее громоздкости.

Случай 1 соответствует следующему случаю $\bar{1}$: $F(x, y) = V(x)$, где $V = W'$; случай 2 – случаю $\bar{2}$: $F(x, y) = yV(x)$, где $V = W'/W$; случай 3 – случаю $\bar{3}$: $F(x, y) = V(y)$; случай 4 – случаю $\bar{4}$: $F(x, y) = y/x + V(x)$, где $V = W' - W/x$.

Еще одно частное решение задается формулой

$$F(x, y) = \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} \cdot \frac{y^2 + \gamma y + \delta}{2y + \gamma}, \quad (21)$$

что приводит к уравнению (7) вида

$$p_t = \partial_x \sqrt{u(p^2 + t_1)} - t_2,$$

где t_i – произвольные постоянные. Для этого примера функция F имеет вид

$$F(x, y) = \frac{V(y)}{W(x)}. \quad (22)$$

Исследование анзаца (22) приводит к следующему результату. Случай, когда или V , или W – линейная функция, фактически был рассмотрен выше. А именно, случаи $V = 1$, $V = y$ и $W = 1$ совпадают со случаями 1, 2 и 3, соответственно. Случай $W = x$ переходит в случай 2 после замены $\psi \leftrightarrow p$. Если $V'' \neq 0$ и $W'' \neq 0$, то существуют три класса решений вида (22), для которых:

- 5) $VV'' = 2V'^2 + c_1V' + c_2$, $WW'' = 2W'^2 + c_1W' + c_2$;
- 6) $VV'' = V'^2 + c_1V' + c_2$, $WW'' = W'^2 + c_1W' + c_2$;
- 7) $VV'' = -V'^2 + c_1V' + c_2$, $WW'' = -W'^2 + c_1W' + c_2$.

Во всех случаях решение зависит от шести произвольных параметров. Функция (21) относится к случаю 1 с $c_1 = -3$, $c_2 = 1$.

4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Разложим левую часть уравнения (14) в ряд Тейлора при $p^k = p$. Обозначим через $S(p^i, p)$ первый нетривиальный коэффициент в этом разложении. Система $S = 0$, $S_p = 0$ при фиксированном p является системой линейных алгебраических уравнений относительно производных ψ_u, ψ_{up^i} . Ее определитель не равен нулю при условии $\psi_u \psi_{pp} \neq 0$. Решая эту систему, получим

$$\psi_u = \frac{Q(\psi_p)}{\psi_{pp}}, \quad (23)$$

где Q – многочлен степени не выше четвертой по ψ_p с коэффициентами, зависящими только от u . Учитывая (23), из уравнения $S_{p^i} = 0$ нетрудно вывести соотношение

$$\frac{\psi_{ppp}}{\psi_{pp}^2} = \frac{R(\psi_p)}{Q(\psi_p)}, \quad (24)$$

где R – многочлен степени не выше третьей. Условие совместности уравнений (23) и (24) имеет вид

$$Q^2 Q_{xxx} - R Q Q_{xx} + R Q_x^2 - (R^2 + R_x Q) Q_x + R Q_u - R_{xx} Q^2 + (2 R R_x - R_u) Q = 0, \quad (25)$$

где $x = \psi_p$.

Пусть многочлен

$$Q(x) = a(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$$

имеет различные корни. Перепишем (24) в виде

$$\frac{\psi_{ppp}}{\psi_{pp}^2} = \frac{k_1}{\psi_p - b_1} + \dots + \frac{k_4}{\psi_p - b_4}. \quad (26)$$

Можно проверить, что система, состоящая из уравнений (16)–(18) и (25), эквивалентна следующим требованиям:

1. Функции $k_i(u)$ являются произвольными постоянными, такими, что $k_1 + \dots + k_4 = 3$.
2. Функции $a(u)$, $b_i(u)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$b'_i = a(1 - k_i) \prod_{j \neq i} (b_i - b_j), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

Функция $a(u)$ может быть произвольным образом нормирована с помощью допустимой замены $u \rightarrow s(u)$. Рассмотрим отношение

$$\rho = \frac{(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)}{(b_1 - b_3)(b_2 - b_4)}.$$

Дифференцируя ρ в силу системы, легко проверить, что $\rho' \neq 0$. Сделаем замену u такую, что $\rho = u$. Это означает, что

$$a = \frac{1}{(b_2 - b_3)(b_1 - b_4)} + \frac{1}{(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)}.$$

Можно проверить, что формулы

$$b_1 = \frac{z_2 + uy_2}{z_1 + uy_1}, \quad b_2 = \frac{y_2}{y_1}, \quad b_3 = \frac{z_2 + y_2}{z_1 + y_1}, \quad b_4 = \frac{z_2}{z_1},$$

где (y_1, z_1) , (y_2, z_2) – два произвольных решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} y' &= \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 2}{u - 1} y + \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 2}{u(u - 1)} z, \\ z' &= \frac{1 - k_1}{u - 1} y + \frac{1 - k_1 - k_2 + k_2 u}{u(u - 1)} z, \end{aligned} \quad (28)$$

задают общее решение системы (27). Отметим, что если $k_1 + k_2 + k_3 \neq 2$, то

$$z = -uy + \frac{u(u - 1)}{k_1 + k_2 + k_3 - 2} y',$$

и система (28) эквивалентна гипергеометрическому уравнению (15), где $k_1 = 1 + \alpha - \gamma$, $k_2 = 1 - \alpha$, $k_3 = \gamma - \beta$.

Система (23), (24) может быть сведена к квадратурам следующим образом. Определим функцию $\phi(u, p)$ как решение следующей переопределенной системы:

$$\phi_u = -\frac{\phi(\phi-1)y'_1}{\beta(y_1\phi+z_1)}, \quad \phi_p = \frac{\phi^{k_1}(\phi-1)^{k_2}(\phi-u)^{k_3}}{y_1\phi+z_1}. \quad (29)$$

Легко проверить, что эта система совместна. Тогда решение совместной системы уравнений

$$\psi_u = \frac{y_2y'_1 - y_1y'_2}{\beta(y_1\phi+z_1)} \phi^{1-k_1}(\phi-1)^{1-k_2}(\phi-u)^{1-k_3}, \quad \psi_p = \frac{y_2\phi+z_2}{y_1\phi+z_1} \quad (30)$$

является общим решением уравнения (14). Тот факт, что построенная функция ψ удовлетворяет уравнению (14), проверяется прямой подстановкой. При этом оказывается, что выражение, стоящее под знаком производной в левой части (14), равно

$$\frac{(1-u-\beta)\alpha^2 + (1-u-\alpha)\beta^2 + u(4\alpha\beta - \alpha - \beta)}{u(u-1)(\alpha-\beta)^2},$$

где $\alpha = \phi(u, p^i)$, $\beta = \phi(u, p^k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из стандартной формулы Вронского для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следует, что выражение $y_2y'_1 - y_1y'_2$, фигурирующее в (30), равно $Cu^{k_1+k_3-2}(u-1)^{k_2+k_3-2}$ для некоторой постоянной C .

5. ВЫРОЖДЕНИЯ

В разделе 4 мы рассмотрели случай общего положения. Это означает, что многочлен Q имеет четвертую степень и все его корни b_i различны при общем значении u . Исследуем вырождения. Легко видеть, что с помощью преобразований (19) степень многочлена Q всегда можно сделать равной четырем. Оказывается, что во всех случаях ответ можно параметризовать парой решений некоторого вырождения гипергеометрического уравнения.

ВЫРОЖДЕНИЕ 1. Пусть $Q = a(x-b_1)^2(x-b_2)(x-b_3)$,

$$\frac{R}{Q} = \frac{k_1}{x-b_1} + \frac{f_1}{(x-b_1)^2} + \frac{k_2}{x-b_2} + \frac{k_3}{x-b_3}.$$

Тогда k_1, k_2, k_3 – такие постоянные, что $k_1 + k_2 + k_3 = 3$ и

$$\begin{aligned} b'_1 &= -a(b_1-b_2)(b_1-b_3)f_1, \\ b'_2 &= a(b_2-b_1)^2(b_2-b_3)(1-k_2), \\ b'_3 &= a(b_3-b_1)^2(b_3-b_2)(1-k_3), \\ f'_1 &= af_1((b_1-b_2)(b_1-b_3)(2-k_1) + (b_2+b_3-2b_1)f_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Ответ для этой системы может быть параметризован следующим образом:

$$b_2 = \frac{y_1}{y_2}, \quad b_3 = \frac{z_1}{z_2}, \quad b_1 = \frac{y_1 + uz_1}{y_2 + uz_2},$$

где (y_1, z_1) , (y_2, z_2) – два произвольных решения системы линейных уравнений

$$y' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3k_2 + k_1 - 4}{2(k_2 - 1)u}\right)y + z, \quad z' = \frac{k_1 + k_2 - 2}{(1 - k_2)u^2}y + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3k_2 + k_1 - 4}{2(k_2 - 1)u}\right)z. \quad (32)$$

Функции a и f_1 однозначно находятся из системы (31). Отметим, что система (32) эквивалентна уравнению Бесселя

$$y'' + y' + \left(\frac{1}{4} + \frac{(k_2 - k_1)(k_1 + k_2 - 2)}{4(k_2 - 1)^2 u^2}\right)y = 0.$$

ВЫРОЖДЕНИЕ 2. Пусть $Q = a(x - b_1)^2(x - b_2)^2$,

$$\frac{R}{Q} = \frac{k_1}{x - b_1} + \frac{f_1}{(x - b_1)^2} + \frac{k_2}{x - b_2} + \frac{f_2}{(x - b_2)^2}.$$

Тогда k_1, k_2 – такие постоянные, что $k_1 + k_2 = 3$ и

$$\begin{aligned} b'_1 &= -a(b_1 - b_2)^2 f_1, \\ b'_2 &= -a(b_1 - b_2)^2 f_2, \\ f'_1 &= a(b_2 - b_1)f_1((b_2 - b_1)(k_2 - 1) + 2f_1), \\ f'_2 &= a(b_1 - b_2)f_2((b_1 - b_2)(k_1 - 1) + 2f_2). \end{aligned}$$

Ответ может быть задан следующим образом:

$$b_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad b_2 = \frac{z_1}{z_2},$$

где (y_1, z_1) , (y_2, z_2) – два произвольных решения системы линейных дифференциальных уравнений

$$y' = \frac{3k_1 - 5}{2u}y + uz, \quad z' = -\frac{1}{3}y + \frac{3(1 - k_1)}{2u}z. \quad (33)$$

Отметим, что функция $y(u)$ удовлетворяет следующему уравнению второго порядка:

$$y'' + \left(\frac{u}{3} - \frac{3(3k_1 - 5)(3k_1 - 7)}{u^2}\right)y = 0.$$

ВЫРОЖДЕНИЕ 3. Пусть $Q = a(x - b_1)^3(x - b_2)$,

$$\frac{R}{Q} = \frac{k_1}{x - b_1} + \frac{f_1}{(x - b_1)^2} + \frac{f_2}{(x - b_1)^3} + \frac{k_2}{x - b_2}.$$

Тогда k_1, k_2 – такие постоянные, что $k_1 + k_2 = 3$ и

$$\begin{aligned} b'_1 &= a(b_2 - b_1)f_2, & b'_2 &= a(b_2 - b_1)^3(1 - k_2), \\ f'_1 &= a((b_2 - b_1)(f_1^2 - k_2 f_2) - 2f_1 f_2), & f'_2 &= 2a f_2((b_2 - b_1)f_1 - f_2). \end{aligned}$$

Ответ может быть записан в следующем виде:

$$b_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad b_2 = \frac{y'_1 + u y_1}{y'_2 + u y_2},$$

где y_1, y_2 – произвольные решения уравнения Вебера $y'' = (u^2 + (1 - 2k_2))y$. Функции a, f_1, f_2 однозначно находятся из приведенной выше системы.

ВЫРОЖДЕНИЕ 4. Пусть $Q = a(x - b)^4$,

$$\frac{R}{Q} = \frac{k_1}{x - b} + \frac{f_1}{(x - b)^2} + \frac{f_2}{(x - b)^3} + \frac{f_3}{(x - b)^4}.$$

Тогда оказывается, что $k_1 = 3$ и

$$b' = -af_3, \quad f_3' = -3af_2f_3, \quad f_2' = -2a(f_2^2 + f_1f_3), \quad f_1' = a(f_3 - 2f_1f_2).$$

Исключая из этой системы f_3 , f_2 , f_1 и выбирая $a = -1/b'^2$, приходим к уравнению

$$\frac{b'''}{b'} - \frac{3}{2} \frac{b''^2}{b'^2} = -2u.$$

Его общее решение можно записать в виде $b = y_1/y_2$, где y_1 , y_2 – произвольные решения уравнения Эйри $y'' = uy$.

Существуют дальнейшие вырождения, связанные с тем, что многочлен Q может иметь один или несколько постоянных корней. В этом случае удобно один из этих корней сделать равным бесконечности, используя преобразование (19). Рассмотрим, например, вырождение 4 в случае $b = \text{const}$. Выбирая нормировку $a = 1$, получаем

$$f_3 = 0, \quad f_2' = -2f_2^2, \quad f_1' = -2f_1f_2.$$

Простейшее решение этой системы $f_2 = f_1 = 0$ соответствует (при $b = \infty$) потенциалу Бенни из примера 1. Решение $f_2 = 0$, $f_1 \neq 0$ приводит к $\psi(u, p) = up + p \ln p$, что совпадает со случаем 4 раздела 3 при $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Наконец, если $f_2 \neq 0$, получаем (с точностью до эквивалентности)

$$\psi_u \psi_{pp} = 1, \quad \psi_{pp} = \lambda \sqrt{u} e^{-\psi_p^2/4u}.$$

В этом случае ответ не удастся записать в элементарных функциях.

В случае общего положения (27) тот факт, что некоторые из корней b_i постоянны, эквивалентен равенству $k_i = 1$ для соответствующих k_i . Решения системы (27) для таких вырождений можно получить из (29), (30) или найти, решив эту систему каким-либо другим способом. Явные формулы в этом случае и анализ случая постоянных b_i для вырождений 1–3 мы не приводим.

Опишем частные решения из раздела 3 в терминах разделов 4 и 5. Оказывается, что случай 5 при $c_1^2 \neq 8c_2$ эквивалентен (27), где $b_1 = -b_2$, $b_3 = -b_4$, $k_2 = k_1$ и $k_4 = k_3$. А именно, если положить $c_2 = c_1^2/8 - c_3^2/8$, то $k_1 = (3c_3 - c_1)/(4c_3)$, $k_3 = (3c_3 + c_1)/(4c_3)$.

Случай 6 при $c_1^2 \neq 4c_2$ эквивалентен (27), где два из корней b_i постоянны. Если положить $c_2 = c_1^2/4 - c_3^2/4$, то правая часть (24) имеет вид

$$\frac{1}{x} + \frac{k_1}{x - b_1} + \frac{k_2}{x - b_2},$$

где $x = \psi_p$, $k_1 = (c_3 - c_1)/(2c_3)$, $k_2 = (c_3 + c_1)/(2c_3)$.

В случае 7 при $c_1^2 \neq -4c_2$ имеем $Q(x) = ax(x - b_1)(x - b_2)$. Если положить $c_2 = -c_1^2/4 + c_3^2/4$, то

$$\frac{R}{Q} = \frac{k_1}{x - b_1} + \frac{k_2}{x - b_2}, \quad (34)$$

где $k_1 = (3c_3 - c_1)/(2c_3)$, $k_2 = (3c_3 + c_1)/(2c_3)$. Отметим, что в этом случае $k_1 + k_2 = 3$, тогда как в общем случае для правой части (24) вида (34) постоянные k_1 , k_2 произвольны, а b_1 , b_2 удовлетворяют системе

$$b'_1 = a(b_1 - b_2)(1 - k_1), \quad b'_2 = a(b_2 - b_1)(1 - k_2). \quad (35)$$

В случае, когда $k_1 + k_2 = 2$, система (35) обладает решением вида $a = 1$, $b_i = u + t_i$, где $k_1 = 1 + 1/(t_1 - t_2)$, $k_2 = 1 + 1/(t_2 - t_1)$. Это соответствует случаю 4 из раздела 3 при $c_1 \neq 0$, $c_2^2 \neq 4c_1c_3$. Для цепочки Купершмидта (см. пример 2) $R/Q = k_1/(x - b_1)$, $a = 1$ и $b_1 = u + t_1$.

Для случая 2 с $c_1 \neq 0$, $c_2^2 \neq 4c_1c_3$ имеем (34), (35) и $k_1 + k_2 = 1$. Если справедливо последнее условие, у системы (35) имеется решение $a = 1/u$, $b_i = t_i u$, где $k_1 = t_2/(t_2 - t_1)$, $k_2 = t_1/(t_1 - t_2)$.

Случай 1 соответствует постоянному решению системы (35), которое существует при $k_1 = k_2 = 1$. Как уже было отмечено в разделе 3, случай 3 эквивалентен случаю 1.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы используем метод гидродинамических редукций для классификации интегрируемых уравнений типа (1), (2). В настоящей работе полностью изучен простейший случай одной функции $U(x, t)$. В следующей работе мы планируем решить более сложную задачу классификации интегрируемых уравнений власовского типа в случае двух функций $U_1(x, t)$, $U_2(x, t)$. Оказывается, что имеется несколько существенно различных классов интегрируемых функций $\psi(U_1, U_2, p)$. Один из таких классов, соответствующий двухкомпонентным $(2 + 1)$ -мерным системам гидродинамического типа, был построен в работе [15]. Отметим, что примеры интегрируемых функций $\psi(U_1, \dots, U_n, p)$ появлялись и ранее. В частности, в работе [16] были построены функции ψ , связанные с алгебраическими кривыми произвольного рода. В [17] для каждого фробениусова многообразия размерности n построена некоторая интегрируемая функция $\psi(U_1, \dots, U_n, p)$.

Полученные в настоящей статье результаты могут представлять интерес в связи с обобщениями уравнения Левнера (см. [11]) и так называемой задачей о лапласовском росте (см. [18] и приведенную там литературу). Кроме того, по-видимому, каждый интегрируемый случай приводит к интегрируемой гидродинамической цепочке типа цепочки Бенни (см. пример 1). Не вызывает проблем построение цепочек, в которой дискретная переменная принимает все целые значения. Однако проблема “правильного” обрыва таких цепочек далеко не тривиальна, и мы намерены посвятить этой задаче отдельную статью.

Благодарности. Авторы благодарны Е. В. Ферапонтову и Б. А. Дубровину за плодотворные дискуссии. Мы также благодарны ESF Research Network MISGAM за частичное финансирование конференции ISLAND-3, где была начата работа над этой статьей. В. В. Соколов и А. В. Одесский благодарны за гостеприимство и финансовую поддержку IHES и МРІМ, где статья была закончена. М. В. Павлов был частично поддержан Российско-Итальянским исследовательским проектом № 06-01-92053, а В. В. Соколов был частично поддержан РФФИ (грант № 05-01-00189) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1716.2003.1).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:2 (1980), 15–24; V. E. Zakharov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 193–202.
- [2] M. V. Pavlov, *J. Phys. A*, **39**:34 (2006), 10803–10819.
- [3] E. V. Ferapontov, D. G. Marshall, *Math. Ann.*, **339**:1 (2007), 61–99.
- [4] M. V. Pavlov, *Comm. Math. Phys.*, **272**:2 (2007), 469–505.
- [5] D. J. Benney, *Stud. Appl. Math.*, **52** (1973), 45–50.
- [6] J. Gibbons, *Physica D*, **3**:3 (1981), 503–511.
- [7] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, *Функц. анализ и его прилож.*, **11**:3 (1977), 31–42; **12**:1 (1978), 25–37.
- [8] B. A. Kupershmidt, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **83**:1 (1983), 45–74; “Normal and universal forms in integrable hydrodynamical systems”, *Proc. Berkeley–Ames Conference on Nonlinear Problems in Control and Fluid Dynamics* (Berkeley, 1983), Lie Groups: Hist., Frontiers and Appl. Ser. B: Systems Inform. Control, **2**, Math Sci. Press, Brookline, MA, 1984, 357–378.
- [9] M. V. Pavlov, *Int. Math. Res. Not.*, 2006, 46987.
- [10] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Comm. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206; *J. Phys. A*, **37**:8 (2004), 2949–2963.
- [11] J. Gibbons, S. P. Tsarev, *Phys. Lett. A*, **211**:1 (1996), 19–24; **258**:4–6 (1999), 263–271.
- [12] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [13] М. В. Павлов, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 55–70.
- [14] А. В. Одесский, В. В. Соколов, “О $(2 + 1)$ -мерных системах гидродинамического типа, обладающих псевдопотенциалом с подвижными особенностями”, *Функц. анализ и его прилож.*, **42** (2008) (в печати).
- [15] A. V. Odesskii, “A family of $(2 + 1)$ -dimensional hydrodynamic type systems possessing pseudopotential”, *Selecta. Math.* (to appear); [arXiv:math.AP/0704.3577v3](https://arxiv.org/abs/math.AP/0704.3577v3).
- [16] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [17] B. A. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1620**, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [18] А. В. Забродин, *ТМФ*, **129**:2, 239–258.

Поступила в редакцию 24.04.2007,
после доработки 28.10.2007