Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Головки, И. С. Красильщик, А. М. Вербовецкий, Вариационные структуры Пуассона–Нийенхейса на дифференциальных уравнениях в частных производных, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 268–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:39:25

© 2008 г.

В. А. Головки*, И. С. Красильщик[†],
А. М. Вербовецкий[†]

ВАРИАЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Изучены структуры Пуассона–Нийенхейса на нелинейных уравнениях в частных производных и установлены связи между скобками Схотена и Нийенхейса на исходном уравнении и скобками Ли симметрий на естественных расширениях (накрытиях) этого уравнения. Избранный подход позволяет построить основы теории нелокальных структур Пуассона–Нийенхейса.

Ключевые слова: структуры Пуассона–Нийенхейса, симметрии, законы сохранения, накрытия, нелокальные структуры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Структуры Пуассона–Нийенхейса (см. работу [1]) играют важную роль как в классической дифференциальной геометрии (см., например, работы [2], [3]), так и в геометрии дифференциальных уравнений [4], [5]. В последнем случае существование структуры Пуассона–Нийенхейса фактически равнозначно полной интегрируемости рассматриваемого уравнения.

Бесконечномерные структуры Пуассона–Нийенхейса хорошо описываются в случае пространств джетов, а также для эволюционных уравнений, рассматриваемых как потоки на этих пространствах. Для дифференциальных уравнений общего вида соответствующей теории долгое время не существовало. В сравнительно недавних работах [6], [7] мы изложили подход к этой теории применительно к эволюционным уравнениям, рассматриваемым с геометрической точки зрения. Этот подход основан на понятии Δ -накрытия. В его рамках построение как операторов рекурсии, так и гамильтоновых структур сводится к решению линеаризованного уравнения

$$\ell_{\mathcal{E}}(\Phi) = 0 \quad (1)$$

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: golovko@mccme.ru

[†]Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: josephk@diffiety.ac.ru, verbovet@mccme.ru

на специальных расширениях исходного уравнения $\mathcal{E}$. Мы называем эти расширения ℓ - и ℓ^* -*накрытиями*, и в категории дифференциальных уравнений они играют роль касательного и кокасательного расслоений.

Упомянутый подход применим к уравнениям общего вида, и ниже описывается его обобщение.

В разделе 2 мы определяем структуры Пуассона–Нийенхейса в “абсолютном случае”, т.е. для многообразий бесконечных джетов. Чтобы сделать это, мы переопределяем скобки Схотена и Нийенхейса (ср. с работами [6], [8]; см. также монографию [9]). Кроме того, мы переписываем условие совместности пуассонова бивектора и оператора Нийенхейса в терминах специальной скобки, тесно связанной с *объединенной скобкой* Виноградова [10]. Основным результатом этого раздела является теорема 2, которая устанавливает существование бесконечных семейств попарно совместных гамильтоновых структур, связанных с исходной структурой Пуассона–Нийенхейса. В разделе 3 введены структуры Пуассона–Нийенхейса для эволюционных уравнений. Мы показываем, что инвариантные (относительно потока, определенного уравнением) тензоры Нийенхейса суть *операторы рекурсии* для симметрий, а инвариантные пуассоновы бивекторы – гамильтоновы структуры. Мы также вводим ℓ - и ℓ^* -накрытия и сводим построение операторов рекурсии и гамильтоновых структур к решению уравнения (1). Скобки Схотена и Нийенхейса, а также условия совместности переформулируются в терминах скобки Якоби для соответствующих решений; для этих скобок получены явные выражения. В разделе 4 результаты обобщены на случай произвольных дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, в разделе 5 дан набросок развития теории применительно к *нелокальным* структурам Пуассона–Нийенхейса.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА НА $J^\infty(\pi)$

2.1. Геометрические структуры. Напомним основные определения и результаты, которые будут здесь использоваться (за более детальной информацией мы отсылаем читателя к книге [11]).

Пусть $\pi: E \rightarrow M$ – векторное расслоение над n -мерным многообразием M и $\pi_\infty: J^\infty(\pi) \rightarrow M$ – расслоение бесконечных джетов локальных сечений расслоения π . Если $x_1, \dots, x_n$ – локальные координаты в базе, а $u^1, \dots, u^m$ – координаты в слое расслоения π , то в $J^\infty(\pi)$ возникают *канонические координаты* u_σ^j , определяемые равенствами

$$j_\infty(s)^*(u_\sigma^j) = \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x_\sigma},$$

где $s = (s^1, \dots, s^m)$ – локальное сечение расслоения π , $j_\infty(s)$ – его бесконечный джет, а $\sigma = i_1 i_2 \dots i_{|\sigma|}$ – мультииндекс, $i_\alpha = 1, \dots, n$. Обозначим через $\mathcal{F}(\pi)$ алгебру гладких функций на $J^\infty(\pi)$.

Основной геометрической структурой на многообразии $J^\infty(\pi)$ является *распределение Картана* $\mathcal{C}$, которое порождено полными производными вида

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} u_{\sigma i}^j \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}.$$

Дифференциальные операторы на $J^\infty(\pi)$, выражающиеся через полные производные, будут называться *$\mathcal{C}$ -дифференциальными операторами*. В локальных координатах они имеют вид $\|\sum_{\sigma} a_{ij}^{\sigma} D_{\sigma}\|$, где $a_{ij}^{\sigma} \in \mathcal{F}(\pi)$. Пусть P и Q – $\mathcal{F}(\pi)$ -модули сечений некоторых векторных расслоений над $J^\infty(\pi)$. Множество всех $\mathcal{C}$ -дифференциальных операторов, действующих из P в Q , образует $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль, обозначаемый через $\mathcal{C}\text{Diff}(P, Q)$. Оператор, сопряженный к $\mathcal{C}$ -дифференциальному оператору $\Delta: P \rightarrow Q$, обозначается через $\Delta^*: \hat{Q} \rightarrow \hat{P}$, где $\hat{P} = \text{Hom}_{\mathcal{F}(\pi)}(P, \bar{\Lambda}^n(\pi))$, а $\bar{\Lambda}^n(\pi)$ – $\mathcal{F}(\pi)$ -модуль *горизонтальных* n -форм на $J^\infty(\pi)$, т.е. форм вида $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Обозначим через $\mathcal{C}\text{Diff}_{(k)}^{\text{skew}}(P, Q)$ модуль k -линейных кососимметрических $\mathcal{C}$ -дифференциальных операторов $P \times \dots \times P \rightarrow Q$, а через $\mathcal{C}\text{Diff}_{(k)}^{\text{sk-ad}}(P, \hat{P})$ – его подмножество в $\mathcal{C}\text{Diff}_{(k)}^{\text{skew}}(P, \hat{P})$, состоящее из операторов, кососопряженных по каждому аргументу.

Векторное поле на многообразии $J^\infty(\pi)$ называется *эволюционным*, если оно π_∞ -вертикально и сохраняет распределение Картана. Существует взаимно однозначное соответствие между эволюционными векторными полями и сечениями расслоения $\pi_\infty^*(\pi)$. Обозначим через $\mathcal{K}(\pi)$ соответствующий модуль сечений. В локальных координатах эволюционное векторное поле, соответствующее сечению $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, которое называется *производящим сечением* или *производящей функцией*, имеет вид

$$\mathcal{E}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}.$$

Коммутатор эволюционных векторных полей порождает в модуле $\mathcal{K}(\pi)$ структуру алгебры Ли, задаваемую *высшей скобкой Якоби* и определяемую как такое единственное сечение $\{\varphi, \psi\}$, которое удовлетворяет равенству $[\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{E}_\psi] = \mathcal{E}_{\{\varphi, \psi\}}$. Скобка $\{\varphi, \psi\}$ имеет вид

$$\{\varphi, \psi\} = \mathcal{E}_\varphi(\psi) - \mathcal{E}_\psi(\varphi).$$

Следуя работам [6], [12], мы будем называть элементы модуля $\mathcal{K}(\pi)$ *вариационными векторами*, элементы модуля $\mathcal{C}\text{Diff}_{(k-1)}^{\text{sk-ad}}(\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{K})$ – *вариационными k -векторами*, а элементы модуля $\hat{\mathcal{K}}$ – *1-формами*; наконец, элементы модуля $\mathcal{C}\text{Diff}_{(k-1)}^{\text{sk-ad}}(\mathcal{K}, \hat{\mathcal{K}})$ будут называться *вариационными k -формами*. Производная Ли $L_\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ вариационного вектора имеет вид

$$L_\varphi = \mathcal{E}_\varphi - \ell_\varphi, \quad (2)$$

где *оператор линеаризации* ℓ_φ определяется с помощью равенства $\ell_\varphi(\alpha) = \mathcal{E}_\alpha(\varphi)$, $\alpha \in \mathcal{K}$. В локальных координатах оператор линеаризации записывается в виде

$$\ell_\varphi(\alpha) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\sigma^j} D_\sigma(\alpha^j), \quad \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m).$$

Производная Ли $L_\varphi: \widehat{\mathfrak{X}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{X}}$ на вариационных формах имеет вид

$$L_\varphi = \mathfrak{D}_\varphi + \ell_\varphi^*. \quad (3)$$

2.2. Вариационные структуры Пуассона–Нийенхейса. Напомним (см. работу [6]), что *вариационная скобка Схотена* двух операторов $A, B \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X})$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \llbracket A, B \rrbracket(\psi_1, \psi_2) = & -\ell_{A, \psi_1}(B\psi_2) + \ell_{A, \psi_2}(B\psi_1) - A(\ell_{B, \psi_1}^*(\psi_2)) - \\ & - \ell_{B, \psi_1}(A\psi_2) + \ell_{B, \psi_2}(A\psi_1) - B(\ell_{A, \psi_1}^*(\psi_2)), \quad \psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathfrak{X}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор A называется *гамильтоновым*, если $\llbracket A, A \rrbracket = 0$, а два гамильтоновых оператора A и B *совместны*, если их скобка Схотена тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее используется обозначение $\ell_{\Delta, p_1, \dots, p_n}(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{X}$, применительно к $\mathcal{C}$ -дифференциальному оператору $\Delta: P \times \dots \times P \rightarrow Q$:

$$\ell_{\Delta, p_1, \dots, p_n}(\varphi) = \mathfrak{D}_\varphi(\Delta)(p_1, \dots, p_n), \quad p_1, \dots, p_n \in P.$$

Скобка Фрелихера–Нийенхейса двух операторов $R, S \in \mathcal{CDiff}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ (ср. с работой [8]; см. также монографию [9]) определяется равенством

$$\begin{aligned} [R, S]_{\text{FN}}(\varphi_1, \varphi_2) = & \{R\varphi_1, S\varphi_2\} + \{S\varphi_1, R\varphi_2\} - \\ & - R(\{S\varphi_1, \varphi_2\} + \{\varphi_1, S\varphi_2\} - S\{\varphi_1, \varphi_2\}) - \\ & - S(\{R\varphi_1, \varphi_2\} + \{\varphi_1, R\varphi_2\} - R\{\varphi_1, \varphi_2\}), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{X}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $[R, R]_{\text{FN}} = 0$, то мы будем называть оператор R *оператором Нийенхейса*. В конкретных вычислениях удобно пользоваться равенством

$$\begin{aligned} [R, S]_{\text{FN}}(\varphi_1, \varphi_2) = & -\ell_{R, \varphi_1}(S\varphi_2) - \ell_{S, \varphi_1}(R\varphi_2) + \ell_{R, \varphi_2}(S\varphi_1) + \ell_{S, \varphi_2}(R\varphi_1) + \\ & + R(\ell_{S, \varphi_1}(\varphi_2) - \ell_{S, \varphi_2}(\varphi_1)) + S(\ell_{R, \varphi_1}(\varphi_2) - \ell_{R, \varphi_2}(\varphi_1)). \end{aligned} \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (ср. с работой [4]). Будем говорить, что гамильтонов оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X})$ и оператор Нийенхейса $R \in \mathcal{CDiff}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ образуют на многообразии $J^\infty(\pi)$ *вариационную структуру Пуассона–Нийенхейса* (A, R) , если выполняются следующие условия совместности:

$$R \circ A = A \circ R^*, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C(A, R)(\psi_1, \psi_2) = & L_{A\psi_1}(R^*\psi_2) - L_{A\psi_2}(R^*\psi_1) + R^*L_{A\psi_2}(\psi_1) - \\ & - R^*L_{A\psi_1}(\psi_2) + \mathbf{E}\langle \psi_1, AR\psi_2 \rangle - R^*\mathbf{E}\langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{E}: \overline{H}^n(\pi) \rightarrow \widehat{\mathfrak{X}}$ – оператор Эйлера–Лагранжа, а $\overline{H}^n(\pi)$ обозначает n -ю группу горизонтальных когомологий де Рама. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle: \widehat{\mathfrak{X}} \times \mathfrak{X} \rightarrow \overline{H}^n(\pi)$ обозначается естественное спаривание.

В терминах операторов линейаризации условие (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} C(A, R)(\psi_1, \psi_2) = & -\ell_{R^*, \psi_1}(A\psi_2) + \ell_{R^*, \psi_2}(A\psi_1) + \ell_{A, \psi_1}^*(R^*\psi_2) + \\ & + \ell_{A, \psi_1}^*(A\psi_2) - R^*(\ell_{A, \psi_1}^*(\psi_2)) = 0. \end{aligned}$$

Как и в конечномерном случае, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть гамильтонов оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ и оператор Нийенхейса $R \in \mathcal{CDiff}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ задают структуру Пуассона–Нийенхейса на многообразии $J^\infty(\pi)$. Тогда композиция $R \circ A$ является гамильтоновым оператором, совместным с A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямыми вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned} & \llbracket RA, RA \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - 2R\llbracket A, RA \rrbracket(\psi_1, \psi_2) + \\ & + R^2\llbracket A, A \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - [R, R]_{\text{FN}}(A\psi_1, A\psi_2) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} & 2\llbracket A, RA \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - \llbracket A, A \rrbracket(R^*\psi_1, \psi_2) - \\ & - \llbracket A, A \rrbracket(\psi_1, R^*\psi_2) - 2A(C(A, R)(\psi_1, \psi_2)) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда немедленно вытекает требуемый результат.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что гамильтонов оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ и оператор Нийенхейса $R \in \mathcal{CDiff}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ задают структуру Пуассона–Нийенхейса на $J^\infty(\pi)$. Тогда на $J^\infty(\pi)$ возникает бесконечная иерархия итерированных гамильтоновых операторов, т.е. последовательность гамильтоновых операторов $R^i A$, $i \geq 0$, которые попарно совместны: $\llbracket R^i A, R^j A \rrbracket = 0$, $i, j \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу $n = \max(i, j)$. При $n = 1$ результат вытекает из доказанного выше предложения. Предположим теперь, что $\llbracket R^i A, R^j A \rrbracket = 0$, $i, j = 0, \dots, n$, и $A(C(R^i A, R^j)) = 0$, $i + j \leq n$, и докажем, что $\llbracket R^i A, R^{n+1} A \rrbracket = 0$, $i = 0, \dots, n + 1$, и $A(C(R^i A, R^j)) = 0$, $i + j \leq n + 1$.

Заметим прежде всего, что прямыми вычислениями нетрудно доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \llbracket RA, RB \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - R\llbracket RA, B \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - R\llbracket A, RB \rrbracket(\psi_1, \psi_2) + R^2\llbracket A, B \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - \\ & - [R, R]_{\text{FN}}(A\psi_1, B\psi_2) - [R, R]_{\text{FN}}(B\psi_1, A\psi_2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \llbracket RA, B \rrbracket(\psi_1, \psi_2) + \llbracket A, RB \rrbracket(\psi_1, \psi_2) - \llbracket A, B \rrbracket(R^*\psi_1, \psi_2) - \llbracket A, B \rrbracket(\psi_1, R^*\psi_2) - \\ & - A(C(B, R)(\psi_1, \psi_2)) - B(C(A, R)(\psi_1, \psi_2)) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & C(RA, R)(\psi_1, \psi_2) + C(A, R^2)(\psi_1, \psi_2) - C(A, R)(R^*\psi_1, \psi_2) - \\ & - C(A, R)(\psi_1, R^*\psi_2) - R^*(C(A, R)(\psi_1, \psi_2)) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в равенство (12) выражения $R^n A$ и $R^{n-l} A$, $l = 1, \dots, n$, вместо операторов A и B соответственно. В результате получим

$$\llbracket R^{n+1} A, R^{n-l} A \rrbracket - R^{n-l} A(C(R^n A, R)) = 0. \quad (14)$$

Теперь в равенство (12) вместо A , B и R подставим соответственно операторы $R^{n-1} A$, $R^{n-l} A$, $l = 1, \dots, n$, и R^2 . Тогда получаем

$$\llbracket R^{n+1} A, R^{n-l} A \rrbracket - R^{n-l} A(C(R^{n-1} A, R^2)) = 0. \quad (15)$$

Далее, если в (13) вместо A подставить выражение $R^{n-1}A$, то мы получим равенство

$$C(R^n A, R) + C(R^{n-1} A, R^2) = 0. \quad (16)$$

Следовательно, суммируя равенства (14) и (15), получаем, что имеет место тождество $\llbracket R^{n+1} A, R^{n-l} A \rrbracket = 0$ для всех $l = 1, \dots, n$.

Теперь подставим в равенство (11) операторы $R^{n-1}A$ и $R^n A$ вместо A и B соответственно, а в равенство (9) – $R^n A$ вместо A . Тогда мы получим, что $\llbracket R^{n+1} A, R^n A \rrbracket = 0$ и $\llbracket R^{n+1} A, R^{n+1} A \rrbracket = 0$. Чтобы получить теперь тождество $A(C(R^i A, R^j)) = 0$ для всех $i + j \leq n + 1$, достаточно положить $B = R^{n-l} A$, $l = 0, \dots, n$, и подставить R^{l+1} вместо R в равенство (12).

Для дальнейших вычислений нам понадобится оператор

$$C^*(A, R)(\psi, \varphi) = -\ell_{A, \psi}(R\varphi) + \ell_{R, \varphi}(A\psi) + R(\ell_{A, \psi}(\varphi)) + \\ + A(\ell_{R, \varphi}^*(\psi) - \ell_{R^*, \psi}(\varphi)),$$

определяемый равенством

$$\langle C(A, R)(\psi_1, \psi_2), \varphi \rangle = \langle \psi_2, C^*(A, R)(\psi_1, \varphi) \rangle. \quad (17)$$

3. ВАРИАЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА НА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ

3.1. Симметрии и косимметрии. Рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$\mathcal{E} = \{F = u_t - f(x, t, u, u_1, \dots, u_k) = 0\}, \quad (18)$$

в которой и $u = (u^1, \dots, u^m)$, и $f = (f^1, \dots, f^m)$ являются векторами, $u_t = \partial u / \partial t$, а $u_k = \partial^k u / \partial x^k$. Для простоты будем полагать, что пространственная переменная x одномерна, хотя все сказанное ниже справедливо и для общего случая. Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ – алгебра гладких функций на уравнении $\mathcal{E}$.

Напомним, что уравнение (18) можно понимать как пространство $J^\infty(\pi) \times \mathbb{R}$ с распределением Картана, порожденным векторными полями D_x и $D_t = \partial / \partial t + \partial_f$, где t – координата вдоль $\mathbb{R}$. В локальных координатах эти поля имеют вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} u_{k+1}^j \frac{\partial}{\partial u_k^j}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} D_x^k(f^j) \frac{\partial}{\partial u_k^j}.$$

Симметрия уравнения $\mathcal{E}$ есть π_∞ -вертикальное векторное поле на $\mathcal{E}$, которое сохраняет распределение Картана. Множество всех симметрий образует алгебру Ли над $\mathbb{R}$, обозначаемую $\text{sym}(\mathcal{E})$. Существует взаимно однозначное соответствие между $\text{sym}(\mathcal{E})$ и гладкими сечениями $\varphi \in \Gamma(\pi_\infty^*(\pi)) = \mathcal{X}(\mathcal{E})$, удовлетворяющими уравнению

$$\ell_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0, \quad (19)$$

где $\ell_{\mathcal{E}} = D_t - \ell_f$ – оператор линеаризации уравнения $\mathcal{E}$.

Законом сохранения уравнения (18) называется горизонтальная 1-форма $\eta = X dx + T dt$, замкнутая относительно горизонтального дифференциала де Рама

$$\bar{d}: \bar{\Lambda}^1(\mathcal{E}) \rightarrow \bar{\Lambda}^2(\mathcal{E}),$$

т.е. такая, что

$$D_x(X) = D_t(T),$$

где $X, T \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Закон сохранения η тривиален, если он имеет вид $\eta = \bar{d}h$, $h \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Пространство классов эквивалентности законов сохранения совпадает с первой группой горизонтальных когомологий де Рама и обозначается через $\bar{H}^1(\mathcal{E})$. Каждому закону сохранения $\eta = X dx + T dt$ соответствует его производящая функция $\psi_\eta = \mathbf{E}(\eta)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\ell_{\mathcal{E}}^*(\psi_\eta) = 0. \quad (20)$$

Решения этого уравнения называются *косимметриями* уравнения $\mathcal{E}$. Пространство косимметрий будет обозначаться через $\text{sym}^*(\mathcal{E})$.

3.2. Инвариантные структуры Пуассона–Нийенхейса. Рассмотрим модули $\mathcal{K}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$ на пространстве расширенных джетов $J^\infty(\pi) \times \mathbb{R}$. Это означает, что мы допускаем явную зависимость элементов этих модулей от переменной t . Поскольку векторные поля на уравнении $\mathcal{E}$ действуют на $\mathcal{K}$ и $\widehat{\mathcal{K}}$ с помощью производных Ли, мы можем дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $O: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ (или $O: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}$ и т.д.) называется инвариантным, если выполняется равенство $L_{D_t} \circ O = O \circ L_{D_t}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор $A: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ инвариантен тогда и только тогда, когда

$$\ell_F \circ A + A \circ \ell_F^* = 0. \quad (21)$$

Оператор $R: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ инвариантен тогда и только тогда, когда

$$\ell_F \circ R - R \circ \ell_F = 0. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенство (2) показывает, что в случае действия на $\mathcal{K}$ имеет место формула

$$L_{D_t} = L_{\partial/\partial t + \mathfrak{A}_f} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A}_f - \ell_f = \ell_F,$$

а из равенства (3) следует, что действие на $\widehat{\mathcal{K}}$ описывается формулой

$$L_{D_t} = L_{\partial/\partial t + \mathfrak{A}_f} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A}_f + \ell_f^* = -\ell_F^*.$$

Отсюда следуют как равенство (21), так и равенство (22).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из равенства (22) видно, что инвариантный $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор переводит симметрии уравнения $\mathcal{E}$ в симметрии, т.е. является *оператором рекурсии* для симметрий уравнения $\mathcal{E}$. С другой стороны, $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор A , удовлетворяющий равенству (21), переводит косимметрии

в симметрии. Как было показано в работе [6], если A является кососопряженным оператором и удовлетворяет равенству $\llbracket A, A \rrbracket = 0$, то он представляет собой *гамильтонову структуру* для уравнения $\mathcal{E}$, причем все гамильтоновы структуры могут быть найдены таким образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (A, R) – структура Пуассона–Нийенхейса на многообразии $J^\infty(\pi) \times \mathbb{R}$. Будем говорить что она является структурой Пуассона–Нийенхейса на уравнении $\mathcal{E}$, если и A , и R являются инвариантными операторами.

Таким образом, структура Пуассона–Нийенхейса на уравнении $\mathcal{E}$ состоит из гамильтоновой структуры A и оператора рекурсии, который является нийенхейсовым и совместим с A .

3.3. ℓ^* - и ℓ -накрытия. Теперь мы примем иную точку зрения на структуры Пуассона–Нийенхейса. Для этого рассмотрим следующее расширение уравнения $\mathcal{E}$. Добавим к $\mathcal{E}$ новую *нечетную* переменную $p = (p^1, \dots, p^m)$, которая удовлетворяет уравнению

$$p_t = -\ell_f^*(p). \quad (23)$$

Система, состоящая из исходного уравнения $\mathcal{E}$ и уравнения (23), называется ℓ^* -*накрытием* уравнения $\mathcal{E}$ и обозначается через $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$. Полные производные, расширенные на $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$, имеют вид

$$\tilde{D}_x = D_x + \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} p_{k+1}^j \frac{\partial}{\partial p_k^j}, \quad \tilde{D}_t = D_t - \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} \tilde{D}_x^k(\tilde{\ell}_f^*(p^j)) \frac{\partial}{\partial p_k^j}.$$

Заметим, что любой $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор O можно поднять с уравнения $\mathcal{E}$ до оператора $\tilde{O}$ на $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$, просто дописывая тильды над полными производными.

Пусть $A: \hat{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ – $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор вида $\|\sum_{i \geq 0} a_{ij}^l D_x^i\|$. Рассмотрим p -линейную вектор-функцию $\mathcal{H}_A = (\mathcal{H}_A^1, \dots, \mathcal{H}_A^m)$, где

$$\mathcal{H}_A^l = \sum_{i,j} a_{ij}^l p_i^j, \quad a_{ij}^l \in \mathcal{F}(\mathcal{E}). \quad (24)$$

ТЕОРЕМА 2 (см. работу [6]). *Кососопряженный оператор A удовлетворяет уравнению (21) тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{H}_A) = 0. \quad (25)$$

В терминологии теории накрытий (см. работу [13]) вектор-функция, удовлетворяющая уравнению (25), является не чем иным, как *тенью* симметрии уравнения $\mathcal{E}$ в ℓ^* -накрытии, или, точнее, функция $\mathcal{H}_A$ является производящим сечение тени:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A} = \sum_{k \geq 0} \tilde{D}_x^k(\mathcal{H}_A^j) \frac{\partial}{\partial w_k^j}.$$

Не используя локальных координат, тень можно понимать как дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, принимающее значения в алгебре функций на $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$ и сохраняющее распределения Картана.

ЛЕММА 1. Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ и соответствующую тенз $\tilde{\mathcal{H}}_A$. Тогда существует такая симметрия уравнения $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$, что ее ограничение на $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ совпадает с $\tilde{\mathcal{H}}_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор-функцию $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$, определенную равенством

$$\alpha = -\frac{1}{2}\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}^*(p),$$

и положим

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A, \bar{\mathcal{H}}_A} = \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A} + \sum_{k,j} \tilde{D}_x^k(\alpha^j) \frac{\partial}{\partial p_k^j}. \quad (26)$$

Легко видеть, что векторное поле $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A, \bar{\mathcal{H}}_A}$ является искомой симметрией.

Рассмотрим теперь два оператора $A, B \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ и, пользуясь леммой 1, определим скобку Якоби функций $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ с помощью равенства

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A, \bar{\mathcal{H}}_A}(\mathcal{H}_B) + \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_B, \bar{\mathcal{H}}_B}(\mathcal{H}_A). \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Знак “плюс” в правой части равенства (27) объясняется тем, что и поля $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_A, \bar{\mathcal{H}}_A}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_B, \bar{\mathcal{H}}_B}$, и функции $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_A$ являются нечетными.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В более явных терминах скобку Якоби можно переписать в виде

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = -\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}(\mathcal{H}_B) - \tilde{\ell}_{\mathcal{H}_B}(\mathcal{H}_A) - \frac{A(\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_B}^*(p)) + B(\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}^*(p))}{2}. \quad (28)$$

Заметим, что имеет место взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{C}$ -дифференциальными операторами, лежащими в модуле $\mathcal{CDiff}_{(k)}^{\text{skew}}(\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$, и функциями на $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$, которые $(k-1)$ -линейны по нечетным переменным. Для оператора

$$\Delta \in \mathcal{CDiff}_{(k)}^{\text{skew}}(\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$$

обозначим через $\mathcal{H}_\Delta$ соответствующую функцию. Тогда прямыми вычислениями можно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ – тени симметрий в ℓ^* -накрытии, а A и B – соответствующие операторы. Тогда справедливо равенство

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = \mathcal{H}_{[A, B]}. \quad (29)$$

Если ψ_1 и ψ_2 – такие сечения $\ell_{\mathcal{E}}^*$ -накрытия, что $(d\psi_i)(\mathcal{C}) \subset \tilde{\mathcal{C}}$, $i = 1, 2$, где $\mathcal{C}$ и $\tilde{\mathcal{C}}$ суть распределения Картана на $\mathcal{E}$ и $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$ соответственно, то уравнение (29) можно переписать в виде

$$\psi_1^* \psi_2^* \{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = \llbracket A, B \rrbracket(\psi_1, \psi_2).$$

Теперь мы введем объект, двойственный ℓ^* -накрытию. А именно рассмотрим расширение уравнения $\mathcal{E}$ с помощью новых нечетных переменных $q = (q^1, \dots, q^m)$, которые удовлетворяют уравнению

$$q_t = \ell_f(q). \quad (30)$$

Система, состоящая из исходного уравнения и уравнения (30), будет называться ℓ -накрытием уравнения $\mathcal{E}$ и обозначаться через $\mathcal{LE}$. Полные производные на $\mathcal{LE}$ имеют вид

$$\tilde{D}_x = D_x + \sum_{l=1}^m \sum_{k \geq 0} q_{k+1}^l \frac{\partial}{\partial q_k^l}, \quad \tilde{D}_t = D_t + \sum_{l=1}^m \sum_{k \geq 0} \tilde{D}_x^k(\tilde{\ell}_f(q^l)) \frac{\partial}{\partial q_k^l}.$$

Пусть $R: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ – $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор вида $\sum_{i \geq 0} a_{ij}^l D_x^i$. Сопоставим ему вектор-функцию $\mathcal{N}_R = (\mathcal{N}_R^1, \dots, \mathcal{N}_R^m)$, линейную по переменным q :

$$\mathcal{N}_R^l = \sum_{i,j} a_{ij}^l q_i^j, \quad a_{ij}^l \in \mathcal{F}(\mathcal{E}).$$

Имеет место следующий результат, аналогичный теореме 2.

ТЕОРЕМА 4 (см. [6], [7]). *Оператор R удовлетворяет соотношению (22), т.е. является оператором рекурсии для симметрий уравнения $\mathcal{E}$, тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{N}_R) = 0, \quad (31)$$

т.е. когда $\mathcal{N}_R$ является тенью симметрии в ℓ -накрытии.

Соответствующее дифференцирование имеет вид

$$\tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R} = \sum_{k \geq 0} \tilde{D}_x^k(\mathcal{N}_R^j) \frac{\partial}{\partial u_k^j}.$$

Имеет место следующий вспомогательный результат, аналогичный лемме 1.

ЛЕММА 2. *Пусть $R \in \mathcal{CDiff}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ и $\tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R}$ – соответствующая тень. Тогда существует такая симметрия уравнения $\mathcal{LE}$, что ее ограничение на $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ совпадает с $\tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор-функцию $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^m)$, где

$$\beta^j = \sum_{k,l} \frac{\partial \mathcal{N}_R^j}{\partial u_k^l} q_k^l.$$

Тогда

$$\tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R} = \tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R} + \sum_{k,j} \tilde{D}_x^k(\beta^j) \frac{\partial}{\partial q_k^j} \quad (32)$$

есть искомая симметрия.

Пользуясь леммой 2, определим скобку Якоби вектор-функций $\mathcal{N}_R$ и $\mathcal{N}_S$:

$$\{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S\} = \tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R}(\mathcal{N}_S) + \tilde{\Theta}_{\mathcal{N}_S, \overline{\mathcal{N}}_S}(\mathcal{N}_R). \quad (33)$$

Явный вид скобки Якоби таков:

$$\{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S\} = -\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_R}(\mathcal{N}_S) - \tilde{\ell}_{\mathcal{N}_S}(\mathcal{N}_R) + R(\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_S}(q)) + S(\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_R}(q)). \quad (34)$$

Обозначим через $\mathcal{N}_{[R,S]_{\text{FN}}}$ функцию на $\mathcal{LE}$, билинейную относительно переменных q и соответствующую оператору $[R,S]_{\text{FN}} \in \mathcal{CDiff}_{(2)}^{\text{skew}}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Тогда непосредственные вычисления приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S$ – тени симметрий в ℓ -накрытии, которым соответствуют операторы $R, S \in \mathcal{CDiff}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Тогда выполнено равенство

$$\{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S\} = \mathcal{N}_{[R, S]_{\text{FN}}}.$$

Если φ_1, φ_2 – сечения, сохраняющие распределения Картана, то

$$\varphi_1^* \varphi_2^* \{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S\} = [R, S]_{\text{FN}}(\varphi_1, \varphi_2).$$

3.4. Условия совместности. Выразим теперь условия совместности между гамильтоновой структурой A и оператором рекурсии R на уравнении (18) в аналогичных геометрических терминах. Для этого напомним, что пространства $\mathcal{LE}$ и $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$ расслоены над уравнением $\mathcal{E}$, и обозначим соответствующие расслоения через $\tau: \mathcal{LE} \rightarrow \mathcal{E}$ и $\tau^*: \mathcal{L}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Рассмотрим сумму Уитни $\tau \otimes \tau^*: \mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ этих расслоений и расширим полные производные на пространство $\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E}$, полагая

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x &= D_x + \sum_{l=1}^m \sum_{k \geq 0} \left(q_{k+1}^l \frac{\partial}{\partial q_k^l} + p_{k+1}^l \frac{\partial}{\partial p_k^l} \right), \\ \tilde{D}_t &= D_t + \sum_{l=1}^m \sum_{k \geq 0} \left(\tilde{D}_x^k(\tilde{\ell}_f(q^l)) \frac{\partial}{\partial q_k^l} - \tilde{D}_x^k(\tilde{\ell}_f^*(p^l)) \frac{\partial}{\partial p_k^l} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение $\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E}$ получается из $\mathcal{E}$ добавлением к нему как уравнения (23), так и уравнения (30).

В силу существования естественных проекций $\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^*\mathcal{E}$ и $\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{LE}$ векторные поля $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A}$ и $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R}$ (см. равенства (26) и (32)) можно понимать как дифференцирования из соответствующих алгебр $\mathcal{F}(\mathcal{L}^*\mathcal{E})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{LE})$ в алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E})$.

ЛЕММА 3. Существуют такие симметрии $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A, \alpha}$ и $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R, \rho}$ уравнения $\mathcal{LE} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E}$, что их ограничения соответственно на алгебры функций $\mathcal{F}(\mathcal{L}^*\mathcal{E})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{LE})$ совпадают с $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A}$ и $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A, \alpha} = \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A} + \sum_{k,j} \tilde{D}_x^k(\alpha^j) \frac{\partial}{\partial q_k^j}, \quad (35)$$

где вектор-функция $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ определена равенством $\alpha = \tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}(q)$. Рассмотрим также векторное поле

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R, \rho} = \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R} + \sum_{k,j} \tilde{D}_x^k(\rho^j) \frac{\partial}{\partial p_k^j}, \quad (36)$$

где функция $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^m)$ имеет вид

$$\rho = -\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_R}^*(p) - \tilde{\mathfrak{D}}_q(R^*)(p).$$

С помощью непосредственных вычислений можно показать, что векторные поля (35) и (36) обладают нужными свойствами.

Пользуясь леммой 3, определим скобку

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{N}_R\} = \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{H}_A, \overline{\mathcal{H}}_A, \alpha}(\mathcal{N}_R) + \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{N}_R, \overline{\mathcal{N}}_R, \rho}(\mathcal{H}_A)$$

или, в явном виде,

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{N}_R\} = -\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_R}(\mathcal{H}_A) - \tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}(\mathcal{N}_R) - A(\tilde{\ell}_{\mathcal{N}_R}^*(p) + \tilde{\mathfrak{D}}_q(R^*)(p)) + R(\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_A}(q)). \quad (37)$$

Обозначим через $\mathcal{C}_{A,R}^*$ билинейную по переменным p и q функцию на пространстве $\mathcal{L}\mathcal{E} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{L}^*\mathcal{E}$, соответствующую оператору $C^*(A, R): \hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (см. равенство (17)). Тогда имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{H}_A$ – тень в ℓ^* -накрытии, которой соответствует оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$, а $\mathcal{N}_R$ – тень в ℓ -накрытии, которой соответствует оператор $R \in \mathcal{CDiff}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Тогда

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{N}_R\} = \mathcal{C}_{A,R}^*.$$

Собирая вместе сказанное выше, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть гамильтонов оператор $A \in \mathcal{CDiff}^{\text{sk-ad}}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ и оператор рекурсии $R \in \mathcal{CDiff}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ определяют структуру Пуассона–Нийенхейса на эволюционном уравнении $\mathcal{E}$, а $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{N}_R$ – тени в ℓ^* - и ℓ -накрытиях над $\mathcal{E}$ соответственно. Тогда

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_A\} = 0, \quad (38)$$

$$\{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_R\} = 0, \quad (39)$$

$$\{\mathcal{H}_A, \mathcal{N}_R\} = 0. \quad (40)$$

4. ВАРИАЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим уравнение $\mathcal{E} \subset J^\infty(\pi)$ общего вида как подмногообразие в пространстве $J^\infty(\pi)$ бесконечных джетов некоторого локально-тривиального расслоения $\pi: E \rightarrow M$. В локальных координатах уравнение $\mathcal{E}$ задается системой

$$F^j(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Мы предполагаем, что $F = (F^1, \dots, F^r) \in P$, где P – модуль сечений некоторого векторного расслоения над $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим оператор линейаризации $\ell_{\mathcal{E}}: \mathcal{X} \rightarrow P$ и сопряженный к нему оператор $\ell_{\mathcal{E}}^*: \hat{P} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$. Аналогично случаю эволюционных уравнений мы можем построить ℓ - и ℓ^* -накрытия, дополняя $\mathcal{E}$ уравнениями $\ell_{\mathcal{E}}(q) = 0$ и $\ell_{\mathcal{E}}^*(p) = 0$.

Следуя схеме, изложенной в разделе 2, мы ищем такие $\mathcal{C}$ -дифференциальные операторы, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}} & P \\ R \downarrow & & \downarrow \bar{R} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}} & P \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \hat{P} & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}^*} & \hat{\mathcal{X}} \\ A \downarrow & & \downarrow \bar{A} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}} & P \end{array} \quad (41)$$

коммутативны. Буквально повторяя конструкцию раздела 3, оператору R из первой диаграммы (41) можно сопоставить q -линейную функцию $\mathcal{N}_R = (\mathcal{N}_R^1, \dots, \mathcal{N}_R^m)$ на $\mathcal{L}\mathcal{E}$, а оператору A из второй диаграммы – p -линейную функцию $\mathcal{H}_A = (\mathcal{H}_A^1, \dots, \mathcal{H}_A^m)$ на $\mathcal{L}^*\mathcal{E}$. Вновь воспользуемся общим результатом, доказанным в работе [6].

ТЕОРЕМА 8. *Оператор R может входить в первую из коммутативных диаграмм (41) тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{N}_R) = 0, \quad (42)$$

а оператор A – во вторую из диаграмм (41) тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{H}_A) = 0. \quad (43)$$

Рассмотрим такие операторы A , которые обладают свойством, аналогичным кососопряженности. А именно будем рассматривать такие операторы, что

$$A^* = -\bar{A}. \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Это свойство означает, что кососопряженным является оператор $(A, \bar{A}): \hat{P} \oplus \hat{\kappa} \rightarrow \kappa \oplus P$.

Заметим теперь, что явные выражения (28), (34) и (37) для скобок Якоби не используют тот факт, что рассматриваемое уравнение является эволюционным. Пользуясь этим наблюдением, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{E} \subset J^\infty(\pi)$ – дифференциальное уравнение.

1. $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор $A: \hat{P} \rightarrow \hat{\kappa}$ называется *гамильтоновой структурой* на $\mathcal{E}$, если он является частью второй диаграммы в (41) и выполнены равенства (44) и $\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_A\} = 0$. Две гамильтоновы структуры A и B называются *совместными*, если $\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = 0$.

2. $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор $R: \kappa \rightarrow \kappa$ называется *оператором Нийенхейса* для уравнения $\mathcal{E}$, если он входит в первую из диаграмм (41) и выполнено равенство $\{\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_R\} = 0$.

3. Пара $\mathcal{C}$ -дифференциальных операторов (A, R) называется *структурой Пуассона–Нийенхейса* на уравнении $\mathcal{E}$, если R – оператор Нийенхейса на этом уравнении, а A – такая гамильтонова структура, что $A^* \circ R^* = \bar{R} \circ A^*$ и $\{\mathcal{N}_R, \mathcal{H}_A\} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если (A, R) – структура Пуассона–Нийенхейса на уравнении $\mathcal{E}$, то R является оператором рекурсии для симметрий этого уравнения. Более того, как и в эволюционном случае, гамильтонова структура A задает скобку Пуассона на группе законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$. А именно, если ω_1 и ω_2 – законы сохранения, то мы полагаем

$$\{\omega_1, \omega_2\}_A = L_{d_1^{0,n-1}\omega_1}(\omega_2),$$

где $d_1^{0,n-1}: E_1^{0,n-1} \rightarrow E_1^{1,n-1}$ – дифференциал из $\mathcal{C}$ -спектральной последовательности Виноградова (см. монографию [9]). Для эволюционных уравнений этот дифференциал совпадает с оператором Эйлера–Лагранжа.

Следующий результат обобщает теорему 1.

ТЕОРЕМА 9. *Если (A, R) – структура Пуассона–Нийенхейса на уравнении $\mathcal{E}$, то $R^i \circ A$, $i = 0, 1, 2, \dots$, является семейством попарно совместных гамильтоновых структур на $\mathcal{E}$.*

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ: НЕЛОКАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА

Строго говоря, описанные выше конструкции справедливы для *локальных* структур Пуассона–Нийенхейса. На самом деле каждый из операторов A или R или оба этих оператора могут быть *нелокальными*, т.е. содержать члены вида D_x^{-1} . В качестве примера достаточно вспомнить оператор рекурсии для уравнения Кортевега–де Фриза. Мы полагаем, что наш подход можно обобщить на структуры такого типа, пользуясь следующими рассуждениями.

Пусть $\mathcal{E}$ – дифференциальное уравнение, а $\tau: \widetilde{\mathcal{L}\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{E}$ – произвольное накрытие [13] над $\mathcal{L}\mathcal{E}$. Тогда решение уравнения

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{N}) = 0,$$

линейное относительно нечетных переменных, порождает нелокальный $\mathcal{C}$ -дифференциальный оператор $R_{\mathcal{N}}$, нелокальная часть которого соответствует нелокальным переменным, определяемым накрытием τ . Эти решения суть тени симметрий в рассматриваемом накрытии. Наиболее трудная задача состоит в том, как определить скобку Якоби для таких теней. Нетривиальность этой задачи подтверждается наблюдениями, описанными в работе [14]. Один из способов коммутирования теней можно получить на основании результатов работы [15], но возникающие при этом конструкции неоднозначны.

В статье [16] мы привели каноническую конструкцию скобок Якоби $\{\cdot, \cdot\}$ для теней общего вида. Используя эту конструкцию и привлекая к рассмотрению изложенные выше результаты, нелокальные операторы Нийенхейса $R_{\mathcal{N}}$ можно определить как такие операторы, которые удовлетворяют равенству $\{\mathcal{N}, \mathcal{N}\} = 0$.

Аналогичным образом можно рассмотреть накрытия вида $\tau^*: \widetilde{\mathcal{L}^*\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{L}^*\mathcal{E}$ и, решая уравнение $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\mathcal{H}) = 0$, искать гамильтоновы операторы $A_{\mathcal{H}}$, соответствующие теням $\mathcal{H}$. При этом условие гамильтоновости формулируется в виде $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$.

Наконец, условие совместности $R_{\mathcal{N}}$ и $A_{\mathcal{H}}$ можно переписать как $\{\mathcal{H}, \mathcal{N}\} = 0$, где скобка рассматривается в сумме Уитни накрытий τ и τ^* .

Более подробно теория нелокальных структур Пуассона–Нийенхейса будет изложена в последующих публикациях.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Как было продемонстрировано в работах [6] и [7], чрезвычайно эффективный способ построения нелокальных операторов рекурсии и гамильтоновых структур для эволюционных уравнений основан на использовании нелокальных векторов (для ℓ^* -накрытия) или ковекторов (в случае ℓ -накрытия). В частности, этот метод по самой своей природе приводит к так называемым *слабо нелокальным операторам*.

Когда эта работа была почти закончена, М. К. Нуччи обратила наше внимание на статью [17], в которой также введены нелокальные векторы. Автор статьи [17] пользуется наличием лагранжевой структуры в ℓ^* -накрытии, хотя существование нелокальных векторов имеет более общую причину (достаточно сравнить эту конструкцию с аналогичной конструкцией для нелокальных ковекторов в ℓ -накрытии).

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке NWO-RFBR (грант № 047.017.015) и RFBR-Consortium E.I.N.S.T.E.I.N. (грант № 06-01-92060).

Список литературы

- [1] I. Vaisman, “A lecture on Poisson–Nijenhuis structures,” *Integrable Systems and Foliations (Feuillets et systèmes intégrables)* (Montpellier, 1995), Progr. Math., **145**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, 169–185.
- [2] J. V. Beltrán, J. Monterde, *Ann. Global Anal. Geom.*, **12**:1 (1994), 65–78.
- [3] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Lett. Math. Phys.*, **38**:4 (1996), 421–428.
- [4] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **53**:1 (1990), 35–81.
- [5] F. Magri, C. Morosi, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson–Nijenhuis manifolds*, Quaderno 19, University of Milan, 1984.
- [6] P. Kersten, I. Krasil’shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 273–302; [arXiv: math.DG/0304245](#).
- [7] P. H. M. Kersten, I. S. Krasil’shchik, A. M. Verbovetsky, *Acta Appl. Math.*, **90**:1–2 (2006), 143–178; [arXiv: nlin.SI/0511012](#).
- [8] I. S. Krasil’shchik, *Differential Geom. Appl.*, **2**:4 (1992), 307–350.
- [9] A. M. Vinogradov, “Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus”, Transl. Math. Monogr., **204**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [10] A. Cabras, A. M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.*, **9**:1 (1992), 75–100.
- [11] А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др., *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, Факториал-пресс, М., 2005.
- [12] P. Kersten, I. Krasil’shchik, A. Verbovetsky, *Acta Appl. Math.*, **83**:1–2 (2004), 167–173; [arXiv: math.DG/0310451](#).
- [13] I. S. Krasil’shchik, A. M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **15**:1–2 (1989), 161–209.
- [14] P. J. Olver, J. Sanders, J. P. Wang, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9** (2002), 164–172, Suppl. 1.
- [15] Н. Г. Хорькова, *Тр. МГТУ*, 1988, № 512, 105–119.
- [16] А. М. Вербовецкий, В. А. Головки, И. С. Красильщик, *Научн. вестн. МГТУГА. Сер. Математика, физика*, **91** (2007), 13–21.
- [17] N. H. Ibragimov, *J. Math. Anal. Appl.*, **333**:1 (2007), 311–328.

Поступила в редакцию 1.05.2007