Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, Формулы суперпозиции для интегрируемых векторных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 261–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:41:06

© 2008 г.

М. Ю. Балахнев*

ФОРМУЛЫ СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ВЕКТОРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

С использованием преобразования Беклунда построены формулы суперпозиции для решений некоторых интегрируемых векторных уравнений.

Ключевые слова: интегрируемые векторные эволюционные уравнения, преобразования Беклунда, диаграмма Бианки.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена бескомпонентная версия симметричного подхода к классификации векторных уравнений и получен полный список интегрируемых уравнений на сфере $\mathbb{S}^n$. Классификация векторных уравнений специального вида приведена в работах [2], [3]. В работе [4] рассмотрены интегрируемые векторные уравнения на $\mathbb{S}^n$ более общего, чем в [1], вида. Таким образом, на сегодняшний день известно достаточно большое число интегрируемых векторных уравнений. Однако формула суперпозиции была получена только для решений векторных обобщений уравнения Шварца-КдФ [2] и мКдФ [5]. В нашей работе построены формулы суперпозиции для других наиболее простых и, на наш взгляд, интересных уравнений.

1. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вывод формулы суперпозиции продемонстрируем на примере простейшего интегрируемого на сфере $\mathbb{S}^n$ уравнения

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_{xxx} + 3\mathbf{z}_x^2 \mathbf{z}_x + 3(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_{xx})\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 1, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{z}(t, x)$ есть вектор n -мерного векторного пространства V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Автопреобразование Беклунда для (1.1) было получено в [1] и записывается так:

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{z}_x - (\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)\mathbf{y} - 2\left(\mu - \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}\right)(\mathbf{z} - (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{y}). \quad (1.2)$$

*Орловский государственный технический университет, Орел, Россия.
Email: balakhnev@yandex.ru

Если возвести равенство (1.2) в квадрат, найти из полученного выражения скалярное произведение $(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)$, а затем подставить его в (1.2), то преобразование (1.2) примет вид

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{z}_x - \frac{\mu(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \frac{\mathbf{y}_x^2 - \mathbf{z}_x^2}{2\mu(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}). \quad (1.3)$$

Следуя Бианки [6], предположим коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{q} \\ \mu \uparrow & & \uparrow \mu \\ \mathbf{p} & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{v} \end{array}, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{q}$ – решения уравнения (1.1), связанные в соответствии с диаграммой преобразованиями Беклунда вида (1.3).

Из коммутативности диаграммы (1.4) следуют четыре векторных соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= \mathbf{p}_x - \frac{\mu(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{p}) + \frac{\mathbf{u}_x^2 - \mathbf{p}_x^2}{2\mu(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2}(\mathbf{u} - \mathbf{p}), \\ \mathbf{v}_x &= \mathbf{p}_x - \frac{\nu(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{p}) + \frac{\mathbf{v}_x^2 - \mathbf{p}_x^2}{2\nu(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2}(\mathbf{v} - \mathbf{p}), \\ \mathbf{q}_x &= \mathbf{u}_x - \frac{\nu(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{q}_x^2 - \mathbf{u}_x^2}{2\nu(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2}(\mathbf{q} - \mathbf{u}), \\ \mathbf{q}_x &= \mathbf{v}_x - \frac{\mu(\mathbf{q} - \mathbf{v})^2}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{q}_x^2 - \mathbf{v}_x^2}{2\mu(\mathbf{q} - \mathbf{v})^2}(\mathbf{q} - \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя их, нетрудно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned} &\frac{\nu(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{p}) - \frac{\mathbf{v}_x^2 - \mathbf{p}_x^2}{2\nu(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2}(\mathbf{v} - \mathbf{p}) - \frac{\mu(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{p}) + \frac{\mathbf{u}_x^2 - \mathbf{p}_x^2}{2\mu(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2}(\mathbf{u} - \mathbf{p}) = \\ &= \frac{\nu(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \frac{\mathbf{q}_x^2 - \mathbf{u}_x^2}{2\nu(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2}(\mathbf{q} - \mathbf{u}) - \frac{\mu(\mathbf{q} - \mathbf{v})^2}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{q}_x^2 - \mathbf{v}_x^2}{2\mu(\mathbf{q} - \mathbf{v})^2}(\mathbf{q} - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Умножая это равенство скалярно на векторы $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{q}$, мы получаем четыре уравнения. Из полученной системы выражаем величины $\mathbf{q}_x^2, (\mathbf{q}, \mathbf{u}), (\mathbf{q}, \mathbf{v})$ и, подставив их в исходное уравнение, находим формулу суперпозиции для решений (1.1):

$$\mathbf{q} = \zeta^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2(\xi\eta\mathbf{p} + (\mu + \nu)(\xi(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2\mathbf{u} + \eta(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2\mathbf{v})), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= 2\nu(\mathbf{u} - \mathbf{p}, \mathbf{v}) - \mu(\mathbf{u} - \mathbf{p})^2, & \eta &= 2\mu(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{p}) - \nu(\mathbf{v} - \mathbf{p})^2, \\ \zeta &= [2(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{p}) - (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2]\xi\eta - (\mathbf{v} - \mathbf{p})^2\xi^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{p})^2\eta^2. \end{aligned}$$

Проведение расчетов при решении уравнения (1.1) облегчается как видом уравнения, так и тем, что оно интегрируемо на $\mathbb{S}^n$. Это означает, что для любого решения $\mathbf{u}$ мы имеем соотношение $\mathbf{u}^2 = 1$ и все его следствия. Кроме того, существует преобразование Беклунда для (1.1), зависящее от квазилокальных переменных. Можно проверить, что уравнение

$$\tilde{y} - \tilde{z} = \mu(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2 \quad (1.7)$$

совместно с (1.1) и (1.2); здесь $\tilde{y} = D_x^{-1}(\mathbf{y}_x, \mathbf{y}_x)$, $\tilde{z} = D_x^{-1}(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_x)$ – квазилокальные переменные. Тогда преобразование (1.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{z}_x - \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \frac{\mathbf{y}_x^2 - \mathbf{z}_x^2}{2(\tilde{y} - \tilde{z})}(\mathbf{y} - \mathbf{z}).$$

Таким образом, в формулу суперпозиции для решений уравнения (1.1) можно ввести квазилокальные переменные. Для этого согласно диаграмме (1.4) нужно положить в (1.6) $(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 1 - (\tilde{u} - \tilde{p})/(2\mu)$, $(\mathbf{v}, \mathbf{p}) = 1 - (\tilde{v} - \tilde{p})/(2\nu)$.

2. ВЕКТОРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

Рассмотрим известное анизотропное (в терминологии работы [1]) векторное уравнение

$$\mathbf{z}_t = D_x \left(\mathbf{z}_{xx} + \frac{3}{2}(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_x)\mathbf{z} \right) + \frac{3}{2}\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{z}_x, \quad \mathbf{z}^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 1. \quad (2.1)$$

Здесь и далее $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}, R\mathbf{y})$, где R – постоянная симметричная матрица. Возможно, это уравнение интересно с точки зрения физических приложений. Как было показано Голубчиком и Соколовым [7], если $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^3$, то (2.1) есть высшая симметрия уравнения Ландау–Лифшица

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z} \times \mathbf{z}_{xx} + \mathbf{z} \times (J\mathbf{z}), \quad |\mathbf{z}| = 1, \quad (2.2)$$

где $\times$ означает векторное произведение, а матрица $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ описывает анизотропию. В частности, уравнение (2.2) возникает при изучении периодических и квазипериодических решений классических нелинейных волновых уравнений (уравнения синус-Гордон и нелинейного уравнения Шредингера). Решения в специальных случаях описаны в работе [8].

Полученное нами в [9] автопреобразование Беклунда уравнения (2.1) имеет вид

$$\frac{\mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x}{2} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + f(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mu)(\mathbf{z} - (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{y})}{(\mathbf{y} + \mathbf{z})^2}, \quad (2.3)$$

где $f^2(\mathbf{z}, \mu) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \mu \mathbf{z}^2$. В цитируемой работе мы тоже предположили коммутативность диаграммы (1.4) в случае преобразования Беклунда (2.3) и получили скалярную формулу суперпозиции для решений $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{q}$ уравнения (2.1):

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{v}, \nu) + f(\mathbf{u} + \mathbf{p}, \mu) = f(\mathbf{q} + \mathbf{v}, \mu) + f(\mathbf{u} + \mathbf{q}, \nu). \quad (2.4)$$

Пусть существует преобразование Беклунда для уравнения (2.1), зависящее от квазилокальных переменных. Прямым вычислением можно проверить, что равенство

$$f(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mu) = \tilde{y} - \tilde{z}, \quad (2.5)$$

где $\tilde{y} = (1/2)D_x^{-1}[(\mathbf{y}_x, \mathbf{y}_x) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle]$, $\tilde{z} = (1/2)D_x^{-1}[(\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_x) - \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle]$, совместно с (2.1) и (2.3). Теперь из коммутативности диаграммы (1.4) и соотношений вида (2.5) для $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{q}$ автоматически следует (2.4).

С учетом (2.5) преобразование (2.3) можно переписать в виде

$$\mathbf{y}_x = -\mathbf{z}_x + 2 \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + (\tilde{y} - \tilde{z})(\mathbf{z} - (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{y})}{(\mathbf{y} + \mathbf{z})^2}.$$

Возведем последнее равенство в квадрат и выразим величину $(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)$. Подставив результат в (2.3), получаем, что (2.3) равносильно системе

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x &= \frac{\mathbf{y}_x^2 - \mathbf{z}_x^2}{2(\tilde{y} - \tilde{z})}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) - \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \\ \tilde{y} - \tilde{z} &= f(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mu). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Предположив коммутативность диаграммы (1.4) и используя соответствующие ей системы вида (2.6) для пар $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{q}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{q}, \mathbf{v}\}$, находим формулу суперпозиции решений уравнения (2.1):

$$\mathbf{q} = \zeta^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 (\xi \eta \mathbf{p} + (\mu - \nu)(\eta(\mathbf{u} + \mathbf{p})^2 \mathbf{v} - \xi(\mathbf{v} + \mathbf{p})^2 \mathbf{u})),$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2 \xi^2 + (\mathbf{v} + \mathbf{p})^2 \eta^2 + (1 - (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{p})^2) \xi \eta, \\ \eta &= (\tilde{u} - \tilde{v})^2 - f^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mu), \quad \xi = (\tilde{u} - \tilde{v})^2 - f^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \nu), \\ \tilde{u} - \tilde{v} &= f(\mathbf{u} + \mathbf{p}, \mu) - f(\mathbf{v} + \mathbf{p}, \nu). \end{aligned}$$

3. ДРУГИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ

Одно из представленных в работе [3] интегрируемых уравнений и его автопреобразование Беклунда записываются следующим образом:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{\mathbf{z}_x^2}{a} + \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)^2}{a(a - \mathbf{z}^2)} \right) \mathbf{z} \right)_x + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{z}_x^2}{a} + \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)^2}{a(a - \mathbf{z}^2)} \right) \mathbf{z}_x, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x &= \frac{z(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x) + y(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)}{z(a + yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z}))}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \mu(a\mathbf{z} - (y\mathbf{z} + (\mathbf{y}, \mathbf{z}))\mathbf{y}), \\ y^2 &= (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - a, \quad z^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) - a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме того, равенство

$$\tilde{z} - \tilde{y} = \frac{(z - y)^2}{\mu(a + yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z}))}, \quad (3.3)$$

где $\tilde{y} = D_x^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, $\tilde{z} = D_x^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{z})$, совместно с (3.1) и (3.2).

Умножив скалярно (3.2) на $\mathbf{y}$, выразив произведение $(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x)$ и подставив результат в (3.2), имеем следующее автопреобразование Беклунда:

$$\mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x = \frac{z(\mathbf{y}, \mathbf{y}_x) - y(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)}{yz(y - z)}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) - \frac{y - z}{\tilde{y} - \tilde{z}}(y\mathbf{z} + z\mathbf{y}). \quad (3.4)$$

По-прежнему предполагая коммутативность диаграммы (1.4), записываем систему вида (3.4), (3.3) для каждой пары решений $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{q}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{q}, \mathbf{v}\}$. Следуя уже описанному алгоритму, получаем формулу суперпозиции для решений уравнения (3.1):

$$\mathbf{q} = \frac{a + uv - (\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\zeta} (\xi \eta \mathbf{p} + (\mu + \nu)(\eta[a + vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})]\mathbf{u} - \xi[a + up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})]\mathbf{v})),$$

где

$$\begin{aligned}\xi &= \nu(a + vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})) - \mu((\mathbf{u}, \mathbf{p}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + up - uv), \\ \eta &= \nu((\mathbf{v}, \mathbf{p}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + vp - uv) - \mu(a + up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})), \\ \zeta &= [a + up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})]\xi^2 + [a + vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})]\eta^2 - \\ &\quad - [a + up + vp - uv + (\mathbf{v}, \mathbf{p}) + (\mathbf{u}, \mathbf{p}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})]\xi\eta.\end{aligned}$$

Скалярная формула суперпозиции для решений уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{(u - p)^2}{\mu(a + up + (\mathbf{u}, \mathbf{p}))} + \frac{(q - u)^2}{\nu(a + qu + (\mathbf{q}, \mathbf{u}))} = \frac{(v - p)^2}{\nu(a + vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p}))} + \frac{(q - v)^2}{\mu(a + qv + (\mathbf{q}, \mathbf{v}))}.$$

Рассмотрим теперь анизотропное уравнение, представленное в [3],

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_{xxx} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{\mathbf{z}_x^2}{a} + \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)^2}{a(a - \mathbf{z}^2)} \right) \mathbf{z} \right)_x + \frac{3}{2} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{z}_x, \quad (3.5)$$

и его автопреобразование Беклунда

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x &= \frac{f(a\mathbf{z} + (yz - (\mathbf{y}, \mathbf{z}))\mathbf{y})}{a - yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z})} + \frac{z(\mathbf{y}, \mathbf{z}_x) - y(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)}{z(a - yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z}))}(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \\ f^2 &= \mu(a - yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z})) - \langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle, \quad y^2 = \mathbf{y}^2 - a, \quad z^2 = \mathbf{z}^2 - a.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Можно проверить, что скалярное соотношение

$$(\tilde{y} - \tilde{z})^2 = \mu(a - yz + (\mathbf{y}, \mathbf{z})) - \langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= \frac{1}{2} D_x^{-1} \left(\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \frac{\mathbf{z}_x^2}{a} - \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)^2}{az^2} \right), \\ \tilde{y} &= \frac{1}{2} D_x^{-1} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \frac{\mathbf{y}_x^2}{a} - \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y}_x)^2}{ay^2} \right),\end{aligned}$$

совместно с (3.5) и (3.6).

С помощью алгебраических преобразований, как и в предыдущем примере, первое равенство в (3.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x = \frac{z(\mathbf{y}, \mathbf{y}_x) + y(\mathbf{z}, \mathbf{z}_x)}{yz(y + z)}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{y + z}(y\mathbf{z} - z\mathbf{y}). \quad (3.8)$$

Формула суперпозиции для решений $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ уравнения (3.5) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{q} = \frac{a + uv - (\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\zeta} (\xi\eta\mathbf{p} + (\mu - \nu)(\xi[a - vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})]\mathbf{u} - \eta[a - up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})]\mathbf{v})), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}\xi &= \nu(a + uv - (\mathbf{u}, \mathbf{v})) - \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle - (\tilde{u} - \tilde{v})^2, \\ \eta &= \mu(a + uv - (\mathbf{u}, \mathbf{v})) - \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle - (\tilde{u} - \tilde{v})^2, \\ \zeta &= \xi^2[a - vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})] + \eta^2[a - up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})] - \\ &\quad - \xi\eta[a - up - vp - uv + (\mathbf{u}, \mathbf{p}) + (\mathbf{v}, \mathbf{p}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})].\end{aligned}$$

Скалярная формула суперпозиции следует из коммутативности диаграммы (1.4) и соотношений вида (3.7) для пар решений $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$, $\{\mathbf{q}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{q}, \mathbf{v}\}$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mu(a - up + (\mathbf{u}, \mathbf{p})) - \langle \mathbf{u} + \mathbf{p}, \mathbf{u} + \mathbf{p} \rangle} + \sqrt{\nu(a - qu + (\mathbf{q}, \mathbf{u})) - \langle \mathbf{q} + \mathbf{u}, \mathbf{q} + \mathbf{u} \rangle} = \\ & = \sqrt{\nu(a - vp + (\mathbf{v}, \mathbf{p})) - \langle \mathbf{v} + \mathbf{p}, \mathbf{v} + \mathbf{p} \rangle} + \sqrt{\mu(a - qv + (\mathbf{q}, \mathbf{v})) - \langle \mathbf{q} + \mathbf{v}, \mathbf{q} + \mathbf{v} \rangle}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если в (3.5) положить $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -4(\mathbf{z}, \mathbf{z})$, сделать замену $x \rightarrow -x'$ и перейти к пределу при $a \rightarrow \infty$, то мы получим векторное обобщение уравнения МКдФ [10]:

$$\mathbf{z}_t + \mathbf{z}_{xxx} - 6(\mathbf{z}, \mathbf{z})\mathbf{z}_x = 0. \quad (3.10)$$

Чтобы преобразование (3.6) перешло в правильное преобразование Беклунда для уравнения МКдФ [3], необходимо сначала выполнить подстановку $\mu = 2k^2/a$, а затем перейти к пределу при $a \rightarrow \infty$. В результате имеем

$$\mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x - (\mathbf{y} - \mathbf{z})\sqrt{k^2 + (\mathbf{y} + \mathbf{z})^2} = 0,$$

при этом равенство (3.7) примет вид

$$(\tilde{y} - \tilde{z})^2 = k^2 + (\mathbf{y} + \mathbf{z})^2, \quad (3.11)$$

где $\tilde{y} = D_x^{-1}\mathbf{y}^2$, $\tilde{z} = D_x^{-1}\mathbf{z}^2$. Скалярная формула суперпозиции для решений уравнения (3.5) дает соответствующую формулу для векторного обобщения уравнения МКдФ, представленную в [5],

$$\sqrt{k_1^2 + (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2} + \sqrt{k_2^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{u})^2} = \sqrt{k_2^2 + (\mathbf{v} + \mathbf{p})^2} + \sqrt{k_1^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{v})^2},$$

а векторная формула суперпозиции в силу (3.11) запишется несколько иначе (ср. с работой [5]):

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \frac{(k_2^2 - k_1^2)(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{(\tilde{u} - \tilde{v})^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}, \quad (3.12)$$

где k_1, k_2 – параметры.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Достоверность всех формул суперпозиции мы проверили прямым расчетом на компьютере. Для демонстрации этапов процесса проверки рассмотрим (3.12).

Поскольку $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ – решения уравнения (3.10), вычислим производную (3.12) по t с учетом (3.10). Имеем

$$-\mathbf{q}_{xxx} + 6\mathbf{q}^2\mathbf{q}_x + \mathbf{p}_{xxx} - 6\mathbf{p}^2\mathbf{p}_x - f_t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{u}_{xxx} - 6\mathbf{u}^2\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_{xxx} + 6\mathbf{v}^2\mathbf{v}_x) = 0, \quad (3.13)$$

где здесь и далее $f = (k_2^2 - k_1^2)((\tilde{u} - \tilde{v})^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2)^{-1}$. Исключим из (3.13) вектор $\mathbf{q}$, все его производные по x и скалярное произведение $(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ с помощью (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_{xxx} + f_{xxx}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}_{xxx} - \mathbf{v}_{xxx}) + 3f_{xx}(\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x) + 3f_x(\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{v}_{xx}) - \\ & - 6(\mathbf{p}^2 + 2f((\mathbf{u}, \mathbf{p}) - (\mathbf{v}, \mathbf{p})) + f^2(\mathbf{u}^2 - 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{v}^2)) \times \\ & \quad \times (\mathbf{p}_x + f_x(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x)) - \\ & - (\mathbf{p}_{xxx} - 6\mathbf{p}^2\mathbf{p}_x - f_t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{u}_{xxx} - 6\mathbf{u}^2\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_{xxx} + 6\mathbf{v}^2\mathbf{v}_x)) = 0. \end{aligned}$$

Векторы $\mathbf{u}_{xx}$, $\mathbf{v}_{xx}$, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{v}_x$ в последнем соотношении заменим на соответствующие выражения, используя преобразования Беклунда:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_x &= -\mathbf{p}_x + (\mathbf{u} - \mathbf{p})(\tilde{u} - \tilde{p}) = 0, & \tilde{u} - \tilde{p} &= \sqrt{k_1^2 + (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2}, \\ \mathbf{v}_x &= -\mathbf{p}_x + (\mathbf{v} - \mathbf{p})(\tilde{v} - \tilde{p}) = 0, & \tilde{v} - \tilde{p} &= \sqrt{k_2^2 + (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Таким образом, уравнение (3.13) приводится к уравнению, не содержащему ни вектор $\mathbf{q}$, ни его производные по x , ни какие-либо их скалярные произведения. При этом мы учли только уравнение (3.10) и соотношения (3.12)–(3.14), никак не используя коммутативность диаграммы (1.4). То есть предположение о коммутативности диаграммы (1.4) необходимо только для построения формулы суперпозиции. Легко заметить, что члены, содержащие $\mathbf{p}_{xxx}$ и $\mathbf{p}_{xx}$, сокращаются. Упрощая с помощью (3.14) выражения при $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, мы установили, что (3.13) обращается в тождество.

Мы рассмотрели лишь малую часть представленных в [1]–[4] интегрируемых векторных уравнений. Остальные уравнения (и их преобразования Беклунда) записываются достаточно громоздко, поэтому для их исследования в контексте данной работы нужны убедительные мотивы. Отметим только, что в результате уже проведенных расчетов мы можем сделать следующие выводы о свойствах автопреобразований Беклунда векторных уравнений.

1. Каждое векторное преобразование Беклунда $\mathbb{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mu)$ имеет совместную с ним скалярную составляющую, зависящую от квазилокальных переменных.
2. Для построения **векторной** формулы суперпозиции всегда требуется привести векторную часть преобразования Беклунда к такому виду, чтобы $\mathbb{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mu) \equiv \mathbb{B}(\mathbf{v}, \mathbf{u}; \mu)$.

Благодарности. Автор благодарит В. В. Соколова и В. Е. Адлера за полезные обсуждения. Особая признательность А. Г. Мешкову за наставления и постоянную поддержку. Работа поддержана Министерством образования РФ (проект № 1.5.07).

Список литературы

- [1] A. G. Meshkov, V. V. Sokolov, *Comm. Math. Phys.*, **232**:1 (2002), 1–18.
- [2] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, *ТМФ*, **139** (2004), 192–208.
- [3] М. Ю. Балахнев, *ТМФ*, **142** (2005), 13–20.
- [4] A. G. Meshkov, M. Ju. Balakhnev, *SIGMA*, **1** (2005), 027; [arXiv: nlin.SI/0512032](#).
- [5] М. Ю. Балахнев, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 501–503.
- [6] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale. Seconda edizione, riveduta e cosiderevolmente aumentata, in due volumi*, V. II, Enrico Spoerri, Pisa, 1903.
- [7] И. З. Голубчик, В. В. Соколов, *ТМФ*, **124** (2000), 62–71.
- [8] E. K. Sklyanin, *On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation*, Preprint E-3-79, Lomi, Leningrad, 1979.
- [9] М. Ю. Балахнев, *Appl. Math. Lett.*, **18**:12 (2005), 1363–1372.
- [10] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 214–218.

Поступила в редакцию 16.05.2007