Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. У. Уразбоев, Цепочка Тоды со специальным само-
согласованным источником, *ТМФ*, 2008, том 154, но-
мер 2, 305–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:43:09

© 2008 г.

Г. У. Уразбоев*

ЦЕПОЧКА ТОДЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Описывается метод интегрирования цепочки Тоды с самосогласованным источником с помощью метода обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля с движущимися собственными значениями.

Ключевые слова: цепочка Тоды, самосогласованный источник, метод обратной задачи, движущиеся собственные значения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была установлена важная роль, которую играют квадраты собственных функций в задачах на собственные значения для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Ньюэлл показал [2], что именно квадраты собственных функций, а не сами собственные функции существенны при интегрировании с помощью метода обратной задачи для уравнения Штурма–Лиувилля. Строгое доказательство этого факта приведено в книге [3].

В данной работе рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{aligned}\frac{da_n}{dt} &= a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum_{i=1}^N (f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i), \\ \frac{db_n}{dt} &= 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + a_n \sum_{i=1}^N (f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i) - a_{n-1} \sum_{i=1}^N (f_n^i g_{n-1}^i + f_{n-1}^i g_n^i), \\ a_{n-1} f_{n-1}^k + b_n f_n^k + a_n f_{n+1}^k &= \lambda_k f_n^k, \\ a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k &= \lambda_k g_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}\quad (1.1)$$

при начальном условии

$$a_n(0) = a_n^0, \quad b_n(0) = b_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Начальные данные $\{a_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

- 1) $a_n^0 > 0$, $\text{Im } b_n^0 = 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан.
E-mail: gayrat71@mail.ru

- 2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^3 (|a_n^0 - 1/2| + |b_n^0|) < \infty$;
 3) дискретное уравнение Штурма–Лиувилля

$$a_{n-1}^0 y_{n-1} + b_n^0 y_n + a_n^0 y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$, лежащих вне отрезка $[-1; 1]$.

В рассматриваемой задаче $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots, N$, – неизвестные функции, причем $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ есть собственный вектор оператора

$$L(t)y \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

соответствующий собственному значению $\lambda_k = (z_k + z_k^{-1})/2$, $k = 1, 2, \dots, N$; функция $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, являющаяся решением уравнения

$$a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и собственный вектор $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ линейно независимы.

Предполагается, что

$$W\{f_n^k, g_n^k\} \equiv a_n(f_n^k g_{n+1}^k - f_{n+1}^k g_n^k) = \omega_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

где $\omega_k(t)$ – изначально заданные действительные и непрерывные функции от t , удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{\lambda_k(0)}{2} + \int_0^t \omega_k(t) dt \right| > \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.4)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Решение задачи (1.1)–(1.4) ищется в классе функций $a_n(t)$, $b_n(t)$, принадлежащих $C^1[0, \infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$a_n(t) > 0, \quad \operatorname{Im} b_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n(t) - \frac{1}{2} \right| + |b_n(t)| \right) < \infty \quad (1.5)$$

при любом $T > 0$.

Основная цель данной работы – получить представления для решений $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots, N$, задачи (1.1)–(1.5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

В работах [4]–[6] было показано, что цепочка Тоды без источника

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n &= 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

может быть проинтегрирована методом обратной задачи рассеяния для разностного оператора Штурма–Лиувилля $L(t)$.

В связи с рассматриваемой задачей следует отметить работы [7], [8], в которых рассмотрены уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в связи с применением метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$Ly \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – искомое решение, $\lambda = (z + z^{-1})/2$ – спектральный параметр и

$$a_n > 0, \quad \text{Im } b_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty. \quad (2.2)$$

В этом разделе будут приведены хорошо известные, но необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся теории прямой и обратной задач рассеяния для уравнения (2.1). Эта теория была развита в работе [9]; необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния были получены в работе [10]. Здесь мы будем придерживаться обозначений, принятых в монографии [11].

При условиях (2.2) решения Йоста уравнения (2.1) определяются асимптотиками

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z^n + o(1), & n \rightarrow \infty, & |z| = 1, \\ \psi_n(z) &= z^{-n} + o(1), & n \rightarrow -\infty, & |z| = 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Такие решения существуют, определяются асимптотиками (2.3) однозначно и аналитически продолжаются во внутреннюю часть круга $|z| < 1$.

Для функции $\varphi_n(z)$ имеет место представление

$$\varphi_n(z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'} \quad (2.4)$$

с коэффициентами $K(n, n')$, не зависящими от z и связанными с a_n и b_n посредством равенств

$$a_n = \frac{1}{2} \frac{K(n+1, n+1)}{K(n, n)}, \quad b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{K(n, n+1)}{K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{K(n-1, n-1)} \right). \quad (2.5)$$

При $|z| = 1$ пары $\{\varphi_n(z), \varphi_n(z^{-1})\}$ и $\{\psi_n(z), \psi_n(z^{-1})\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1), поэтому

$$\psi_n(z) = \alpha(z) \varphi_n(z^{-1}) + \beta(z) \varphi_n(z). \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$\alpha(z) = \frac{2}{z - z^{-1}} W \{ \psi_n(z), \varphi_n(z) \}. \quad (2.7)$$

Функция $\alpha(z)$ аналитически продолжается во внутреннюю часть круга $|z| < 1$ и имеет там конечное число простых нулей $z_1, z_2, \dots, z_N$, причем $\lambda_k = (z_k + z_k^{-1})/2$, $k = 1, 2, \dots, N$, есть собственное значение оператора L . Из формулы (2.7) следует, что

$$\psi_n^k = \beta_k \varphi_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.8)$$

где $\psi_n^k = \psi_n(z_k)$.

Если $\lambda_k = (z_k + z_k^{-1})/2$ – собственное значение оператора L , то нормированным собственным вектором, соответствующим этому собственному значению, мы будем называть собственный вектор $\{\xi_n^k\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_n^k)^2 = 1.$$

Ясно, что $\xi_n^k = C_k \varphi_n^k$, $k = 1, 2, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что в силу хорошо известного равенства

$$\dot{\alpha}(z_k) = -\frac{1}{z_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(z_k) \psi_j(z_k)$$

мы имеем

$$C_k^2 = -\frac{\beta_k}{z_k \dot{\alpha}(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Функция $R(z) = \beta(z)/\alpha(z)$ называется коэффициентом отражения. Гладкая на окружности $|z| = 1$, эта функция удовлетворяет инволюции

$$\overline{R}(z) = R(\bar{z}) \quad (2.10)$$

и условию

$$|R(z)| \leq 1, \quad (2.11)$$

причем знак равенства может достигаться лишь в точках $z = \pm 1$.

Для аналитического продолжения функции $\alpha(z)$ во внутреннюю часть круга $|z| < 1$ необходимо выполнение равенства

$$\alpha(0) = \prod_{j=1}^N |z_j| \exp \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln(1 - |R(\zeta)|^2) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (2.12)$$

Набор $\{R(z), z_1, z_2, \dots, z_N, C_1, C_2, \dots, C_N\}$ называется данными рассеяния для уравнения (2.1).

Коэффициенты в представлении (2.4) являются решением уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко

$$\begin{aligned} \chi(n, m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n, n') F(n' + m) &= 0, \quad m > n, \\ (K(n, n))^{-2} &= 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n, n') F(n' + n), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} R(z) z^{n-1} dz + \sum_{k=1}^N C_k^2 z_k^n, \\ \chi(n, m) &= \frac{K(n, m)}{K(n, n)}. \end{aligned}$$

Если попарно не равные числа $z_k \neq 0$ лежат в интервале $-1 < z_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, N$, а функция $R(z)$ на окружности $|z| = 1$ обладает свойствами (2.10), (2.11) и справедливо условие (2.12), то уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (2.13) однозначно разрешимо (см. книгу [12]).

Теперь $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n\}_{-\infty}^{\infty}$ определяются с помощью данных рассеяния из (2.5).

Заметим, что вектор

$$h_n^k = \frac{d}{dz}(\psi_n(z) - \beta_k \varphi_n(z)) \Big|_{z=z_k}$$

является решением уравнения $Ly = \lambda_k y$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Так как из равенства (2.7) при $|z| < 1$ следует, что $\varphi_n(z) \rightarrow \alpha(z)z^n$ при $n \rightarrow -\infty$, то $h_n^k \rightarrow -\beta_k \dot{\alpha}(z_k)z_k^n$ при $n \rightarrow -\infty$, $k = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, из асимптотик (2.3) получаем

$$W\{h_n^k, \psi_n^k\} = \frac{\beta_k \dot{\alpha}(z_k)(z_k - z_k^{-1})}{2}. \quad (2.14)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $\{x_n(\lambda)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{y_n(\mu)\}_{-\infty}^{\infty}$ – решения уравнений $Lx = \lambda x$ и $Ly = \mu y$, соответственно. Тогда имеет место тождество

$$(\mu - \lambda)x_n(\lambda)y_n(\mu) = W\{x_n(\lambda), y_n(\mu)\} - W\{x_{n-1}(\lambda), y_{n-1}(\mu)\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

Из этой леммы, в частности, следует независимость от n вронскианов двух решений уравнений (2.1) при одинаковых спектральных параметрах и ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

Пусть $\{\Phi_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ – нормированный собственный вектор оператора $L(t)$, соответствующий собственному значению $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, т.е.

$$a_{n-1}\Phi_{n-1}^k + b_n\Phi_n^k + a_n\Phi_{n+1}^k = \lambda_k\Phi_n^k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Продифференцировав эти равенства по t и умножив затем на Φ_n^k , просуммируем по n от $-\infty$ до ∞ . Используя уравнения (1.1) и самосопряженность оператора $L(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_k}{dt} = & \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{n-1}(f_n^i g_n^i - f_{n-1}^i g_{n-1}^i) \Phi_{n-1}^k \Phi_n^k + a_n(f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i) (\Phi_n^k)^2 - \\ & - a_{n-1}(f_n^i g_{n-1}^i + f_{n-1}^i g_n^i) (\Phi_n^k)^2 + a_n(f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i) \Phi_{n+1}^k \Phi_n^k). \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2a_n(f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i) \Phi_{n+1}^k \Phi_n^k + a_n(f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i) ((\Phi_n^k)^2 - (\Phi_{n+1}^k)^2)].$$

Группируя слагаемые, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_k}{dt} = & \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k W\{\Phi_n^k, g_n^i\} + g_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k W\{\Phi_n^k, f_n^i\} + \\ & + f_n^i \Phi_n^k W\{\Phi_n^k, g_n^i\} + g_n^i \Phi_n^k W\{\Phi_n^k, f_n^i\}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ЛЕММА 2. При $i \neq k$ выполняется равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [W\{\Phi_n^k, g_n^i\}(f_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k + f_n^i \Phi_n^k) + W\{\Phi_n^k, f_n^i\}(g_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k + g_n^i \Phi_n^k)] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства введем обозначения $W_n = W\{\Phi_n^k, g_n^i\}$, $V_n = W\{\Phi_n^k, f_n^i\}$. Используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [W_n(f_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k + f_n^i \Phi_n^k) + V_n(g_{n+1}^i \Phi_{n+1}^k + g_n^i \Phi_n^k)] = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_n^i \Phi_n^k (W_n + W_{n-1}) + g_n^i \Phi_n^k (V_n + V_{n-1})] = \\ & = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(V_n - V_{n-1})(W_n + W_{n-1}) + (W_n - W_{n-1})(V_n + V_{n-1})] = \\ & = \frac{2}{\lambda_i - \lambda_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (W_n V_n - W_{n-1} V_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как $W\{\Phi_n^k, f_n^k\} = 0$, в силу формулы (1.3) и леммы 2 равенство (3.1) примет вид

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = 2\omega_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$(Ly)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

$$p_{n+1}^k - p_n^k = f_{n+1}^k y_{n+1} + f_n^k y_n, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

относительно неизвестных вектор-функций $\{p_n^k(z, t)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$. С помощью произвольного решения этой системы определим

$$S_n^0 = \frac{\partial y_n}{\partial t} + a_n y_{n+1} - a_{n-1} y_{n-1} + \sum_{m=1}^N g_n^m p_n^m, \quad (3.5)$$

$$S_n^k = a_n(f_{n+1}^k y_n - f_n^k y_{n+1}) + a_{n-1}(f_n^k y_{n-1} - f_{n-1}^k y_n) + (\lambda - \lambda_k)p_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что

$$S_n^k - S_{n-1}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

т.е. величины S_n^k не зависят от n при $k = 1, 2, \dots, N$. Кроме того, из равенств (1.1), (3.3) и (3.5) следует, что

$$(L - \lambda)S_n^0 = - \sum_{m=1}^N g_n^m S_n^m, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

Пусть $\varphi_n(z, t)$ и $\psi_n(z, t)$ – решения Йоста уравнения (3.3) с асимптотиками (2.3). Полагая в (3.4) $y_n^+ \equiv \varphi_n(z)$, $y_n^- \equiv \psi_n(z)$, определим

$$\begin{aligned} p_n^{k-}(z) &= f_n^k \psi_n(z) + 2 \sum_{j=-\infty}^{n-1} f_j^k \psi_j(z), \\ p_n^{k+}(z) &= -f_n^k \varphi_n(z) - 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j^k \varphi_j(z), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С помощью $y_n^+ \equiv \varphi_n(z)$, $y_n^- \equiv \psi_n(z)$, p_n^{1+} , p_n^{1-} , p_n^{2+} , p_n^{2-} , $\dots$, p_n^{N+} , p_n^{N-} можно по формулам (3.5) и (3.6) определить S_n^{i+} , S_n^{i-} , $i = 0, 1, \dots, N$.

На основании (3.4) и (3.6) можно утверждать, что $S_n^{i+} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $S_n^{i-} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, $i = 1, \dots, N$. Поэтому из равенств (3.7) следует, что

$$S_n^{i+} = S_n^{i-} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.8), получим

$$(L - \lambda)S_n^{0+} = (L - \lambda)S_n^{0-} = 0. \quad (3.11)$$

Так как $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ есть собственный вектор оператора $L(t)$, соответствующий собственному значению $\lambda_k = (z_k + z_k^{-1})/2$, то

$$f_n^k = c_k^- \psi_n(z_k, t) = c_k^+ \varphi_n(z_k, t), \quad (3.12)$$

т.е. $c_k^+ = \beta_k c_k^-$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Согласно формулам (1.3) и (3.12)

$$g_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2\omega_k}{c_k^+(z_k - z_k^{-1})} z_k^{-n}, \quad g_n^k \underset{n \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{2\omega_k}{c_k^-(z_k - z_k^{-1})} z_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.13)$$

На основании формул (3.4), (3.12) и асимптотик (2.3) получаем

$$\begin{aligned} p_n^{k-} \underset{n \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{c_k^-(1 + z_k z)}{1 - z_k z} (z_k z)^{-n}, \quad p_n^{k+} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{c_k^+(1 + z_k z)}{1 - z_k z} (z_k z)^n, \\ k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Поэтому вследствие (1.5), (3.5) и (3.13) можно записать

$$\begin{aligned} S_n^{0-} \underset{n \rightarrow -\infty}{\sim} \left(\frac{z^{-1} - z}{2} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{(1 + z_m z)\omega_m}{(1 - z_m z)(z_m - z_m^{-1})} \right) z^{-n}, \\ S_n^{0+} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{z - z^{-1}}{2} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{(1 + z_m z)\omega_m}{(1 - z_m z)(z_m - z_m^{-1})} \right) z^n. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно равенству (3.11)

$$\begin{aligned} S_n^{0-} &= \left(\frac{z^{-1} - z}{2} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{(1 + z_m z) \omega_m}{(1 - z_m z)(z_m - z_m^{-1})} \right) \psi_n(z), \\ S_n^{0+} &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{(1 + z_m z) \omega_m}{(1 - z_m z)(z_m - z_m^{-1})} \right) \varphi_n(z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Определим величину G_0 следующим образом:

$$G_0 = S_n^{0-}(z) - \alpha(z) S_n^{0+}(z^{-1}) - \beta(z) S_n^{0+}(z).$$

Согласно формулам (2.6) и (3.14)

$$G_0 = 2 \sum_{m=1}^N \left(\frac{1 + z_m z}{1 - z_m z} - \frac{1 + z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \right) \frac{\omega_m}{z_m - z_m^{-1}} \alpha(z) \varphi_n(z^{-1}) + (z^{-1} - z) \beta(z) \varphi_n(z). \quad (3.15)$$

С другой стороны, из формул (2.6) и (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} S_n^{0-}(z) &= \frac{\partial \alpha(z)}{\partial t} \varphi_n(z^{-1}) + \frac{\partial \beta(z)}{\partial t} \varphi_n(z) + \alpha(z) S_n^{0+}(z^{-1}) + \beta(z) S_n^{0+}(z) + \\ &+ \sum_{m=1}^N g_n^m (p_n^{m-}(z) - \alpha(z) p_n^{m+}(z^{-1}) - \beta(z) p_n^{m+}(z)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Используя формулы (2.6), (3.9) и лемму 1, имеем

$$p_n^{m-}(z) - \alpha(z) p_n^{m+}(z^{-1}) - \beta(z) p_n^{m+}(z) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j^m \psi_j(z) = 0.$$

Следовательно, из определения G_0 и равенства (3.16) получаем

$$G_0 = \frac{\partial \alpha(z)}{\partial t} \varphi_n(z^{-1}) + \frac{\partial \beta(z)}{\partial t} \varphi_n(z). \quad (3.17)$$

Сравнивая (3.15) и (3.17), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(z)}{\partial t} &= 2 \sum_{m=1}^N \left(\frac{1 + z_m z}{1 - z_m z} - \frac{1 + z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \right) \frac{\omega_m}{z_m - z_m^{-1}} \alpha(z), \\ \frac{\partial \beta(z)}{\partial t} &= (z^{-1} - z) \beta(z), \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R(z, t) = R(z, 0) e^{\theta(z, t)}, \quad (3.18)$$

где

$$\theta(z, t) = (z^{-1} - z)t - 2 \sum_{m=1}^N \int_0^t \left(\frac{1 + z_m(\tau)z}{1 - z_m(\tau)z} - \frac{1 + z_m(\tau)z^{-1}}{1 - z_m(\tau)z^{-1}} \right) \frac{\omega_m(\tau)}{z_m(\tau) - z_m^{-1}(\tau)} d\tau.$$

Положим

$$G_k = S_n^{0-}(z_k) - \beta_k S_n^{0+}(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.19)$$

Тогда на основании формул (2.8) и (3.14) получаем

$$G_k = (z_k^{-1} - z_k) \beta_k \varphi_n(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.20)$$

Дифференцируя равенство (2.8) по t с учетом определения вектора h_n^k , приходим к

$$\frac{\partial \psi_n(z_k)}{\partial t} = \frac{d\beta_k}{dt} \varphi_n(z_k) + \beta_k \frac{\partial \varphi_n(z_k)}{\partial t} - \frac{dz_k}{dt} h_n^k,$$

что с учетом равенства (3.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \psi_n(z_k)}{\partial t} = \frac{d\beta_k}{dt} \varphi_n(z_k) + \beta_k \frac{\partial \varphi_n(z_k)}{\partial t} - \frac{4z_k^2 \omega_k}{z_k^2 - 1} h_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.21)$$

Используя формулы (3.5) и (3.21), имеем

$$S_n^{0-}(z_k) = \frac{d\beta_k}{dt} \varphi_n(z_k) + \beta_k S_n^{0+}(z_k) - \frac{4z_k^2 \omega_k}{z_k^2 - 1} h_n^k + \sum_{m=1}^N g_n^m (p_n^{m-}(z_k) - \beta_k p_n^{m+}(z_k)). \quad (3.22)$$

С другой стороны, согласно формулам (2.8) и (3.9)

$$p_n^{m-}(z_k) - \beta_k p_n^{m+}(z_k) = 2\beta_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j^m \varphi_j(z_k).$$

Поскольку в силу леммы 1 собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, получаем

$$\sum_{m=1}^N g_n^m (p_n^{m-}(z_k) - \beta_k p_n^{m+}(z_k)) = 2g_n^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j^k \psi_j(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.23)$$

По определению векторов h_n^k

$$h_n^k = \delta_k g_n^k + \gamma_k \psi_n(z_k). \quad (3.24)$$

Подставляя равенство (3.24) в (2.14), с учетом формул (1.3) и (3.12) получим

$$\delta_k = -\frac{\beta_k c_k^-(z_k - z_k^{-1}) \dot{\alpha}(z_k)}{2\omega_k} = -\frac{c_k^+(z_k - z_k^{-1}) \dot{\alpha}(z_k)}{2\omega_k}. \quad (3.25)$$

Хорошо известно, что

$$\dot{\alpha}(z_k) = -\frac{1}{z_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(z_k) \psi_j(z_k),$$

поэтому на основании выражения (3.23) равенство (3.22) можно переписать в виде

$$S_n^{0-}(z_k) - \beta_k S_n^{0+}(z_k) = \frac{d\beta_k}{dt} \varphi_n(z_k) - \frac{4z_k^2 \omega_k}{z_k^2 - 1} h_n^k - 2z_k c_k^+ \dot{\alpha}(z_k) g_n^k.$$

Следовательно, с учетом формул (3.19), (3.24) и (3.25) можно записать

$$G_k = \left(\frac{d\beta_k}{dt} - \frac{4z_k^2 \gamma_k \omega_k}{z_k^2 - 1} \beta_k \right) \varphi_n(z_k). \quad (3.26)$$

Сравнивая формулы (3.20) и (3.26), получим

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \left(z_k^{-1} - z_k + \frac{4z_k^2 \gamma_k \omega_k}{z_k^2 - 1} \right) \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Теперь нормировочные константы $C_k(t)$ находятся из равенств

$$C_k^2(t) = - \frac{\beta_k(t)}{z_k(t) \dot{\alpha}(z_k(t), t)}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.27)$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n^k(t)$, $g_n^k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$, являются решением задачи (1.1)–(1.5), то данные рассеяния оператора

$$L(t)y \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}$$

определяются из равенств (3.2), (3.18) и (3.27).

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$, что вместе с равенством (3.24) позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для нахождения решений задачи (1.1)–(1.5).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из равенства (3.2) следует, что при выполнении условия (1.4) при $t > 0$ выполнено неравенство $|\lambda_k(t)| > 1$ и, следовательно, $-1 < z_k(t) < 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Заметим, что при $|z| = 1$ выполнено равенство $\bar{z} = z^{-1}$. Поэтому для функции $\theta(z, t)$, введенной в равенстве (3.18), получим $\bar{\theta}(z, t) = -\theta(z, t)$ при $|z| = 1$. Следовательно, при любом фиксированном $t > 0$, функция $\theta(z, t)$ принимает чисто мнимые значения или ее значение равно нулю, причем в точках $z = \pm 1$ она обращается в нуль. Поэтому при $|z| = 1$

$$|R(z, t)| = |R(z, 0)| \leq 1, \quad t > 0,$$

причем знак равенства может достигаться лишь в точках $z = \pm 1$. Кроме того,

$$\bar{R}(z, t) = R(\bar{z}, t), \quad t > 0.$$

Значит, функция $R(z, t)$ при $t > 0$ удовлетворяет условиям (2.10), (2.11). Из полученного нами ранее равенства

$$\alpha(z, t) = \alpha(z, 0) \exp \left\{ 2 \sum_{m=1}^N \int_0^t \left(\frac{1 + z_m(\tau)z}{1 - z_m(\tau)z} - \frac{1 + z_m(\tau)z^{-1}}{1 - z_m(\tau)z^{-1}} \right) \frac{\omega_m(\tau)}{z_m(\tau) - z_m^{-1}(\tau)} d\tau \right\}$$

имеем

$$\alpha(0, t) = \alpha(0, 0) \exp \left\{ 4 \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{\omega_m(\tau)}{z_m(\tau) - z_m^{-1}(\tau)} d\tau \right\}.$$

Кроме того, из равенства (3.2) получаем

$$z_k(t) = z_k(0) \exp \left\{ 4 \int_0^t \frac{\omega_k(\tau)}{z_k(\tau) - z_k^{-1}(\tau)} d\tau \right\}.$$

Таким образом, с учетом $|R(z, t)| = |R(z, 0)|$ мы получаем, что равенство (2.12) выполнено.

Отсюда следует (см. книгу [12]), что если начальные данные задачи (1.1) быстро убывают (т.е. $a_n^0 - 1/2$ и b_n^0 вместе со своими разностями всех порядков убывают при $|n| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|n|^{-1}$), то $a_n(t)$ и $b_n(t)$ также являются быстроубывающими. Для задачи (1.1)–(1.5), рассматриваемой в данной работе, выполнение условия (1.5) при выполнении второго условия для начальных данных можно показать точно так же, как это сделано в работе [6], но с использованием результатов статьи [10].

Список литературы

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 249.
- [2] А. Ньюэлл, “Обратное преобразование рассеяния”, *Солитоны*, ред. Р. Буллаф, Ф. Когри, Мир, М., 1983, 193.
- [3] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений*, Мир, М., 1985.
- [4] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543.
- [5] H. Flaschka, *Progr. Theor. Phys.*, **51**:3 (1974), 703.
- [6] Ag. Kh. Khanmamedov, *Ukrainian Math. J.*, **57**:8 (2005), 1350.
- [7] V. K. Mel'nikov, *Inverse Problems*, **6** (1990), 809.
- [8] Г. У. Уразбоев, А. Б. Хасанов, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 38.
- [9] K. M. Case, M. Kac, *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 594.
- [10] Г. Ш. Гусейнов, *ДАН СССР*, **231**:5 (1976), 1045.
- [11] М. Тода, *Теория нелинейных решеток*, Мир, М., 1984.
- [12] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

Поступила в редакцию 30.01.2007,
после доработки 15.03.2007