Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Фернандес Нуньес, В. Гарсия Фуертес, А. М. Переломов, Явные вычисления низколежащих собственных функций для квантовой тригонометрической модели Калоджеро–Сазерленда, связанной с исключительной алгеброй E_7 , *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 283–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:24:36

© 2008 г. Х. Фернандес Нуньес*, В. Гарсиа Фуертес*,
А. М. Переломов*,[†]

ЯВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НИЗКОЛЕЖАЩИХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА, СВЯЗАННОЙ С ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ E_7

В предыдущей работе авторов были изучены характеры и ряды Клебша–Гордана для исключительной алгебры Ли E_7 на основе их связи с квантовым тригонометрическим гамильтонианом Калоджеро–Сазерленда с константой $\kappa = 1$. В данной работе мы обобщаем этот подход на случай произвольной константы связи.

Ключевые слова: интегрируемые системы, модели Калоджеро–Сазерленда, исключительные алгебры Ли, теория представлений, ортогональные полиномы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели Калоджеро–Сазерленда [1], [2], связанные с системами корней простых алгебр Ли [3]–[5], глубоко исследовались в течение последних двух десятилетий. Изначально введенные на основе чисто теоретических соображений, модели этого класса нашли тем не менее целый ряд актуальных применений в таких разных областях, как физика конденсированного состояния, суперсимметричная теория Янга–Миллса и физика черных дыр. С математической точки зрения интересная особенность квантового варианта моделей этого типа состоит в том, что их собственные энергетические функции дают естественное обобщение нескольких типов гипергеометрических функций на случай многих переменных. Для потенциала $v(q) = \kappa(\kappa - 1) \sin^{-2} q$ и при специальных значениях константы связи κ эти собственные функции связаны с некоторыми ортогональными функциональными системами, представляющими особый интерес в теории алгебр Ли и симметрических пространств: так, при $\kappa = 1$ получаются характеры неприводимых представлений

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, Oviedo, Spain

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: perelomo@dftuz.unizar.es

алгебры, а при $\kappa = 0$ возникают соответствующие мономиальные симметрические функции. Другие значения κ приводят к зональным сферическим функциям в симметрических пространствах, связанных с данной алгеброй Ли. В частности, для E_7 значение $\kappa = 1/2$ дает такие функции для симметрического пространства EV^* [5], [6]. Гамильтониан Калоджеро–Сазерленда появляется при этом как естественное унифицирующее средство для вычисления всех этих объектов.

Гамильтониан Калоджеро–Сазерленда, связанный с системой корней простой алгебры Ли, можно записать как дифференциальный оператор второго порядка, переменные которого являются характеристиками фундаментальных представлений алгебры. Как было показано в работах [7]–[9] и позднее в [10]–[16], такой подход позволяет разработать определенные систематические процедуры для решения уравнения Шредингера и определить такие важные свойства собственных функций, как рекурсионные соотношения или производящие функции для некоторых их подмножеств. Данный подход был применен к классическим алгебрам типа A_n и D_n , к исключительной алгебре E_6 , а недавно и к E_7 при специальном значении константы связи, когда собственные функции пропорциональны характеристам неприводимых представлений алгебры. Цель настоящей работы – показать, как обобщить подход работы [17] на произвольные значения константы связи и распространить некоторые из частных результатов, полученных в [17], на общий случай.

2. ГАМИЛЬТониан КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА ДЛЯ E_7 В ВЕЙЛЬ-ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тригонометрическая модель Калоджеро–Сазерленда, связанная с системой корней $\mathcal{R}$ алгебры Ли ранга r с однократными связями между корнями, является квантовой системой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$, задаваемой стандартным оператором Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r p_j^2 + \kappa(\kappa - 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \sin^{-2}(\alpha, q), \quad (1)$$

где $q = (q_j)$ – декартова система координат, $p_j = -i\partial_{q_j}$, $\mathcal{R}^+$ – множество положительных корней алгебры, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^r$, а κ – константа связи. Ненормированная волновая функция основного состояния имеет вид

$$\Psi_0^\kappa(q) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \sin^\kappa(\alpha, q), \quad (2)$$

а возбужденные состояния индексируются старшими весами $\mu = \sum m_i \lambda_i \in P^+$ (здесь P^+ – конус доминантных весов) неприводимых представлений алгебры, т.е. набором $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ из r неотрицательных целых чисел. При поиске решений $\Psi_{\mathbf{m}}^\kappa$ уравнения Шредингера в виде

$$\Psi_{\mathbf{m}}^\kappa(q) = \Psi_0^\kappa(q) \Phi_{\mathbf{m}}^\kappa(q) \quad (3)$$

мы приходим к задаче на собственные значения

$$\Delta^\kappa \Phi_{\mathbf{m}}^\kappa = \varepsilon_{\mathbf{m}}(\kappa) \Phi_{\mathbf{m}}^\kappa, \quad (4)$$

где Δ^κ – линейный дифференциальный оператор,

$$\Delta^\kappa = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \partial_{q_j}^2 - \kappa \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \text{ctg}(\alpha, q)(\alpha, \nabla_q), \quad (5)$$

а собственные значения имеют вид

$$\varepsilon_{\mathbf{m}}(\kappa) = 2(\mu, \mu + 2\kappa\rho), \quad (6)$$

где ρ – вектор Вейля, $\rho = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \alpha/2$.

В силу вейлевской симметрии гамильтониана при решении задачи (4) на собственные значения удобно выразить оператор Δ^κ в терминах набора независимых вейль-инвариантных (далее W -инвариантных) переменных $z_k = \chi_{l_k}(q)$ – характеров неприводимых представлений алгебры. Оператор Δ^κ в терминах переменных z имеет вид

$$\Delta^\kappa = \sum_{j,k} a_{jk}(z) \partial_{z_j} \partial_{z_k} + \sum_j [b_j^0(z) + \kappa b_j^1(z)] \partial_{z_j}, \quad (7)$$

однако нахождение его коэффициентов путем непосредственной замены переменных исключительно громоздко. Как объяснялось в [17], существует иная процедура, основанная на вычислении квадратичного ряда Клебша–Гордана и характеров второго порядка алгебры E_7 . В указанной работе мы применили эту процедуру для вычисления $a_{jk}(z)$ и $b_j^0(z) + b_j^1(z)$, тем самым найдя оператор Δ^κ в специальном случае $\kappa = 1$. Полагая, что это будет полезно читателю, воспроизведем здесь список коэффициентов $a_{jk}(z)$:

$$\begin{aligned} a_{11}(z) &= 4(-19 - 10z_1 + z_1^2 - z_3 - 5z_6), \\ a_{12}(z) &= 2(-7z_2 + 2z_1z_2 - 5z_5 - 19z_7 - 13z_1z_7), \\ a_{13}(z) &= 2(10 - 14z_1 - 19z_1^2 + 13z_3 + 3z_1z_3 - 3z_4 - 4z_6 - 9z_1z_6 - 6z_2z_7 + 9z_7^2), \\ a_{14}(z) &= 2(-10 - 2z_1 + 18z_1^2 - 7z_2^2 - 24z_3 - 6z_1z_3 + 14z_4 + 4z_1z_4 - 4z_2z_5 + \\ &\quad + 8z_6 + 12z_1z_6 - 4z_3z_6 + 4z_6^2 - 14z_2z_7 - 5z_1z_2z_7 - 9z_5z_7 - 9z_7^2 + 9z_1z_7^2), \\ a_{15}(z) &= 2(-12z_2 - 6z_1z_2 + 8z_5 + 3z_1z_5 - 5z_2z_6 + 19z_7 + 5z_1z_7 - 5z_3z_7 - 13z_6z_7), \\ a_{16}(z) &= 4(9 - 3z_1 - 3z_3 + 2z_6 + z_1z_6 - 3z_2z_7 - 9z_7^2), \\ a_{17}(z) &= 2(-7z_2 - 19z_7 + z_1z_7), \\ a_{22}(z) &= -40 + 24z_1 - 36z_1^2 + 7z_2^2 + 24z_3 - 4z_4 + 44z_6 - 16z_1z_6 - 12z_2z_7 - 36z_7^2, \\ a_{23}(z) &= 2(9z_2 - 14z_1z_2 + 4z_2z_3 + 16z_5 - 4z_1z_5 - 5z_2z_6 + \\ &\quad + 4z_1z_7 - 12z_1^2z_7 + 7z_3z_7 - z_6z_7), \\ a_{24}(z) &= 2(-7z_2 - 4z_1z_2 - 6z_1^2z_2 - z_2z_3 + 6z_2z_4 + 20z_5 - 6z_1z_5 - 3z_3z_5 + \\ &\quad + 14z_2z_6 - 4z_1z_2z_6 - 5z_5z_6 - 10z_1z_7 + 22z_1^2z_7 - 6z_2^2z_7 - \\ &\quad - 12z_3z_7 - 5z_1z_3z_7 + 12z_4z_7 - 10z_6z_7 + 13z_1z_6z_7 - 9z_2z_7^2), \\ a_{25}(z) &= 40 - 24z_1 + 12z_1^2 - 14z_2^2 + 12z_3 - 12z_1z_3 + 28z_4 + 9z_2z_5 + 16z_6 - 12z_1z_6 - \\ &\quad - 8z_3z_6 - 24z_6^2 + 12z_2z_7 - 10z_1z_2z_7 + 14z_5z_7 - 2z_7^2 - 2z_1z_7^2, \end{aligned}$$

$$a_{26}(z) = 2(17z_2 - 6z_1z_2 + 8z_5 + 3z_2z_6 - 24z_1z_7 - 5z_3z_7 - 13z_6z_7),$$

$$a_{27}(z) = -48z_1 - 12z_3 - 28z_6 + 3z_2z_7,$$

$$a_{33}(z) = 4(-20 + 16z_1 - 5z_1^2 - 9z_1^3 + 8z_3 + 12z_1z_3 + 3z_3^2 - 7z_4 - \\ - z_1z_4 - 2z_2z_5 - 9z_6 - 3z_1z_6 - 4z_1^2z_6 + 2z_3z_6 - 3z_6^2 + \\ + 6z_2z_7 - 6z_1z_2z_7 + 8z_5z_7 + z_7^2 + 7z_1z_7^2),$$

$$a_{34}(z) = 2(-20 - 12z_1 - 6z_1^2 + 6z_1^3 + 9z_2^2 - 7z_1z_2^2 + 20z_3 + 6z_1z_3 - 6z_1^2z_3 + \\ + 6z_3^2 - 26z_4 + 6z_1z_4 + 8z_3z_4 + 2z_2z_5 - 3z_1z_2z_5 - 5z_5^2 - 2z_6 - 32z_1z_6 + \\ + 20z_1^2z_6 - 5z_2^2z_6 - 24z_3z_6 - 4z_1z_3z_6 + 10z_4z_6 + 4z_6^2 + 4z_1z_6^2 - \\ - 3z_2z_7 - 2z_1z_2z_7 - 5z_1^2z_2z_7 - z_2z_3z_7 + 15z_5z_7 + \\ + 4z_2z_6z_7 + 20z_7^2 - 5z_1z_7^2 + 5z_1^2z_7^2 + 9z_3z_7^2 - 9z_6z_7^2),$$

$$a_{35}(z) = 2(-z_2 + z_1z_2 - 6z_1^2z_2 - z_2z_3 - 22z_5 + 15z_1z_5 + 6z_3z_5 - \\ - 15z_2z_6 - 4z_1z_2z_6 - 5z_5z_6 + 18z_7 - 5z_1z_7 + 11z_1^2z_7 - 6z_2^2z_7 - 6z_3z_7 - \\ - 5z_1z_3z_7 + 12z_4z_7 + 45z_6z_7 - 8z_1z_6z_7 + 12z_2z_7^2 - 18z_7^3),$$

$$a_{36}(z) = 2(20 + 6z_1^2 - 7z_2^2 - 18z_3 - 6z_1z_3 + 14z_4 + 20z_6 + 6z_1z_6 + \\ + 4z_3z_6 + 6z_2z_7 - 5z_1z_2z_7 - 5z_5z_7 - z_7^2 - 13z_1z_7^2),$$

$$a_{37}(z) = 2(-7z_2 - 6z_1z_2 - 5z_5 + 19z_7 - 13z_1z_7 + 2z_3z_7),$$

$$a_{44}(z) = 4(-10 - 16z_1 + 8z_1^2 - 6z_1^4 - 4z_2^2 - 16z_3 + 24z_1^2z_3 - 4z_2^2z_3 - 12z_3^2 + \\ + 8z_4 - 16z_1z_4 - 4z_1^2z_4 + 8z_3z_4 + 6z_4^2 + 11z_2z_5 + 2z_1z_2z_5 - z_2z_3z_5 - \\ - 12z_5^2 - 2z_1z_5^2 + 4z_6 - 4z_1z_6 - 14z_1^2z_6 + 4z_1^3z_6 + 3z_2^2z_6 - 2z_1z_2^2z_6 - 4z_3z_6 - \\ - 8z_1z_3z_6 - 2z_3^2z_6 + 6z_4z_6 + 4z_1z_4z_6 - 3z_2z_5z_6 - 2z_6^2 + 4z_1z_6^2 + \\ + 4z_3z_6^2 - 2z_6^3 + z_2z_7 + z_1z_2z_7 + 9z_1^2z_2z_7 - 3z_2^3z_7 - 8z_2z_3z_7 - \\ - 3z_1z_2z_3z_7 + 9z_2z_4z_7 - 21z_5z_7 + 6z_1z_5z_7 + 4z_1^2z_5z_7 - 9z_3z_5z_7 - \\ - 6z_2z_6z_7 + 7z_1z_2z_6z_7 + 9z_5z_6z_7 - 9z_7^2 + 17z_1z_7^2 - 3z_1^2z_7^2 - \\ - 2z_1^3z_7^2 + 9z_1z_3z_7^2 - 9z_4z_7^2 + 9z_6z_7^2 - 9z_1z_6z_7^2),$$

$$a_{45}(z) = 2(9z_2 - 7z_1z_2 + 13z_1^2z_2 - 7z_2^3 - 12z_2z_3 - 7z_1z_2z_3 + 21z_2z_4 - 28z_5 - \\ - 7z_1z_5 + 7z_1^2z_5 - 13z_3z_5 + 9z_4z_5 - 3z_2z_6 + 7z_1z_2z_6 - 3z_2z_3z_6 - 19z_5z_6 - \\ - 4z_1z_5z_6 - 5z_2z_6^2 + 21z_1z_7 - 24z_1^2z_7 + 6z_1^3z_7 + 7z_2^2z_7 - 5z_1z_2^2z_7 + \\ + 14z_3z_7 - z_1z_3z_7 - 5z_3^2z_7 - 19z_4z_7 + 10z_1z_4z_7 - z_2z_5z_7 + \\ + 10z_1z_6z_7 + 4z_1^2z_6z_7 + 5z_6^2z_7 - 2z_2z_7^2 + 4z_1z_2z_7^2 + 9z_5z_7^2 - 9z_1z_7^3),$$

$$a_{46}(z) = 2(20 + 12z_1 - 18z_1^2 + 12z_1^3 + 7z_2^2 - 6z_1z_2^2 + 12z_3 - 24z_1z_3 - 6z_3^2 + 2z_4 + \\ + 12z_1z_4 - z_2z_5 + 2z_6 + 8z_1z_6 + 2z_1^2z_6 + 8z_3z_6 + 6z_4z_6 - \\ - 4z_6^2 - 6z_2z_7 - z_1z_2z_7 - 4z_2z_3z_7 - 10z_5z_7 - 4z_1z_5z_7 - 5z_2z_6z_7 - \\ - 20z_7^2 + 2z_1z_7^2 + 4z_1^2z_7^2 - 9z_3z_7^2 + 9z_6z_7^2),$$

$$a_{47}(z) = 2(-5z_2 - 6z_1z_2 - 5z_2z_3 - 19z_5 - 4z_1z_5 - 5z_2z_6 - 19z_7 + \\ + 11z_1z_7 + 5z_1^2z_7 - 10z_3z_7 + 3z_4z_7 + 9z_6z_7),$$

$$\begin{aligned}
a_{55}(z) &= -60 + 48z_1 - 12z_1^2 - 12z_1z_2^2 - 24z_3 + 24z_1z_3 - 12z_3^2 - 48z_4 + 24z_1z_4 + \\
&\quad + 12z_2z_5 + 15z_5^2 - 52z_6 + 24z_1^2z_6 - 48z_3z_6 - 4z_4z_6 - 48z_6^2 - 16z_1z_6^2 + \\
&\quad + 40z_2z_7 + 8z_1z_2z_7 - 8z_2z_3z_7 + 20z_5z_7 + 8z_1z_5z_7 - 24z_2z_6z_7 - 16z_7^2 + \\
&\quad + 4z_1z_7^2 - 12z_1^2z_7^2 + 32z_3z_7^2 + 28z_6z_7^2, \\
a_{56}(z) &= 2(7z_2 - z_1z_2 - 5z_2z_3 + 8z_5 + 5z_1z_5 - 7z_2z_6 + 5z_5z_6 - 28z_7 + 19z_1z_7 - \\
&\quad - 6z_1^2z_7 + 11z_3z_7 - 3z_4z_7 - 17z_6z_7 - 9z_1z_6z_7 - 6z_2z_7^2 + 9z_7^3), \\
a_{57}(z) &= -20 + 12z_1 - 12z_3 - 8z_4 - 48z_6 - 20z_1z_6 - 12z_2z_7 + 5z_5z_7 + 20z_7^2, \\
a_{66}(z) &= 4(-14 + 12z_1 - 6z_1^2 + 12z_3 - 2z_4 + 2z_6 + 2z_6^2 - 7z_2z_7 - z_5z_7 - 5z_7^2 - 5z_1z_7^2), \\
a_{67}(z) &= 2(-7z_2 - 3z_5 - 19z_7 - 11z_1z_7 + 2z_6z_7), \\
a_{77}(z) &= -60 - 24z_1 - 4z_6 + 3z_7^2.
\end{aligned}$$

Остается вычислить $b_j^0(z) + \kappa b_j^1(z)$. Для этого требуется некая новая информация: нам надо знать все симметрические мономы первого порядка для E_7 как функции переменных z . Чтобы получить их, мы используем разложения фундаментальных E_7 -характеров в терминах мономиальных функций, вычисленных в работе [18]. В обозначениях работы [17] эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned}
z_1 &= M_{\lambda_1} + 7, \\
z_2 &= M_{\lambda_2} + 6M_{\lambda_7}, \\
z_3 &= M_{\lambda_3} + 5M_{\lambda_6} + 22M_{\lambda_1} + 77, \\
z_4 &= M_{\lambda_4} + 4M_{\lambda_1+\lambda_6} + 15M_{\lambda_2+\lambda_7} + 15M_{2\lambda_1} + \\
&\quad + 45M_{2\lambda_7} + 50M_{\lambda_3} + 145M_{\lambda_6} + 390M_{\lambda_1} + 980, \\
z_5 &= M_{\lambda_5} + 5M_{\lambda_1+\lambda_7} + 21M_{\lambda_2} + 71M_{\lambda_7}, \\
z_6 &= M_{\lambda_6} + 6M_{\lambda_1} + 27, \\
z_7 &= M_{\lambda_7}.
\end{aligned}$$

Для обращения этих формул, имея целью вычисление фундаментальных мономиальных функций, мы должны действовать в порядке возрастания высоты доминантных весов, отвечающих характерам. Если мономиальная функция первого порядка известна, мы вычисляем соответствующие $b_k^0(z)$ и $b_k^1(z)$, следуя процедуре, описанной в работе [17]. Это позволяет на каждом шаге использовать уже известную часть оператора Δ^κ для вычисления мономиальных функций второго порядка заранее, т.е. до того как они понадобятся для получения следующей фундаментальной мономиальной функции. В рамках такого подхода легко найти

$$\begin{aligned}
M_{\lambda_1} &= z_1 - 7, \\
M_{\lambda_2} &= z_2 - 6z_7, \\
M_{\lambda_3} &= z_3 - 5z_6 + 8z_1 + 2, \\
M_{\lambda_4} &= z_4 - 4z_1z_6 + 9z_2z_7 + 9z_1^2 + 9z_7^2 - 14z_3 - 39z_6 - 22z_1 - 18, \\
M_{\lambda_5} &= z_5 - 5z_1z_7 + 14z_2 + 15z_7,
\end{aligned}$$

$$M_{\lambda_6} = z_6 - 6z_1 + 15,$$

$$M_{\lambda_7} = z_7,$$

а потому

$$b_1^0(z) + \kappa b_1^1(z) = -28 + 4z_1 + \kappa(28 + 68z_1),$$

$$b_2^0(z) + \kappa b_2^1(z) = 7z_2 - 24z_7 + \kappa(98z_2 + 24z_7),$$

$$b_3^0(z) + \kappa b_3^1(z) = 8 - 56z_1 + 12z_3 - 20z_6 + \kappa(-8 + 56z_1 + 132z_3 + 20z_6),$$

$$b_4^0(z) + \kappa b_4^1(z) = -72 + 72z_1 - 24z_1^2 + 24z_3 + 24z_4 - 16z_6 - 16z_1z_6 - \\ - 24z_2z_7 + 36z_7^2 + \kappa(72 - 72z_1 + 24z_1^2 - 24z_3 + \\ + 192z_4 + 16z_6 + 16z_1z_6 + 24z_2z_7 - 36z_7^2),$$

$$b_5^0(z) + \kappa b_5^1(z) = -28z_2 + 15z_5 - 4z_7 - 20z_1z_7 + \kappa(28z_2 + 150z_5 + 4z_7 + 20z_1z_7),$$

$$b_6^0(z) + \kappa b_6^1(z) = -48 - 24z_1 + 8z_6 + \kappa(48 + 24z_1 + 104z_6),$$

$$b_7^0(z) + \kappa b_7^1(z) = 3z_7 + 54\kappa z_7.$$

Этим завершается вычисление Δ^κ . В оставшейся части работы мы представим некоторые результаты, полученные с использованием этого оператора.

3. НЕСКОЛЬКО ЯВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ О НИЗКОЛЕЖАЩИХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ СИСТЕМ

В этом разделе мы приведем некоторые результаты о многочленах первого и второго порядков и обобщенных квадратичных рядах Клебша–Гордана. Так как некоторые формулы слишком длинные, мы отсылаем заинтересованного читателя к работе [19], где приведены полные результаты.

3.1. Мономиальные симметрические функции второго порядка. Коль скоро мы знаем оператор Δ^κ , можно вычислить его собственные функции с помощью итерационных алгоритмов, приведенных в работе [17]. В частности, можно получить мономиальные симметрические функции для E_7 , просто полагая $\kappa = 0$ в этих алгоритмах. Мы приведем здесь некоторые простейшие мономиальные функции второго порядка, полученные таким способом. Используем обозначение $M_{n_1 \dots n_7} = M_{\sum_{j=1}^7 n_j \lambda_j}$. Тогда

$$M_{20000000} = z_1^2 - 2z_3 - 2z_1 - 7,$$

$$M_{11000000} = z_1z_2 - 5z_5 + 3z_1z_7 - 23z_7,$$

$$M_{02000000} = z_2^2 - 2z_4 - 2z_2z_7 - 2z_1^2 - 6z_7^2 + 4z_3 + 14z_6 + 4z_1 + 12,$$

$$M_{10100000} = z_1z_3 - 3z_4 - z_1z_6 + 6z_2z_7 - 3z_1^2 - 9z_7^2 - 9z_3 + 4z_6 + 20z_1 + 32,$$

$$M_{01100000} = z_2z_3 - 4z_1z_5 + 5z_2z_6 + 4z_1^2z_7 - 4z_3z_7 - 17z_1z_2 - \\ - 16z_6z_7 + 41z_5 + 13z_1z_7 + 12z_2 + 7z_7,$$

$$M_{00000020} = z_6^2 - 2z_5z_7 + 2z_4 - 6z_1^2 - 2z_7^2 + 12z_3 + 4z_6 + 12z_1 + 17,$$

$$M_{10000001} = z_1z_7 - 7z_2 + 8z_7,$$

$$M_{0100001} = z_2 z_7 - 6z_3 - 6z_7^2 + 14z_6 + 16z_1 - 28,$$

$$M_{0010001} = z_3 z_7 - 5z_6 z_7 - 6z_1 z_2 + 20z_5 + 24z_1 z_7 - 49z_2 - 12z_7,$$

$$M_{0000101} = z_5 z_7 - 4z_4 - 5z_1 z_7^2 + 8z_1 z_6 + 11z_2 z_7 + 12z_1^2 - 3z_7^2 - 42z_3 - 18z_6 - 4,$$

$$M_{0000011} = z_6 z_7 - 3z_5 - z_1 z_7 + 7z_2 - 11z_7,$$

$$M_{0000002} = z_7^2 - 2z_6 - 2.$$

3.2. Разложение характеров второго порядка по мономиальным функциям. Как можно заключить уже из названия, ортогональная система мономиальных симметрических функций является простейшей среди различных систем симметрических многочленов, связанных с алгеброй Ли E_7 : каждая мономиальная симметричная функция является не чем иным, как суммой всех мономов, связанных с одной орбитой группы Вейля на решетке весов. Теперь легко разложить другие многочлены, связанные с системой корней E_7 , по базису мономиальных симметрических функций. На самом деле, метод совпадает с тем, который мы описали в работе [17] для вычисления рядов Клебша–Гордана. В частности, коэффициенты в разложении характеров по мономиальным симметрическим функциям интересны тем, что они дают кратности весов в соответствующих неприводимых представлениях. В качестве примера приведем такое разложение для нескольких характеров второго порядка:

$$\chi_{2000000} = M_{2000000} + M_{0010000} + 4M_{0000010} + 17M_{1000000} + 63M_{0000000},$$

$$\chi_{1100000} = M_{1100000} + 4M_{0000100} + 16M_{1000001} + 56M_{0100000} + 171M_{0000001},$$

$$\begin{aligned} \chi_{0200000} = & M_{0200000} + M_{0001000} + 3M_{1000010} + 11M_{0100001} + 10M_{2000000} + \\ & + 36M_{0000002} + 34M_{0010000} + 96M_{0000010} + \\ & + 248M_{1000000} + 603M_{0000000}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{1010000} = & M_{1010000} + 2M_{0001000} + 8M_{1000010} + 24M_{0100001} + 32M_{2000000} + \\ & + 64M_{0000002} + 78M_{0010000} + 208M_{0000010} + \\ & + 544M_{1000000} + 1344M_{0000000}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{0110000} = & M_{0110000} + 3M_{1000100} + 10M_{0100010} + 10M_{2000001} + 30M_{0010001} + \\ & + 90M_{1100000} + 80M_{0000011} + 231M_{0000100} + 570M_{1000001} + \\ & + 1344M_{0100000} + 3024M_{0000001}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{0000101} = & M_{0000101} + 3M_{0001000} + 5M_{1000002} + 13M_{1000010} + 45M_{0100001} + \\ & + 39M_{2000000} + 135M_{0000002} + 129M_{0010000} + \\ & + 351M_{0000010} + 879M_{1000000} + 2079M_{0000000}, \end{aligned}$$

$$\chi_{0000011} = M_{0000011} + 2M_{0000100} + 10M_{1000001} + 35M_{0100000} + 111M_{0000001},$$

$$\chi_{0000002} = M_{0000002} + M_{0000010} + 5M_{1000000} + 21M_{0000000}.$$

3.3. Некоторые многочлены первого и второго порядков. Итерационные методы, изложенные в [17], позволяют решить уравнение (4) на собственные значения при произвольных κ . Собственные функции являются многочленами. Здесь мы

приведем некоторые из этих многочленов первого и второго порядков. Как было замечено выше, после умножения на Ψ_0^κ эти многочлены дают волновые функции исходной квантово-механической задачи

$$H\Psi_{\mathbf{m}}^\kappa = E_{\mathbf{m}}(\kappa)\Psi_{\mathbf{m}}^\kappa \quad (8)$$

с гамильтонианом (1) и уровнями энергии, заданными как $E_{\mathbf{m}}(\kappa) = 2(\mu + \kappa\rho, \mu + \kappa\rho)$ (см. подробности в [17]). Для выражения волновых функций в терминах переменных q (координат частиц) следует помнить, что $z_k = \sum_{\lambda} e^{2i(\lambda, q)}$, где суммирование идет по весам λ неприводимых представлений, связанных с характером z_k . Если волновые функции известны, можно обратиться к таким стандартным квантово-динамическим задачам, как вычисление ожидаемого значения координат и импульсов или построенных из них наблюдаемых, амплитуд перехода между уровнями энергии при малых возмущениях гамильтониана и др.

Многочлены первого и второго порядков имеют вид

$$\begin{aligned} P_{1000000}^\kappa(z) &= z_1 + \frac{7(-1 + \kappa)}{1 + 17\kappa}, \\ P_{0100000}^\kappa(z) &= z_2 + \frac{6(-1 + \kappa)z_7}{1 + 11\kappa}, \\ P_{0010000}^\kappa(z) &= z_3 + \frac{5(-1 + \kappa)z_6}{1 + 7\kappa} + \frac{8(-1 + \kappa)(-1 + 8\kappa)z_1}{(1 + 7\kappa)(1 + 8\kappa)} + \\ &\quad + \frac{2(-1 + \kappa)(-1 - 159\kappa + 136\kappa^2)}{(1 + 7\kappa)(1 + 8\kappa)(1 + 11\kappa)}, \\ P_{0000100}^\kappa(z) &= z_5 + \frac{5(-1 + \kappa)z_1z_7}{1 + 7\kappa} + \frac{7(-1 + \kappa)(-4 + 7\kappa)z_2}{(1 + 7\kappa)(2 + 13\kappa)} + \\ &\quad + \frac{5(-1 + \kappa)(-6 - 137\kappa + 56\kappa^2)z_7}{(1 + 7\kappa)(1 + 8\kappa)(2 + 13\kappa)}, \\ P_{0000010}^\kappa(z) &= z_6 + \frac{6(-1 + \kappa)z_1}{1 + 9\kappa} + \frac{15(-1 + \kappa)(-1 + 5\kappa)}{(1 + 9\kappa)(1 + 13\kappa)}, \\ P_{0000001}^\kappa(z) &= z_7, \\ P_{2000000}^\kappa(z) &= z_1^2 + \frac{-2z_3}{1 + \kappa} + \frac{-10\kappa z_6}{(1 + \kappa)(1 + 4\kappa)} + \frac{2(-3 - 6\kappa - 119\kappa^2 + 28\kappa^3)z_1}{(1 + \kappa)(1 + 4\kappa)(3 + 17\kappa)} + \\ &\quad + \frac{-42 - 459\kappa - 290\kappa^2 - 3205\kappa^3 + 196\kappa^4}{(1 + \kappa)(1 + 4\kappa)(2 + 17\kappa)(3 + 17\kappa)}, \\ P_{1100000}^\kappa(z) &= z_1z_2 + \frac{-5z_5}{1 + 4\kappa} + \frac{(6 - 95\kappa + 24\kappa^2)z_1z_7}{(1 + 4\kappa)(2 + 11\kappa)} + \frac{28(-1 + \kappa)\kappa(-26 + 11\kappa)z_2}{(1 + 4\kappa)(2 + 11\kappa)(3 + 17\kappa)} + \\ &\quad + \frac{(-1 + \kappa)(138 + 365\kappa - 9979\kappa^2 + 1176\kappa^3)z_7}{(1 + 4\kappa)(1 + 7\kappa)(2 + 11\kappa)(3 + 17\kappa)}, \\ P_{1000001}^\kappa(z) &= z_1z_7 + \frac{-7z_2}{1 + 6\kappa} + \frac{(16 - 191\kappa + 42\kappa^2)z_7}{(1 + 6\kappa)(2 + 17\kappa)}, \\ P_{0000011}^\kappa(z) &= z_6z_7 + \frac{-3z_5}{1 + 2\kappa} + \frac{(-2 - 43\kappa + 12\kappa^2)z_1z_7}{(1 + 2\kappa)(2 + 9\kappa)} + \frac{-7(-1 + \kappa)(2 + 19\kappa)z_2}{(1 + 2\kappa)(1 + 5\kappa)(2 + 9\kappa)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2(-1 + \kappa)(22 - 2\kappa - 1052\kappa^2 + 375\kappa^3)z_7}{(1 + 2\kappa)(1 + 5\kappa)(2 + 9\kappa)(2 + 13\kappa)},$$

$$P_{0000002}^\kappa(z) = z_7^2 + \frac{-2z_6}{1 + \kappa} + \frac{-12\kappa z_1}{(1 + \kappa)(1 + 5\kappa)} + \frac{-2(1 + 59\kappa^2)}{(1 + \kappa)(1 + 5\kappa)(1 + 9\kappa)}.$$

3.4. Обобщенный квадратичный ряд Клебша–Гордана. Для произвольного κ произведение многочленов можно разложить в линейную комбинацию многочленов при том же κ . В это разложение входят ровно те члены, которые входят в произведение характеров, т.е. в соответствующий ряд Клебша–Гордана, а коэффициенты являются рациональными функциями κ . Метод вычисления этих коэффициентов был изложен в работе [17]. Мы приведем здесь некоторые из квадратичных рядов Клебша–Гордана при общих значениях κ .

Разумеется, результаты этого раздела не зависят от переменных, используемых для записи многочленов. Тем не менее W -инвариантность задачи является важным обстоятельством, а потому наш выбор переменных z вполне естественен. Заметим, что в этих переменных гамильтониан есть дифференциальный оператор, коэффициенты которого являются многочленами, тогда как другой выбор переменных приводит к рациональным функциям, в последнем случае анализ значительно проще. Однако W -инвариантность является ключевым фактором. Можно было бы использовать и другие наборы переменных, также обладающие этой инвариантностью, например, мономиальные симметрические функции.

Интерес к приведенным здесь результатам является двояким. Во-первых, с чисто математической точки зрения они задают деформацию ряда Клебша–Гордана для E_7 в зависимости от параметра κ . Во-вторых, они могли бы быть полезны и при исследовании ряда физических задач. Например, в нашей работе [13] представлен пертурбативный подход к эллиптической системе Калоджеро–Сазерленда, связанной с алгеброй A наинизшего ранга, в которой использование рекурсионных соотношений такого типа играет определяющую роль.

Итак, мы имеем

$$P_{1000000}^\kappa \times P_{1000000}^\kappa = P_{2000000}^\kappa + \frac{2}{1 + \kappa} P_{0010000}^\kappa + \frac{10(1 + 3\kappa)}{(1 + 4\kappa)(1 + 7\kappa)} P_{0000010}^\kappa +$$

$$+ \frac{24(4 + 103\kappa + 547\kappa^2 + 696\kappa^3)}{(1 + 8\kappa)(1 + 9\kappa)(1 + 17\kappa)(3 + 17\kappa)} P_{1000000}^\kappa +$$

$$+ \frac{252(1 + 3\kappa)(1 + 5\kappa)(1 + 8\kappa)(1 + 18\kappa)}{(1 + 11\kappa)(1 + 13\kappa)(1 + 17\kappa)^2(2 + 17\kappa)},$$

$$P_{1000000}^\kappa \times P_{0100000}^\kappa = P_{1100000}^\kappa + \frac{5}{1 + 4\kappa} P_{0000100}^\kappa +$$

$$+ \frac{32(1 + 2\kappa)(1 + 12\kappa)}{(1 + 7\kappa)(1 + 11\kappa)(2 + 11\kappa)} P_{1000001}^\kappa +$$

$$+ \frac{42(1 + 3\kappa)(1 + 14\kappa)(5 + 101\kappa + 74\kappa^2)}{(1 + 6\kappa)(1 + 11\kappa)(2 + 13\kappa)(1 + 17\kappa)(3 + 17\kappa)} P_{0100000}^\kappa +$$

$$+ \frac{144(1 + 2\kappa)(1 + 3\kappa)(1 + 5\kappa)(1 + 18\kappa)}{(1 + 7\kappa)(1 + 8\kappa)(1 + 11\kappa)^2(2 + 17\kappa)} P_{0000001}^\kappa,$$

$$\begin{aligned}
P_{1000000}^{\kappa} \times P_{0000001}^{\kappa} &= P_{1000001}^{\kappa} + \frac{7}{1+6\kappa} P_{0100000}^{\kappa} + \\
&\quad + \frac{54(1+3\kappa)(1+18\kappa)}{(1+11\kappa)(1+17\kappa)(2+17\kappa)} P_{0000001}^{\kappa}, \\
P_{0100000}^{\kappa} \times P_{0000001}^{\kappa} &= P_{0100001}^{\kappa} + \frac{6}{1+5\kappa} P_{0010000}^{\kappa} + \\
&\quad + \frac{16(1+2\kappa)(1+13\kappa)}{(1+6\kappa)(1+7\kappa)(1+11\kappa)} P_{0000010}^{\kappa} + \\
&\quad + \frac{32(1+2\kappa)(1+4\kappa)(1+17\kappa)}{(1+7\kappa)(1+8\kappa)(1+9\kappa)(1+11\kappa)} P_{1000000}^{\kappa}, \\
P_{0000001}^{\kappa} \times P_{0000001}^{\kappa} &= P_{0000002}^{\kappa} + \frac{2}{1+\kappa} P_{0000010}^{\kappa} + \frac{12(1+4\kappa)}{(1+5\kappa)(1+9\kappa)} P_{1000000}^{\kappa} + \\
&\quad + \frac{56(1+4\kappa)(1+8\kappa)}{(1+9\kappa)(1+13\kappa)(1+17\kappa)}.
\end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ЗАМЕЧАНИЯ

Мы получили некоторые явные результаты для системы Калоджеро–Сазерленда, которая связана с исключительной алгеброй Ли E_7 . Ключевым моментом наших рассуждений было вычисление гамильтониана в терминах характеров фундаментальных представлений. Для этого вычисления мы использовали нашу предыдущую работу [17] и разложение переменных z в терминах мономиальных симметрических функций. Когда гамильтониан известен, открывается широкое поле приложений. Мы привели два: некоторые многочлены первого и второго порядка и некоторые обобщенные квадратичные ряды Клебша–Гордана.

Мы полагаем, что представленное в данной статье направление исследований подтверждает полезность нашего подхода для получения явных результатов о системах Калоджеро–Сазерленда в духе предыдущих статей [7], [16], [17].

Благодарности. Работа была частично поддержана со стороны испанского Ministerio de Educación y Ciencia (гранты MTM2006-10531 (Х. Фернандес Нуньес) и FIS2006-09417 (В. Гарсиа Фуертес и А. М. Переломов)). Статья была закончена во время визита А. М. Переломова в Институт гравитационной физики Макса Планка; автор благодарит научное руководство этого института за поддержку.

Список литературы

- [1] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **12** (1971), 419–436.
- [2] B. Sutherland, *Phys. Rev. A*, **4** (1972), 2019–2021.
- [3] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Lett. Math. Phys.*, **2** (1977), 7–13.
- [4] М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, *Функц. анализ и его прилож.*, **12:2** (1978), 57–65.
- [5] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **94** (1983), 313–404.
- [6] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978; *Groups and Geometric Analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, 1984.

- [7] A. M. Perelomov, *J. Phys. A*, **31** (1998), L31–L37.
- [8] A. M. Perelomov, E. Ragoucy, Ph. Zaugg, *J. Phys. A*, **31** (1998), L559–L565.
- [9] A. M. Perelomov, *J. Phys. A*, **32** (1999), 8563–8576.
- [10] A. M. Perelomov, “Quantum integrable systems and special functions”, *Lie Theory and Its Applications in Physics. III* (Clausthal, Germany, 1999), World Sci. Publ., Singapore, 2000, 139–154; [arXiv:math-ph/0111021](#).
- [11] W. García Fuertes, M. Lorente, A. M. Perelomov, *J. Phys. A*, **34** (2001), 10963–10973.
- [12] В. Гарсия Фуертес, А.М. Переломов, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 194–196; [arXiv:math-ph/0201026](#).
- [13] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *Phys. Lett. A*, **307** (2003), 233–238.
- [14] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 4957–4974.
- [15] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12**:1-suppl. (2005), 280–301.
- [16] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 073508.
- [17] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 103505.
- [18] I. Loris, R. Sasaki, *J. Phys. A*, **37** (2004), 211–237.
- [19] J. Fernández Núñez, W. García Fuertes, A. M. Perelomov, *Explicit computations of low lying eigenfunctions for the quantum trigonometric Calogero–Sutherland model related to the exceptional algebra E_7* , [arXiv:math-ph/0604062](#).

Поступила в редакцию 18.03.2007,
после доработки 13.04.2007