Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кордюкова, Иерархия Кортвега–де Фриза как асимптотический предел системы Буссинеска, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 294–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:48:07

© 2008 г.

С. А. Кордюкова*

ИЕРАРХИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА КАК АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ СИСТЕМЫ БУССИНЕСКА

Для модели поверхностных волн проводится асимптотический анализ по малому параметру ε на далеких временах, где требуется учитывать поправки к приближению, описываемому уравнением Кортевега–де Фриза. Обнаружено появление иерархии Кортевега–де Фриза, которая обеспечивает построение асимптотики вплоть до времен $t \approx \varepsilon^{-2}$, где приближение Кортевега–де Фриза становится непригодным.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, потенцированное уравнение Кортевега–де Фриза, канонический оператор Ли–Беклунда, метод многих масштабов, асимптотика, солитон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотические методы дают эффективные способы анализа сложных нелинейных систем, в частности моделей поверхностных волн. Применение этих методов основано на наличии малого параметра в исходных уравнениях. В модели длинных волн на мелкой воде в качестве малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$ выступает квадрат отношения вертикального масштаба к горизонтальному [1]. В таком случае исходные уравнения для плоского одномерного движения жидкости записываются в виде

$$\phi_{xx} + \varepsilon^{-1} \phi_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h(x, t); \quad (1)$$

$$h_t + h_x \phi_x - \varepsilon^{-1} \phi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = h(t, x); \quad (2)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \phi_y^2 + gh = 0 \quad \text{при} \quad y = h(t, x). \quad (3)$$

Здесь $\phi(x, y, t)$ – потенциал скорости, свободная поверхность задается уравнением $y = h(x, t)$. Глубина невозмущенной жидкости $h_0 = \text{const}$. Уравнения дополняются условием непротекания $\phi_y = 0$ на горизонтальном дне при $y = 0$. Для степеней производных всюду ниже используются обозначения типа $\phi_x^2 = (\phi_x)^2$, $\phi_{xx}^2 = (\phi_{xx})^2$ и т.д.

---

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия.
E-mail: sveta.kor05@mail.ru

Идеи асимптотического анализа позволяют упростить исходные сложные уравнения до приемлемого уровня. Известно, что в нулевом (главном) порядке по ε система (1)–(3) сводится к волновому уравнению, решение которого дает пару простых плоских волн. Такое приближение пригодно на не слишком больших временах: $|t| \ll \varepsilon^{-1}$. В более точной модели возникает уравнение Буссинеска четвертого порядка [1], [2]. Формально оно представляет собой возмущение волнового уравнения. Уравнение Буссинеска асимптотически можно редуцировать к паре уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ), решения которых описывают медленную деформацию плоских волн в масштабе $\tau_1 = \varepsilon t$. Такие приближения пригодны на довольно больших временах: $|t| \ll \varepsilon^{-2}$ [1]–[3].

Чтобы получить приближение, пригодное на следующем масштабе времени $\tau_2 = \varepsilon^2 t$, необходимо учитывать поправки более высокого порядка в уравнении Буссинеска. Именно эта проблема рассматривается в данной работе. Похожие задачи неоднократно исследовались в теории возмущения солитонов [4]. Однако возмущения, которые возникают из уравнений поверхностных волн в случае ровного дна, оказываются весьма специфическими. Эта специфика приводит к тому, что возмущение солитона КдФ проявляется лишь в медленном, линейном по времени сдвиге фазы без изменения амплитуды. Фактически в этом состоит один из результатов данной работы. Но наиболее важным результатом является получение для главных членов асимптотики системы уравнений, состоящей из уравнений КдФ-иерархии (потенцированных).

Асимптотические решения уравнения Буссинеска, полученные в этой работе, основаны на преобразованиях Ли–Беклунда потенцированного уравнения КдФ. Такой подход отличается от известных подходов в теории возмущения солитонов [4] и представляется перспективным для анализа решений, отличных от односолитонных. Данная работа является развитием идей, изложенных в работах [5].

2. РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН К УРАВНЕНИЮ БУССИНЕСКА

Первый этап построения асимптотического решения состоит в переходе от задачи (1)–(3) с двумя пространственными переменными (x, y) к уравнению с одной пространственной переменной x . С этой целью для потенциала как решения уравнения (1) с малым параметром ε используется асимптотическое представление через новую неизвестную функцию двух переменных $A(x, t, \varepsilon)$ (см. [1]):

$$\phi(x, y, t, \varepsilon) = A(x, t, \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n} A, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

В таком случае уравнения на поверхности (2), (3) можно записать в асимптотической форме с любым порядком точности (по ε). Используя разложение (4) до порядка ε^2 ,

преобразуем уравнения (2), (3) к виду

$$\begin{aligned} h_t + h_x A_x + A_{xx} h - \frac{\varepsilon}{2} h^2 \left(A_{xxx} h_x + \frac{1}{3} A_{xxxx} h \right) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{4!} h^4 \left(A_{xxxx} h_x + \frac{1}{5} A_{xxxxx} h \right) = O(\varepsilon^3), \\ A_t + \frac{1}{2} A_x^2 + gh - \frac{\varepsilon}{2} h^2 (A_{xt} + A_x A_{xx} - A_{xx}^2) + \\ + \varepsilon^2 h^4 \left(\frac{1}{4!} A_{xxxxt} + \frac{1}{8} A_{xxx}^2 - \frac{1}{6} A_{xx} A_{xxxx} \right) = O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что функцию $A(x, t, \varepsilon)$ можно связать со значением потенциала ϕ на поверхности $y = h$, обратив асимптотически равенство (4):

$$A(x, t, \varepsilon) = \left[\phi + \frac{\varepsilon}{2} h^2 \phi_{xx} + \frac{5\varepsilon^2}{4!} h^4 \phi_{xxxx} + \dots \right]_{y=h(x, t, \varepsilon)}. \quad (6)$$

Помимо того, для дальнейшего анализа удобно выделить главные члены асимптотики, используя формулы

$$h = h_0 + \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon), \quad \phi = -gh_0 t + \varepsilon \psi(x, t, \varepsilon) \quad \text{при} \quad y = h(x, t, \varepsilon). \quad (7)$$

Если подставить (6), (7) в соотношения (5), то для функций η , $\psi(x, t, \varepsilon)$ получается система уравнений в асимптотической форме, которая в главных порядках имеет вид

$$\eta_t + h_0 \psi_{xx} + \varepsilon \left((\psi_x \eta)_x + \frac{1}{3} h_0^3 \psi_{xxx} \right) + \varepsilon^2 \left(h_0^2 (\psi_{xx} \eta)_{xx} + \frac{16}{5!} h_0^5 \psi_{xxxxx} \right) = O(\varepsilon^3), \quad (8)$$

$$\psi_t + g\eta + \frac{\varepsilon}{2} \psi_x^2 + \varepsilon^2 \left(h_0 \eta_t \psi_{xx} + \frac{h_0^2}{2} \psi_{xx}^2 \right) = O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

Полученные уравнения (8), (9) принято называть системой Буссинеска [1], [2]. Их можно преобразовать к одному уравнению с точностью до $O(\varepsilon^3)$. Для этого достаточно выразить η из уравнения (9) и подставить в уравнение (8), при этом получим следующее уравнение Буссинеска:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \psi_{tt} + h_0 \psi_{xx} + \frac{\varepsilon}{g} \left(\frac{1}{3} h_0^3 g \psi_{xxxx} - 2\psi_x \psi_{tx} - \psi_t \psi_{xx} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{-h_0^2}{g} (\psi_{40} \psi_t + 2\psi_{xxx} \psi_{tx} + 2\psi_{xx} \psi_{txx}) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2g} \psi_{xx} \psi_x^2 + \frac{h_0}{g^2} (\psi_{tt} \psi_{xx})_t + \frac{2}{15} h_0^5 \psi_{xxxxx} \right) = O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее делается преобразование с целью исключения лишних констант из уравнения (10): $x = z\sqrt{h_0 g}$, $t = t$, $\psi = -h_0^2 u/9$, $\varepsilon = 2\varepsilon h_0/(3g)$. Таким образом, остается лишь один параметр ε , который считается малым: $0 < \varepsilon \ll 1$, и уравнение (10)

приводится к виду

$$u_{tt} - u_{zz} - \frac{\epsilon}{2} \left(u_{zzzz} + \frac{2}{3} u_z u_{tz} + \frac{1}{3} u_t u_{zz} \right) + \epsilon^2 \left(-(u_t u_{zz})_{zz} - u_{zz} u_{tzz} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} u_{zz} u_z^2 + (u_{zz} u_{tt})_t - \frac{6}{5} u_{zzzzzz} \right) = O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (11)$$

Уравнение Буссинеска с точностью до второго порядка по ϵ рассматривалось в работе [6], где было получено нелокальное (псевдодифференциальное) уравнение с квадратичной нелинейностью, учитывающее все члены дисперсии и влияние медленно меняющегося дна.

3. СИСТЕМА ПОТЕНЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КдФ-3 И КдФ-5: РЕШЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ АМПЛИТУДОЙ

В этом разделе указывается класс решений системы уравнений, состоящей из потенцированных уравнений КдФ-3 и КдФ-5, при помощи которых строится асимптотическое решение уравнения типа Буссинеска.

Рассмотрим систему первых двух уравнений иерархии потенцированных уравнений КдФ:

$$a_\tau = \frac{1}{2} a_x^2 + a_{xxx}, \quad (12)$$

$$a_T = \left(\frac{1}{6} a_x^3 + a_x a_{xxx} + \frac{1}{2} a_{xx}^2 + \frac{3}{5} a_{xxxxx} \right) c, \quad (13)$$

где $a = a(x, \tau, T)$ – искомая функция, а c – произвольная постоянная. Для уравнения КдФ-3 хорошо известно односолитонное решение $u = 2k^2 / \operatorname{ch}^2(k(x - vt + x_0))$, где $v = 4k^2$, при любых k , $x_0 = \text{const}$. Аналог односолитонного решения для системы (12), (13) дается выражением

$$a(x, \tau, T) = 2k \operatorname{th}(k(c_1 x + c_2 k^2 \tau + c_3 k^4 T c + c_0)), \quad (14)$$

где k , c_0 – произвольные постоянные. При подстановке решения (14) в систему (12), (13) постоянные c_1 , c_2 , c_3 вычисляются точно: $c_1 = 1/6$, $c_2 = 1/54$, $c_3 = 1/810$.

Более того, в подобной форме можно записать точное решение первых p уравнений КдФ-иерархии:

$$a(x, T_1, \dots, T_p) = 2k \operatorname{th} \left(k \left(c_1 x + \sum_{i=1}^p c_{i+1} T_i k^{2i} \right) + c_0 \right)$$

при любых k , $c_0 = \text{const}$. В данной работе используется решение (14) наиболее простого вида с $c_0 = 0$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ–БЕКЛУНДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Здесь мы приводим один из способов решения линеаризованных уравнений, которые соответствуют нелинейным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим уравнение в частных производных с параметром ε

$$F^0(t, x, u_t, u, u_x, u_{xx}, \dots) + \varepsilon F^1(t, x, u_t, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (15)$$

Пусть $u^0 = u^0(x, t)$ – точное решение уравнения

$$F^0(t, x, u_t, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (16)$$

Если функция

$$u = u^0(x, t) + \varepsilon u^1(x, t) \quad (17)$$

является формальным асимптотическим решением уравнения (15) с невязкой $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то u^1 удовлетворяет линейному уравнению, полученному в первом порядке по ε при подстановке (17) в (15). Такое уравнение будем называть линеаризацией уравнения (16) на решении u^0 или линеаризованным уравнением.

Напомним, что каноническим оператором Ли–Беклунда называется оператор вида

$$X_\eta = \eta \frac{\partial}{\partial u} + (D_x \eta) \frac{\partial}{\partial u_x} + (D_t \eta) \frac{\partial}{\partial u_t} + (D_{xx} \eta) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots, \quad (18)$$

где $\eta = \eta(t, x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$; D_x и D_t – операторы полной производной, $D_{xx} = D_x^2 = D_x(D_x)$, $D_{xxx} = D_x^3 = D_x(D_{xx})$ и т.д.

ЛЕММА. Пусть существует канонический оператор Ли–Беклунда с функцией $\eta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) \equiv \eta[u]$ такой, что действие его на F^0 определяется формулой

$$X_\eta F^0|_{F^0=0} = F^1, \quad (19)$$

где F^0 , F^1 соответствуют уравнению (15). Если u^0 – решение уравнения (16), то частное решение линеаризованного уравнения задается формулой $u^1(x, t) = \eta[u^0(x, t)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формальной групповой теории, развитой Ибрагимовым [7], каноническому оператору Ли–Беклунда X_η соответствует формальная однопараметрическая группа преобразований такая, что асимптотическое решение уравнения (15) можно представить в виде ряда

$$u = u^0 + \varepsilon \eta[u^0] + \frac{\varepsilon^2}{2!} X_\eta(\eta) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} X_\eta^{n-1}(\eta) + \dots. \quad (20)$$

В частности, функция $u^0(x, t) + \varepsilon \eta[u^0(x, t)]$ при подстановке в уравнение (15) дает невязку $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, $\eta[u^0(x, t)]$ удовлетворяет линеаризованному уравнению. Лемма доказана.

Рассмотрим частный случай уравнения (15):

$$u_t - \frac{1}{2} u_x^2 - u_{xxx} - \varepsilon \left(\frac{1}{3} c_1 u_x^3 + c_2 u_x u_{xxx} + \frac{1}{2} c_3 u_{xx}^2 + c_4 u_{xxxx} \right) = 0. \quad (21)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть u^0 – решение потенцированного уравнения КдФ-3: $u_t - u_x^2/2 - u_{xxx} = 0$, и существует оператор Ли–Беклунда X_η , для которого верна формула (19) с F_0, F_1 из уравнения (21). Тогда решение линейризованного уравнения КдФ

$$u_t - u_x^0 u_x - u_{xxx} = \frac{1}{3} c_1 (u_x^0)^3 + c_2 u_x^0 u_{xxx}^0 + \frac{1}{2} c_3 (u_{xx}^0)^2 + c_4 u_{xxxx}^0$$

вычисляется по формуле

$$u(x, t) = \eta[u^0(x, t)].$$

Подобное применение операторов Ли–Беклунда встречается в работах [8]. В частности, там были найдены операторы Ли–Беклунда для уравнения КдФ $u_t = 6uu_x + u_{xxx}$, и с их помощью построены решения линейризованного уравнения КдФ. Однако эти результаты не были связаны с задачами из теории поверхностных волн или с уравнением Буссинеска.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

ТЕОРЕМА. Уравнение Буссинеска (11) имеет асимптотическое решение

$$u(z, t; \epsilon) = 2k \operatorname{th} A + 2k \operatorname{th} B + \epsilon u_1(z, t; \epsilon) + \epsilon^2 u_2(z, t; \epsilon), \quad (22)$$

где

$$A = \frac{k(t-z)}{6} + \frac{k^3 \epsilon t}{54} - \frac{31k^5 \epsilon^2 t}{4860}, \quad B = \frac{k(t+z)}{6} + \frac{k^3 \epsilon t}{54} - \frac{31k^5 \epsilon^2 t}{4860}.$$

Функции u_1, u_2 , ограниченные равномерно по z, t , вычисляются рекуррентно. Функция (22) удовлетворяет уравнению (11) с точностью $O(\epsilon^3)$, $\epsilon \rightarrow 0$, равномерно для всех z, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно асимптотическое решение уравнения (11) в главном порядке $u = a(z+t) + b(z-t)$ с произвольными $a, b \in C^2$, которое пригодно при $|z| + |t| \ll \epsilon^{-1}$.

Для построения асимптотики, пригодной в большей области, необходимо учитывать члены порядка ϵ в уравнении (11). Асимптотическое решение в этом случае берется в виде $u = a(z+t, \tau) + b(z-t, \tau)$, $\tau = \epsilon t$, где функции a, b – решения потенцированного уравнения КдФ. Такое приближение пригодно при $|z| + |t| \ll \epsilon^{-2}$; для более далеких времен надо учитывать члены порядка ϵ^2 в уравнении Буссинеска.

Для интегрирования уравнения (11) удобно повернуть систему координат, сделав замену переменных $\xi = t - z$, $\zeta = t + z$. При этом получается уравнение

$$\begin{aligned} u_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\epsilon \left[u_\xi u_{\xi\xi} + u_\zeta u_{\zeta\zeta} - \frac{1}{3}(u_\xi u_{\zeta\zeta} + u_\zeta u_{\xi\xi}) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3}u_{\xi\zeta}(u_\xi + u_\zeta) + u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta} - 4u_{\xi\xi\zeta\zeta} + 6u_{\xi\zeta\xi\zeta} - 4u_{\xi\xi\xi\zeta} \right] + \\ + \epsilon^2 \left[2(u_{\zeta\zeta} - u_{\xi\xi})(u_{\zeta\zeta\zeta} - u_{\xi\xi\xi}) + (u_\xi + u_\zeta)(u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6}(u_\xi^2 u_{\xi\xi} + u_\zeta^2 u_{\zeta\zeta} - 2u_\xi u_\zeta(u_{\xi\xi} + u_{\zeta\zeta}) + u_\xi^2 u_{\xi\xi} + u_\xi^2 u_{\zeta\zeta}) + \\
& + \frac{6}{5}(u_{\xi\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}) \Big] = O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Это уравнение можно преобразовать к асимптотически эквивалентному, исключив смешанные производные $u_{\xi\zeta}$ из младших членов. Так как в силу уравнения (23) $u_{\xi\zeta} = O(\epsilon)$, то из (23) вытекает

$$\begin{aligned}
u_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2}\epsilon \left[u_\xi u_{\xi\xi} + u_\zeta u_{\zeta\zeta} - \frac{1}{3}(u_\xi u_{\zeta\zeta} + u_\zeta u_{\xi\xi}) + u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta} \right] + O(\epsilon^2) \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2}\epsilon \Psi + O(\epsilon^2), \quad \epsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Подставив (24) в (23) в первом и втором порядках, получаем

$$\begin{aligned}
u_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2}\epsilon \Psi - \frac{1}{6}\epsilon^2(u_\xi + u_\zeta)\Psi - \epsilon^2\Psi_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}\epsilon^2\Psi_{\xi\xi} - \epsilon^2\Psi_{\xi\xi} + \\
&+ \epsilon^2 \left[2(u_{\zeta\zeta} - u_{\xi\xi})(u_{\zeta\zeta} - u_{\xi\xi}) + (u_\xi + u_\zeta)(u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta}) - \right. \\
&- \frac{1}{6}(u_\xi^2 u_{\xi\xi} + u_\zeta^2 u_{\zeta\zeta} - 2u_\xi u_\zeta(u_{\xi\xi} + u_{\zeta\zeta}) + u_\xi^2 u_{\xi\xi} + u_\xi^2 u_{\zeta\zeta}) + \\
&+ \left. \frac{6}{5}(u_{\xi\xi\xi\xi\xi} + u_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}) \right] + O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Для построения асимптотического решения, пригодного при $|\xi| + |\zeta| \ll \epsilon^{-3}$, введем (следуя, например, книге [9]) медленные переменные двух масштабов: $\tau_1 = \epsilon(\xi + \zeta)/2$, $\tau_2 = \epsilon^2(\xi + \zeta)/2$. Если в искомом решении выделить в явной форме зависимость от дополнительных переменных $u = v(\xi, \zeta, \tau_1, \tau_2, \epsilon)$, то исходное уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned}
v_{\xi\zeta} &+ \frac{1}{2}\epsilon(v_{\tau_1\xi} + v_{\tau_1\zeta}) + \frac{1}{2}\epsilon^2(v_{\tau_2\xi} + v_{\tau_2\zeta}) + \frac{1}{4}\epsilon^2 v_{\tau_1\tau_1} = \\
&= \frac{\epsilon}{2} \left[v_\xi v_{\xi\xi} + \epsilon v_\xi v_{\tau_1\xi} + \frac{1}{2}\epsilon v_{\tau_1} v_{\xi\xi} + v_\zeta v_{\zeta\zeta} + \right. \\
&+ \epsilon v_\zeta v_{\tau_1\zeta} + \frac{1}{2}\epsilon v_{\tau_1} v_{\zeta\zeta} - \frac{1}{3}(v_\xi v_{\zeta\zeta} + \epsilon v_\xi v_{\tau_1\zeta} + \frac{\epsilon}{2} v_{\tau_1} v_{\zeta\zeta} + \\
&+ v_\zeta v_{\xi\xi} + \epsilon v_\zeta v_{\tau_1\xi} + \frac{\epsilon}{2} v_{\tau_1} v_{\xi\xi}) + v_{\xi\xi\xi\xi} + v_{\zeta\zeta\zeta\zeta} + 2\epsilon(v_{\xi\xi\xi\xi\tau_1} + \\
&+ v_{\zeta\zeta\zeta\zeta\tau_1}) \Big] - \frac{1}{6}\epsilon^2(v_\xi + v_\zeta)\Psi - \epsilon^2\Psi_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}\epsilon^2\Psi_{\xi\xi} - \epsilon^2\Psi_{\xi\xi} + \\
&+ \epsilon^2 \left[2(v_{\zeta\zeta} - v_{\xi\xi})(v_{\zeta\zeta} - v_{\xi\xi}) + (v_\xi + v_\zeta)(v_{\xi\xi\xi\xi} + v_{\zeta\zeta\zeta\zeta}) - \right. \\
&- \frac{1}{6}(v_\xi^2 v_{\xi\xi} + v_\zeta^2 v_{\zeta\zeta} - 2v_\xi v_\zeta(v_{\xi\xi} + v_{\zeta\zeta}) + v_\xi^2 v_{\xi\xi} + v_\xi^2 v_{\zeta\zeta}) + \\
&+ \left. \frac{6}{5}(v_{\xi\xi\xi\xi\xi} + v_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}) \right] + O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Асимптотическое решение строим в виде комбинации функций, зависящих от четырех переменных $(\xi, \zeta, \tau_1, \tau_2)$:

$$u = u^0(\xi, \zeta, \tau_1, \tau_2) + \epsilon u^1(\xi, \zeta, \tau_1, \tau_2) + \epsilon^2 u^2(\xi, \zeta, \tau_1, \tau_2) + O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (27)$$

Как обычно в таком подходе, зависимость от медленных переменных τ_1, τ_2 используется для исключения секулярных членов (слагаемых, неограниченно растущих по своим переменным) в поправках u^1, u^2 .

Подставив решение вида (27) в уравнение (26) и приравняв выражения при одинаковых степенях ϵ , получаем последовательность уравнений для v^0, v^1, v^2 . Зависимость от быстрых переменных ξ, ζ определяется интегрированием линейного волнового уравнения. Поскольку в главном члене получается однородное уравнение $v_{\xi\zeta}^0 = 0$, то его общее решение выражается через пару произвольных функций, каждая из которых зависит от трех переменных:

$$v^0 = a(\xi, \tau_1, \tau_2) + b(\zeta, \tau_1, \tau_2). \quad (28)$$

В следующем порядке интегрируется неоднородное уравнение. Для первой поправки получается выражение

$$v^1 = \zeta \left(\frac{1}{2} a_\xi^2 + a_{\xi\xi\xi} - a_{\tau_1} \right) + \xi \left(\frac{1}{2} b_\zeta^2 + b_{\zeta\zeta\zeta} - b_{\tau_1} \right) - \frac{1}{6} (ab_\zeta + ba_\xi) + a_1 + b_1. \quad (29)$$

Здесь функции a_1, b_1 соответствуют общему решению однородного уравнения $u_{\xi\zeta} = 0$, так что a_1 зависит от ξ, τ_1, τ_2 , а b_1 зависит от ζ, τ_1, τ_2 . В такой форме поправка v^1 содержит секулярные слагаемые – члены с множителями ξ и ζ . Требование исключения таких слагаемых приводит к хорошо известным уравнениям [3]:

$$a_{\tau_1} = \frac{1}{2} a_\xi^2 + a_{\xi\xi\xi} \quad b_{\tau_1} = \frac{1}{2} b_\zeta^2 + b_{\zeta\zeta\zeta}, \quad (30)$$

которые представляют собой два потенцированных уравнения КдФ-3 для функций a и b . При таких условиях для поправки v_1 получается выражение

$$v^1 = -\frac{1}{6} (ab_\zeta + ba_\xi) + a_1 + b_1.$$

Аналогично исключение секулярных слагаемых из второй поправки приводит к уравнениям для a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_{1\tau_1} - a_{1\xi} a_\xi - a_{1\xi\xi\xi} &= \frac{5}{3} a_\xi a_{\xi\xi\xi} + \frac{7}{12} a_{\xi\xi}^2 + \frac{19}{10} a_{\xi\xi\xi\xi} - a_{\tau_2}, \\ b_{1\tau_1} - b_{1\zeta} b_\zeta - b_{1\zeta\zeta\zeta} &= \frac{5}{3} b_\zeta b_{\zeta\zeta\zeta} + \frac{7}{12} b_{\zeta\zeta}^2 + \frac{19}{10} b_{\zeta\zeta\zeta\zeta} - b_{\tau_2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти уравнения для a_1 и b_1 представляют собой линеаризацию уравнения КдФ-3 на функциях a и b . При их выполнении вторая поправка (без секулярных членов)

имеет вид

$$v^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} a_\xi^2 b + \frac{1}{2} b_\zeta^2 a \right) + \frac{1}{12} \left(b_\zeta \int \frac{1}{2} a_\xi^2 d\xi + a_\xi \int \frac{1}{2} b_\zeta^2 d\zeta \right) + \\ + \frac{1}{36} \left(\frac{1}{2} b_{\zeta\zeta} a^2 + \frac{1}{2} a_{\xi\xi} b^2 + a_\xi \int b b_{\zeta\zeta} d\zeta + b_\zeta \int a a_{\xi\xi} d\xi \right) + \\ + \frac{13}{12} (a_{\xi\xi\xi} b + b_{\zeta\zeta\zeta} a) - \frac{23}{12} (a_\xi b_{\zeta\zeta} + b_\zeta a_{\xi\xi}) - \frac{1}{6} (a b_{1\zeta} + b a_{1\xi} + b_\zeta a_1 + a_\xi b_1). \quad (32)$$

Заметим, что вторая поправка v^2 не содержит секулярных слагаемых в силу условий (30), (31).

Таким образом, построение асимптотических решений сводится к решению уравнений (30), (31) в классе ограниченных функций. По своей постановке такая задача похожа на задачи, возникающие в теории возмущения солитонов [4]. Это сходство подчеркивается еще и тем, что здесь в качестве главного члена асимптотики выбирается аналог солитонного решения (14).

Для получения ограниченных решений a_1 , b_1 линеаризованных уравнений КдФ-3 используем зависимость главных членов a , b от второго медленного времени τ_2 . Существуют разные способы установления этой зависимости (см., например, работу [10]). Здесь указан один из таких способов, по нашему мнению, наиболее эффективный. Он основан на использовании потенцированного уравнения КдФ-5, которое можно выделить из правых частей уравнений (31), как высшей симметрии потенцированного уравнения КдФ-3. При этом системы уравнений для a и для b можно выписывать отдельно. Рассмотрим систему уравнений для a :

$$a_{\tau_1} = \frac{1}{2} a_\xi^2 + a_{\xi\xi\xi}, \quad a_{\tau_2} = \left(\frac{1}{6} a_\xi^3 + a_\xi a_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2} a_{\xi\xi}^2 + \frac{3}{5} a_{\xi\xi\xi\xi} \right) c. \quad (33)$$

Константа $c \in \mathbb{R}$ используется для того, чтобы иметь некоторый произвол в выборе решения a_1 .

Система, составленная из уравнений (33), совместна, так как представлена потенцированным уравнением КдФ-3 и его высшей симметрией – потенцированным уравнением КдФ-5 (КдФ-иерархия). Из множества решений этой системы для построения асимптотики используем решения вида (14), а именно

$$a = 2k \operatorname{th} \left(\frac{1}{6} k\xi + \frac{1}{54} \tau_1 k^3 + \frac{1}{810} \tau_2 c k^5 \right), \quad (34)$$

где c и k – произвольные постоянные. Подходящий выбор константы c будет указан ниже. Формулы для b строятся аналогично. При выбранных таким образом функциях a и b поправка v^1 будет ограниченной, если будут ограничены функции a_1 , b_1 .

Заметим, что при указанном в системе (33) выборе функции $a(\xi, \tau_1, \tau_2)$ линеаризованное уравнение (31) для a_1 приобретает вид

$$a_{1\tau_1} - a_{1\xi} a_\xi - a_{1\xi\xi\xi} = \left(\frac{5}{3} - c \right) a_\xi a_{\xi\xi\xi} - \left(\frac{1}{2} c \right) \frac{a_\xi^3}{3} + \\ + \left(\frac{7}{6} - c \right) \frac{a_{\xi\xi}^2}{2} + \left(\frac{19}{10} - \frac{3}{5} c \right) a_{\xi\xi\xi\xi}. \quad (35)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существуют такие значения константы c , при которых решение $a_1(\xi, \tau_1, \tau_2)$ уравнения (35) оказывается ограниченным равномерно для всех ξ, τ_1, τ_2 .*

Для того чтобы найти ограниченные решения уравнения (35), используем лемму. Из следствия ясно, что если существует канонический оператор Ли–Беклунда X_η , то решение линеаризованного уравнения КдФ (35) можно получить по формуле $a_1 = \eta[a]$. При этом в формуле (21) следует положить $c_1 = -c/2$, $c_2 = 5/3 - c$, $c_3 = 7/6 - c$, $c_4 = 19/10 - 3c/5$ с произвольным значением $c \in \mathbb{R}$. Отметим, что требуется найти такие η , которые дают ограниченное решение a_1 .

Предполагая, что $\eta = \eta(\xi, t, u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}) \equiv \eta[u]$ и оператор X_η удовлетворяет условию (19) для уравнения (21), приходим к следующему уравнению для η в частных производных:

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_u u_t + \eta_{u_\xi} u_{t\xi} + \eta_{u_{\xi\xi}} u_{t\xi\xi} + \eta_{u_{\xi\xi\xi}} u_{t\xi\xi\xi} - u_\xi(\eta_\xi + \eta_u u_\xi + \eta_{u_\xi} u_{\xi\xi} + \\ + \eta_{u_{\xi\xi}} u_{\xi\xi\xi} + \eta_{u_{\xi\xi\xi}} u_{\xi\xi\xi\xi}) - D_\xi^3(\eta) = c_1 u_\xi^3 + c_2 u_\xi u_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2} c_3 u_{\xi\xi}^2 + c_4 u_{\xi\xi\xi\xi}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставим в уравнение (36) выражения для u_t : $u_t = u_\xi^2/2 + u_{\xi\xi\xi}$, и всех его производных по ξ , т.е. $u_{t\xi}$, $u_{t\xi\xi}$, $u_{t\xi\xi\xi}$. Получим уравнение в частных производных, которое имеет бесконечно много решений, что дает произвол в выборе a_1 , b_1 . Найти все решения уравнения (36) довольно сложно, но можно указать подходящие частные решения. Например, при $c = -31/6$ получается

$$\eta[u] = -\frac{5}{3}\xi\left(u_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}u_\xi^2\right) - \frac{1}{18}uu_\xi - 2u_{\xi\xi}. \quad (37)$$

Если здесь положить $u = a$, где a задается формулой (34), то согласно лемме получается решение линеаризованного уравнения $a_1(\xi, \tau_1, \tau_2) = \eta[a]$. Заметим, что при указанном в формуле (37) выборе η полученное решение a_1 ограничено. Построенная таким образом функция $a_1(\xi, \tau_1, \tau_2)$ представляет собой частное решение неоднородного линеаризованного уравнения (35). Все другие решения отличаются от a_1 на решения однородного уравнения, вопрос об ограниченности которых был исследован ранее [10]. Утверждение доказано. Аналогичное утверждение имеет место для функции $b_1(\zeta, \tau_1, \tau_2)$.

Таким образом, вычисляется асимптотическое решение в главном порядке:

$$\begin{aligned} u(z, t, \epsilon) = 2k \operatorname{th}\left(\frac{1}{6}k(t-z) + \frac{1}{54}k^3\epsilon t - \frac{31}{4860}k^5\epsilon^2 t\right) + \\ + 2k \operatorname{th}\left(\frac{1}{6}k(t+z) + \frac{1}{54}k^3\epsilon t - \frac{31}{4860}k^5\epsilon^2 t\right) + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом формул для поправок (29), (32) и соотношений $\tau_1 = \epsilon t$, $\tau_2 = \epsilon^2 t$ получается асимптотическое решение, которое при подстановке в уравнение (11) дает функцию порядка $O(\epsilon^3)$, $\epsilon \rightarrow 0$, равномерно для любых t, z . Этим заканчивается доказательство теоремы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом данной работы можно считать систему уравнений вида (33), полученную для главных членов асимптотики $a(\xi, \tau_1, \tau_2)$ или $b(\zeta, \tau_1, \tau_2)$. В задаче для поверхностных волн здесь впервые обнаружено появление КдФ-иерархии, которая обеспечивает построение асимптотики вплоть до времен $t \approx \epsilon^{-2}$, где приближение КдФ становится непригодным. Роль высших симметрий в похожей задаче впервые была обнаружена в работе [11].

Интерес здесь представляет также подход к исследованию линеаризованных уравнений с применением преобразований Ли–Беклунда. Его можно использовать при построении решений других линеаризованных уравнений.

Благодарности. Автор выражает благодарность Л. А. Калякину за многочисленные обсуждения и интерес к работе, а также Г. И. Бурде за предоставленную информацию о работе [8], О. М. Киселеву и Б. И. Сулейманову за полезные замечания.

Все сложные вычисления выполнены с применением программы Maple.

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников, “Лагранжевы приближения в теории волн”, *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*, Наука, Новосибирск, 1985, 10–77.
- [2] L. Debnath, *Nonlinear Water Waves*, Academic Press, Boston, MA, 1983.
- [3] Н. И. Макаренко, “The second long-wave approximation in the Cauchy–Poisson problem”, *Динамика сплошной среды*, № 77, Ин-т гидродинамики АН СССР, Новосибирск, 1986, 56–72; W. Craig, *Commun. Part. Diff. Equat.*, **10**:8 (1985), 787–1003; Т. Капо, Т. Nishida, *Osaka J. Math.*, **23**:2 (1986), 389–413; Л. В. Овсянников, “К обоснованию теории мелкой воды”, *Динамика сплошной среды*, № 15, Ин-т гидродинамики АН СССР, Новосибирск, 1973, 104–125.
- [4] В. И. Карпман, Е. М. Маслов, *ЖЭТФ*, **73**:2 (1977), 281–291; Е. М. Маслов, *ТМФ*, **42**:3 (1980), 362–373; В. П. Маслов, Г. А. Омелянов, *УМН*, **36**:3 (1981), 63–126; *Сиб. матем. журн.*, **24**:5 (1983), 172–182; А. Ньюэлл, “Обратное преобразование рассеяния”, *Солитоны*, ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри, Мир, М., 1983, 193–269; Л. А. Калякин, *ТМФ*, **92**:1 (1992), 62–76.
- [5] V. A. Baikov, S. A. Kordyukova, *Quaest. Math.*, **26** (2003), 1–14; S. A. Kordyukova, *Nonlin. Dyn.*, **46**:1–2 (2006), 73–85.
- [6] С. Ю. Доброхотов, *Докл. АН СССР*, **292** (1987), 63–67.
- [7] N. H. Ibragimov, R. L. Anderson, “Lie–Bäcklund symmetries: Representation by formal power series”, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equation*, Vol. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, 1996, 3–29.
- [8] J. Kodama, *Phys. Lett. A*, **112**:5 (1985), 193–196; G. I. Burde, *Nonlinearity*, **18** (2005), 1443–1461.
- [9] А. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, М., 1976.
- [10] Л. А. Калякин, *Матем. заметки*, **50**:5 (1991), 32–42.
- [11] A. Degasperis, S. V. Manakov, P. M. Santini, *Physica D*, **100** (1997), 187–211.

Поступила в редакцию 6.03.2007