Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Васильев, О. А. Гельфонд, Е. Д. Скворцов, Конформные токи полей высших спинов в пространстве Минковского, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 344–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:20:33

© 2008 г. М. А. Васильев*, О. А. Гельфонд†, Е. Д. Скворцов*

КОНФОРМНЫЕ ТОКИ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

С помощью развернутой формулировки уравнений свободных безмассовых полей всех спинов получены явные выражения для калибровочно-инвариантных сохраняющихся конформных зарядов, билинейных по безмассовым полям произвольного спина.

Ключевые слова: калибровочная теория полей высших спинов, конформные токи.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье построены в явном виде калибровочно-инвариантные сохраняющиеся токи полей высших спинов (ВС), билинейные по безмассовым полям всех спинов в четырех измерениях.

К настоящему времени, насколько нам известно, в литературе не было полной реализации конформных токов ВС, построенных из безмассовых полей произвольных спинов, хотя и рассматривались некоторые частные примеры конформных токов ВС, построенных из полей младших спинов $s \leq 1$. В частности, в работе [1] найдены не зависящие от x конформные токи ВС, построенные из безмассовых скалярных полей, спинорных полей и полей Максвелла, а в работе [2] найдены зависящие от x токи ВС, построенные из безмассовых скалярных и спинорных полей. Мы обобщаем эти результаты в двух направлениях: токи строятся, во-первых, из полей произвольного спина, а во-вторых, с явной зависимостью от пространственно-временных координат.

Анализ токов ВС имеет несколько применений. Прежде всего, построение сохраняющихся токов представляет собой первый шаг к нелинейной теории полей ВС, поскольку они характеризуют так называемое нётеровское кубическое взаимодействие калибровочных полей всех спинов. В то же время заряды, построенные по токам, служат генераторами как низших, так и высших симметрий, поэтому построение токов ВС проливает свет на структуру симметрий и взаимодействий ВС.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: vasiliev@lpi.ru, skvortsov@lpi.ru

†Институт системных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: gel@lpi.ac.ru

Наша конструкция основана на развернутой формулировке динамических уравнений в форме уравнений нулевой кривизны [3] и аналогична конструкции токов ВС [4] в обобщенном пространстве-времени с матричными координатами [5]–[8].

2. РАЗВЕРНУТАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

В работах [3], [7] было показано, что уравнения для напряженностей безмассовых полей всех спинов в пространстве Минковского могут быть кратко сформулированы в развернутой форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^{ab}} C(w, \bar{w} | x) + \frac{\partial^2}{\partial w^a \partial \bar{w}^b} C(w, \bar{w} | x) = 0, \quad (1)$$

где w^a и $\bar{w}^b$ – вспомогательные коммутирующие сопряженные двухкомпонентные спиноры ($a, b = 1, 2$ и $\dot{a}, \dot{b} = \dot{1}, \dot{2}$), x^{ab} – координаты пространства Минковского в спинорных обозначениях. Индексы поднимаются и опускаются следующим образом:

$$A^a = \varepsilon^{ab} A_b, \quad A_a = \varepsilon_{ba} A^b, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}, \quad \varepsilon_{12} = 1, \quad (2)$$

и аналогично для точечных индексов. Связь с тензорными обозначениями дается формулой

$$V^{ab} = A^\nu \sigma_\nu^{ab}, \quad (3)$$

где σ_ν^{ab} , $\nu = 0, 1, 2, 3$, – четыре эрмитовы (2×2) -матрицы.

Смысл уравнений (1) состоит в следующем. Поля $C(w, \bar{w} | x)$ предполагаются разложимыми в ряды по w^a и $\bar{w}^{\dot{a}}$:

$$C(w, \bar{w} | x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}(x) w^{a_1} \dots w^{a_n} \bar{w}^{\dot{a}_1} \dots \bar{w}^{\dot{a}_m}. \quad (4)$$

Оператор

$$N_{w, \bar{w}} = w^a \frac{\partial}{\partial w^a} - \bar{w}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{a}}}$$

коммутирует с $\frac{\partial^2}{\partial w^a \partial \bar{w}^{\dot{a}}}$. Решения уравнений (1) с фиксированным собственным значением оператора $N_{w, \bar{w}}$ образуют инвариантное подпространство, описывающее поля различных спиральностей h :

$$N_{w, \bar{w}} C(w, \bar{w} | x) = 2h C(w, \bar{w} | x). \quad (5)$$

Голоморфные поля

$$C(w, 0 | x) = \sum_{2s=0}^{\infty} C_{a_1 \dots a_{2s}}(x) w^{a_1} \dots w^{a_{2s}}$$

и их комплексно-сопряженные (w^a комплексно-сопряжено $\bar{w}^{\dot{a}}$)

$$C(0, \bar{w} | x) = \sum_{2s=0}^{\infty} C_{\dot{a}_1 \dots \dot{a}_{2s}}(x) \bar{w}^{\dot{a}_1} \dots \bar{w}^{\dot{a}_{2s}}$$

описывают соответственно самодуальную (положительная спиральность) и антисамодуальную (отрицательная спиральность) калибровочно-инвариантные нетривиальные на уравнениях движения комбинации производных безмассовых калибровочных полей всех спинов $s = 0, 1/2, 1, \dots, \infty$, где

$$w^a \frac{\partial}{\partial w^a} C(w, 0 | x) = 2s C(w, 0 | x)$$

и

$$\bar{w}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{a}}} C(0, \bar{w} | x) = 2s C(0, \bar{w} | x),$$

в том числе скалярное поле ($s = 0$)

$$c(x) = C(0, 0 | x),$$

спинорное поле ($s = 1/2$)

$$c_a(x) = \frac{\partial}{\partial w^a} C(w, 0 | x) \Big|_{w=0}, \quad \bar{c}_{\dot{a}}(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{a}}} C(0, \bar{w} | x) \Big|_{\bar{w}=0},$$

тензор Максвелла ($s = 1$)

$$c_{ab}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^a \partial w^b} C(w, 0 | x) \Big|_{w=0}, \quad \bar{c}_{\dot{a}\dot{b}}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}^{\dot{a}} \partial \bar{w}^{\dot{b}}} C(0, \bar{w} | x) \Big|_{\bar{w}=0},$$

напряженность поля Рариты–Швингера ($s = 3/2$)

$$c_{abc}(x) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial w^a \partial w^b \partial w^c} C(w, 0 | x) \Big|_{w=0}, \quad \bar{c}_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}(x) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \bar{w}^{\dot{a}} \partial \bar{w}^{\dot{b}} \partial \bar{w}^{\dot{c}}} C(0, \bar{w} | x) \Big|_{\bar{w}=0},$$

тензор Вейля ($s = 2$)

$$c_{abcd}(x) = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial w^a \partial w^b \partial w^c \partial w^d} C(w, 0 | x) \Big|_{w=0},$$

$$\bar{c}_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}(x) = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial \bar{w}^{\dot{a}} \partial \bar{w}^{\dot{b}} \partial \bar{w}^{\dot{c}} \partial \bar{w}^{\dot{d}}} C(0, \bar{w} | x) \Big|_{\bar{w}=0}$$

и т.д. [7].

Примарные поля содержатся в полях $C(w, 0 | x)$ и их комплексно-сопряженных $C(0, \bar{w} | x)$. Они описывают калибровочно-инвариантные комбинации производных низшего порядка по x от безмассовых калибровочных полей, которые рассматривались многими авторами (см., например, [9]). Отметим, что для поля спина s порядок производных равен $[s]$.

Поля-потомки содержатся в компонентах $C(w, \bar{w} | x)$, зависящих как от w , так и от $\bar{w}$, и, таким образом, выражаются через пространственно-временные производные примарных полей посредством уравнений (1).

Динамические уравнения ВС являются следствиями уравнений (1). Для полей спина $s \neq 0$ это уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial w_a} C(w, 0 | x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^{a\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{\dot{b}}} C(0, \bar{w} | x) = 0, \quad (6)$$

для скалярного поля это уравнение Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{a\dot{b}} \partial x_{a\dot{b}}} c(x) = 0 \quad (7)$$

(для $s > 0$ уравнение (7) – следствие уравнений (6)).

По известной функции $C(w, \bar{w} | 0)$ спинорных переменных w^a и $\bar{w}^{\dot{a}}$ однозначно восстанавливается решение уравнений (1) в виде

$$C(w, \bar{w} | x) = \exp\left(-x^{a\dot{b}} \frac{\partial^2}{\partial w^a \partial \bar{w}^{\dot{b}}}\right) C(w, \bar{w} | 0).$$

С другой стороны, по решению уравнений (1) зависимость от w и $\bar{w}$ восстанавливается следующим образом. Разложение в ряд Тейлора дает

$$C(w, \bar{w} | x) = \exp\left(w^a \frac{\partial}{\partial v^a} + \bar{w}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\dot{a}}}\right) C(v, \bar{v} | x) \Big|_{v=\bar{v}=0}.$$

Для спиральности $h \geq 0$ получаем

$$C(w, \bar{w} | x) = \frac{1}{(2h)!} \left(w^b \frac{\partial}{\partial v^b}\right)^{2h} F_h\left(w^a \frac{\partial}{\partial v^a} \bar{w}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\dot{a}}}\right) C(v, \bar{v} | x) \Big|_{v=\bar{v}=0},$$

где функция

$$F_h(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2h)!}{n! (2h+n)!} r^n$$

связана с функциями Бесселя $I_k(x)$ (см., например, [10]):

$$\frac{r^h}{(2h)!} F_h(r) = I_{2h}(2r^{1/2}).$$

Снова воспользовавшись уравнениями (1), получаем для полей с положительной спиральностью h

$$C^h(w, \bar{w} | x) = F_h(-w^a \bar{w}^{\dot{b}} \partial_{a\dot{b}}) C^h(w, 0 | x), \quad (8)$$

где $\partial_{a\dot{a}} = \partial / \partial x^{a\dot{a}}$. Аналогично для отрицательных спиральностей $h < 0$

$$C^h(w, \bar{w} | x) = F_{|h|}(-w^a \bar{w}^{\dot{b}} \partial_{a\dot{b}}) C^h(0, \bar{w} | x), \quad (9)$$

что восстанавливает зависимость от w и $\bar{w}$.

3. КОНФОРМНЫЕ ТОКИ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ

Из уравнений (1) следует [7], что уравнения, описывающие безмассовые поля всех спинов, обладают симметрией $sp(8)$, причем $sp(8)$ – максимальная конечномерная подалгебра бесконечномерной симметрии ВС. Эта симметрия является конформной, так как $sp(8)$ содержит четырехмерную конформную алгебру $su(2, 2)$ в качестве подалгебры. Бесконечный набор конформных симметрий ВС обуславливает существование сохраняющихся токов.

Заряды полей ВС в пространстве Минковского должны иметь форму

$$Q(\eta) = \int_{\Sigma^3} \Omega^3(\eta), \quad (10)$$

где η обозначает параметры симметрии ВС, $\Omega^3(\eta)$ – замкнутая на уравнениях движения 3-форма, дуальная сохраняющемуся току, и Σ^3 – произвольная трехмерная поверхность в пространстве-времени Минковского, обычно отвечающая его пространственной части $\mathbb{R}^3$, т.е. поверхности Коши.

Используя развернутую форму уравнений безмассовых полей, легко в явной форме выписать сохраняющиеся заряды полей ВС в четырехмерном пространстве Минковского. Рассмотрим следующую 3-форму в пространстве Минковского M^4 :

$$\begin{aligned} \Omega^3(\eta) = & dx_{a\dot{a}} \wedge dx^{a\dot{c}} \wedge dx^{c\dot{a}} \eta_{b_1 \dots b_l b_{l+1} \dots b_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \times \\ & \times x^{b_1 \dot{e}_1} \dots x^{b_l \dot{e}_l} x^{e_{l+1} \dot{b}_{l+1}} \dots x^{e_t \dot{b}_t} T_{c\dot{c}\alpha_1 \dots \alpha_s e_{l+1} \dots e_t \dot{e}_1 \dots \dot{e}_l}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\eta_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ – параметры симметрии полей ВС, симметричные по верхним и нижним индексам, и $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ – обобщенный тензор напряженности, также симметричный. Мы используем обозначения, в которых четырехкомпонентные греческие индексы эквивалентны паре точечных и неточечных индексов, например $\alpha = a, \dot{a}$.

Форма (11) замкнута,

$$d\Omega^3(\eta) = 0, \quad (12)$$

при условии, что обобщенный тензор напряженности $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$ удовлетворяет условию сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^{b\dot{b}}} T^{b\dot{b}}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-2}}(x) = 0. \quad (13)$$

Действительно, так как $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$ симметричен, равенство (12) является простым следствием тождества

$$dx_{a\dot{a}} \wedge dx^a_{\dot{c}} \wedge dx_c^{\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}} \frac{\partial}{\partial x^{b\dot{b}}} = \frac{1}{4} dx_{a\dot{a}} \wedge dx^a_{\dot{b}} \wedge dx_b^{\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}} \frac{\partial}{\partial x^{c\dot{c}}}.$$

В случае, когда количества точечных и неточечных индексов среди индексов α в (13) равны друг другу, мы приходим к обычному условию сохранения бесследовых симметричных тензоров, которые, как хорошо известно, связаны с конформными симметриями ВС [1]. Из уравнения (13), однако, следует, что в общем случае все неприводимые тензоры четырехмерной алгебры Лоренца могут возникать как обобщенные сохраняющиеся тензоры напряженности, за исключением тех, которые содержат только индексы одного типа: точечные (т.е. самодуальные) или неточечные (т.е. антисамодуальные) компоненты. Отметим, что на тензорном языке алгебры Лоренца обобщенные тензоры напряженности полей целых спинов описываются всевозможными бесследовыми тензорами, имеющими симметрию диаграмм Юнга с не более чем двумя рядами. Компоненты $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$, которые не дают вклада в сохраняющиеся заряды, описываются всевозможными прямоугольными двухрядными диаграммами Юнга.

Ключевое наблюдение состоит в том, что тензор напряженности

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{kl}(x) = \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_n}} (C^k(y|x) C^l(iy|x)) \Big|_{y=0}, \quad (14)$$

где $y^\alpha = (w^a, \bar{w}^{\dot{a}})$, удовлетворяет условию сохранения (13) при условии, что поле $C^k(y|x^{a\dot{a}})$ удовлетворяет четырехмерному развернутому уравнению (1). Действительно, из (1) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{b\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial w_b} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{\dot{b}}} (C^k(y|x) C^l(iy|x)) = \\ = - \frac{\partial}{\partial w_b} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_{\dot{b}}} \left(C^k(y|x) \frac{\partial}{\partial w^b} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{b}}} C^l(iy|x) - \left(\frac{\partial}{\partial w^b} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{b}}} C^k(y|x) \right) C^l(iy|x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что сохраняющиеся токи, построенные из полей ВС согласно (14), содержат высшие производные. Это находится в полном соответствии с анализом [11], а также с тем общим свойством теории полей ВС, что их взаимодействия содержат старшие производные [12], [13].

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе рассмотрены некоторые примеры сохраняющихся токов, иллюстрирующие общую конструкцию.

В терминах двухкомпонентных полей динамические уравнения (6), (7) на (анти)самодуальные компоненты $c_{a_1 a_2 \dots a_{2s}}(x)$ и $\bar{c}_{\dot{a}_1 \dot{a}_2 \dots \dot{a}_{2s}}(x)$ переписываются как

$$\partial^{a_1 \dot{a}_1} c_{a_1 a_2 \dots a_{2s}} = 0, \quad \partial^{a_1 \dot{a}_1} \bar{c}_{\dot{a}_1 \dot{a}_2 \dots \dot{a}_{2s}} = 0. \quad (15)$$

Из этих уравнений следует, что пространственно-временные производные напряженностей полей симметричны по точечным и неточечным индексам по отдельности.

Прямая подстановка (8), (9) в (14) дает обобщенный тензор напряженности, содержащий производные порядка p от самодуального поля спина s и антисамодуального поля спина s' :

$$T_{a(2s+p), \dot{a}(2s'+p)}^{s, s', p | k, l} = \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{(2s)! (2s+p)! (2s')! (2s'+p)!}{(2s+j)! (p-j)! (2s'+p-j)! j!} \partial_{a\dot{a}(j)} c_{a(2s)}^k \partial_{a\dot{a}(p-j)} \bar{c}_{\dot{a}(2s')}^l, \quad (16)$$

где используется обозначение $\partial_{a\dot{a}(k)} \equiv \frac{\partial^k}{\partial x^{a\dot{a}} \dots \partial x^{a\dot{a}}}$ и по индексам, обозначенным одной буквой, подразумевается симметризация, причем оператор симметризации является проектором, т.е. двукратное применение дает тот же результат. Аналогично можно построить самодуальные-самодуальные $T_{a(2s+2s'+p), \dot{a}(p)}^{s, s', p | k, l}$ и антисамодуальные-антисамодуальные $T_{a(p), \dot{a}(2s+2s'+p)}^{s, s', p | k, l}$ обобщенные тензоры напряженности.

Обобщенные неприводимые тензоры углового момента, получаемые из (11), имеют форму

$$\begin{aligned} M_{a(2s+p-m+m'-n), \dot{a}(2s'm'-n)}^{s, s', p | m, m', n | k, l} = \\ = T_{a(2s+p-m-n) b(m) c(n), \dot{a}(2s'+p-m'-n) \dot{b}(m') \dot{c}(n)}^{s, s', p | k, l} x^{b(m)}_{\dot{a}(m)} x^{\dot{b}(m')}_{a(m')} x^{c(n)}_{\dot{c}(n)}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $x^{b(m)}_{\dot{a}(m)} \equiv \overbrace{x^b_{\dot{a}} \dots x^b_{\dot{a}}}^m$.

В частности, для полей одного и того же спина получаем обобщенные тензоры напряженности

$$T^{s,s,p|k,l}_{a(2s+p),\dot{a}(2s+p)} = \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j ((2s)!)^2 ((2s+p)!)^2}{(2s+j)!(p-j)!(2s+p-j)!j!} \partial_{a\dot{a}(j)} c^k_{a(2s)}(x) \partial_{a\dot{a}(p-j)} \bar{c}^l_{\dot{a}(2s)} \quad (18)$$

и $T^{s,s,p|k,l}_{a(4s+p),\dot{a}(p)}$, $T^{s,s,p|k,l}_{a(p),\dot{a}(4s+p)}$, соответствующие симметричному бесследовому тензору $T^{s,s,p|k,l}_{\mu(2s+p)}$ ранга $2s+p$ в тензорных обозначениях алгебры Лоренца.

Рассмотрим некоторые примеры полей младших спинов. Безмассовое скалярное (спин 0) поле $c^k(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$\partial^\mu \partial_\mu c^k(x) = 0, \quad (19)$$

которое эквивалентно (7). Полностью симметричные сохраняющиеся токи ВС, построенные из высших производных скалярного поля [1], [2], имеют вид

$$T^{0,0,p|k,l}_{a(p),\dot{a}(p)} = \sum_{j=0}^p (-1)^j \left\{ \frac{p!}{(p-j)!j!} \right\}^2 \partial_{a\dot{a}(j)} c^k(x) \partial_{a\dot{a}(p-j)} c^l(x). \quad (20)$$

В частном случае для $p=1$ и $p=2$ получаем электрический ток

$$J^{k,l}_{a,\dot{a}} = \partial_{a\dot{a}} c^l c^k - \partial_{a\dot{a}} c^k c^l \quad (21)$$

и улучшенный тензор энергии–импульса

$$T^{0,0,2|k,l}_{aa,\dot{a}\dot{a}} = c^k \partial_{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}} c^l - 4 \partial_{a\dot{a}} c^k \partial_{a\dot{a}} c^l + \partial_{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}} c^k c^l, \quad (22)$$

симметричный по цветовым индексам. В тензорных обозначениях эти токи имеют вид

$$J^{k,l}_\mu = c^k \partial_\mu c^l - c^l \partial_\mu c^k, \quad (23)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu c \partial_\nu c - \frac{1}{2} c \partial_{\mu\nu} c - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda c \partial^\lambda c.$$

Поле $\psi(x)$ спина $1/2$, удовлетворяющее безмассовому уравнению Дирака $\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) = 0$, описывается полями $c_a(x)$ и $\bar{c}_{\dot{a}}(x)$, на которые наложены уравнения (15). Опуская цветовые индексы, получаем выражения для электрического тока $T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}$ и тензора энергии–импульса $T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}$:

$$T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{a,\dot{a}} = c_a \bar{c}_{\dot{a}}, \quad (24)$$

$$T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}_{a(2),\dot{a}(2)} = 2(c_a \partial_{a\dot{a}} \bar{c}_{\dot{a}} - \partial_{a\dot{a}} c_a \bar{c}_{\dot{a}}).$$

Суперток $T^{\frac{1}{2},0,1}$, смешивающий поля спинов 0 и $1/2$, дается выражением

$$T^{\frac{1}{2},0,1}_{aa,\dot{a}} = 2c_a \partial_{a\dot{a}} c - \partial_{a\dot{a}} c_a c \quad (25)$$

и его комплексно-сопряженным.

Безмассовое поле спина 1 может быть описано калибровочно-инвариантной напряженностью, удовлетворяющей уравнениям Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0. \quad (26)$$

В терминах двухкомпонентных спиноров $F_{\mu\nu}$ описывается полями c_{aa} и $\bar{c}_{\dot{a}\dot{a}}$, а уравнения Максвелла имеют вид (15).

Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = -F_\mu{}^\sigma F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F^2 \quad (27)$$

соответствует $T^{1,1,0}$ и имеет вид

$$T_{aa,\dot{a}\dot{a}}^{1,1,0} = 4c_{aa}\bar{c}_{\dot{a}\dot{a}}. \quad (28)$$

Как и в случае скалярного поля, существуют полностью симметричные сохраняющиеся токи ВС, построенные из высших производных напряженности поля спина 1 [1], которым соответствует последовательность $T^{1,1,p}$.

С помощью тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ можно построить тензор углового момента

$$M_{\mu,\nu\lambda} = T_{\mu\nu}x_\lambda - T_{\mu\lambda}x_\nu, \quad (29)$$

в случае поля спина 0 ему соответствуют спин-тензоры $M_{a,\dot{a}(3)}^{0,0,2|1,0,0}$, $M_{a(3),\dot{a}}^{0,0,2|0,1,0}$ и $M_{a,\dot{a}}^{0,0,2|0,0,1}$.

Безмассовое поле спина 2 описывает линеаризованную гравитацию. Линеаризованная калибровочно-инвариантная комбинация производных линеаризованного метрического тензора дается линеаризованным тензором Римана, след которого равен нулю в силу уравнений Эйнштейна. Ненулевая бесследовая часть называется тензором Вейля $H_{\mu\nu\lambda\rho}$. Как следствие уравнений Эйнштейна, тензор Вейля удовлетворяет дифференциальным ограничениям – тождествам Бьянки. В терминах двухкомпонентных спиноров тензор Вейля описывается антисамодуальными и самодуальными компонентами $\bar{c}_{\dot{a}\dot{b}cd}(x)$ и $c_{abcd}(x)$. Следствия уравнений Эйнштейна имеют вид (15).

Хорошо известно, что существует билинейный по тензору Вейля сохраняющийся ток, называемый тензором Бела–Робинсона [14], [15]. В тензорных обозначениях он имеет вид

$$T_{\mu\nu\lambda\rho} = H_{\mu\sigma\nu\eta} H_\lambda{}^\sigma{}_\rho{}^\eta + {}^*H_{\mu\sigma\nu\eta} {}^*H_\lambda{}^\sigma{}_\rho{}^\eta, \quad (30)$$

где операция Ходжа $*$ обозначает дуализацию посредством тензора Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$. В терминах двухкомпонентных спиноров тензор Бела–Робинсона соответствует $T^{2,2,0}$ и имеет простой вид:

$$T_{a(4),\dot{a}(4)}^{2,2,0} = (4!)^2 c_{a(4)} \bar{c}_{\dot{a}(4)}. \quad (31)$$

Другие обобщенные тензоры напряженности, построенные из тензора Вейля, даются формулой (18) при $s = 2$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя полученный список сохраняющихся токов и бесконечен, он не содержит некоторых ожидаемых генераторов симметрии и, таким образом, неполон. Это неудивительно, потому что даже обычных сохраняющихся токов, таких как тензор энергии–импульса и электрический заряд для полей ВС, нет в представленном классе калибровочно-инвариантных токов. Действительно, хорошо известно, что сохранение энергии–импульса в теории гравитации описывается в терминах калибровочно-неинвариантного псевдотензора [16], который, однако, дает калибровочно-инвариантные законы сохранения полных энергии и момента в приближении свободных полей. То же самое происходит и со всеми полями ВС [11], [17], [18]. Причина этого в том, что минимальный порядок по производным калибровочно-инвариантных тензоров $C(w, \bar{w} | x)$ равен s для калибровочного поля спина s , поэтому сохраняющиеся тензоры должны сами иметь достаточно высокий спин.

Система всех полей ВС обладает симметрией $sp(8)$ [5], [7]. Параметры симметрии и соответствующие им сохраняющиеся токи в двухкомпонентных спинорных обозначениях имеют следующий вид: обобщенным трансляциям соответствуют параметры симметрии $\eta^{a\dot{a}}$, η^{aa} , $\eta^{\dot{a}\dot{a}}$ и сохраняющиеся токи $T_{a,\dot{a}\dot{a}\dot{a}}^{k,l}$, $T_{aaa,\dot{a}}^{k,l}$, $T_{aa,\dot{a}\dot{a}}^{k,l}$. Обобщенным лоренцевым бустам и дилатациям соответствуют параметры симметрии η_b^a , $\eta_{\dot{b}}^{\dot{a}}$, $\eta_{\dot{b}}^{\dot{a}}$ и сохраняющиеся токи $T_{aa,\dot{a}\dot{b}}^{k,l} x^{bb}$, $T_{aab,\dot{a}}^{k,l} x^{bb}$, $T_{a,\dot{a}\dot{a}\dot{b}}^{k,l} x^{bb}$, $T_{ab,\dot{a}\dot{a}}^{k,l} x^{bb}$. Обобщенным специальным конформным преобразованиям соответствуют параметры симметрии η_{bb} , $\eta_{\dot{b}\dot{b}}$ и сохраняющиеся токи $T_{a,\dot{a}bb}^{k,l} x^{bb} x^{bb}$, $T_{ab,\dot{a}\dot{b}}^{k,l} x^{bb} x^{bb}$, $T_{abb,\dot{a}}^{k,l} x^{bb} x^{bb}$.

Список генераторов этого типа (включающий в себя генераторы обычной конформной алгебры $su(2, 2) \subset sp(8)$), которые могут быть построены в терминах инвариантных тензоров ВС, достаточно короток:

$$\begin{aligned} T_{aa,\dot{a}\dot{a}}^{k,l} &= c^k \partial_{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}} c^l - 4 \partial_{a\dot{a}} c^k \partial_{a\dot{a}} c^l + \partial_{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}} c^k c^l; \\ &4c_{aa} \bar{c}_{\dot{a}\dot{a}}; \quad 2(c_a \partial_{a\dot{a}} \bar{c}_{\dot{a}} - \partial_{a\dot{a}} c_a \bar{c}_{\dot{a}}), \\ T_{aaa,\dot{a}}^{k,l} &= 2(c_a \partial_{a\dot{a}} \bar{c}_{\dot{a}} - \partial_{a\dot{a}} c_a \bar{c}_{\dot{a}}); \quad 6c_{aaa}^k \bar{c}_{\dot{a}}^l, \\ T_{a,\dot{a}\dot{a}\dot{a}}^{k,l} &= 6\bar{c}_{\dot{a}\dot{a}\dot{a}}^l c_a^k; \quad 6\bar{c}_{\dot{a}\dot{a}}^l \partial_{a\dot{a}} c^k - 2\partial_{a\dot{a}} \bar{c}_{\dot{a}\dot{a}}^l c^k, \end{aligned} \quad (32)$$

и, очевидно, неполон, поскольку $sp(8)$ -симметрия смешивает поля всех спинов, в то время как генераторы (32) вообще не содержат полей ВС. Пока остается неизвестным, можно ли дополнить список сохраняющихся токов полей ВС, приведенный в настоящей статье, псевдотензорами ВС, которые могут не быть калибровочно-инвариантными, тем не менее заряды, построенные по ним, будут калибровочно-инвариантными.

В заключение заметим, что формула для конформных токов полей ВС, приведенная в данной статье, аналогична формуле, приведенной в работах [4], [19], для сохраняющихся токов ВС в 10-мерном пространстве-времени $\mathcal{M}_4$, предложенном для описания четырехмерных безмассовых полей ВС в [5], [7], [8]. На самом деле выражение (14) для $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{kl}(y | x^{a\dot{a}})$ представляет собой редукцию на пространство Минковского обобщенного тензора энергии–импульса [4] $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{kl}(y | X^{\alpha\beta})$, где $X^{\alpha\beta}$ – симметричные матричные координаты в $\mathcal{M}_4$. Условие сохранения (13) также

является редукцией условия сохранения в $\mathcal{M}_4$. Явная взаимосвязь между двумя конструкциями, которая требует надлежащего интегрирования по нестягиваемому циклу в $\mathcal{M}_4$, остается пока неразработанной.

Благодарности. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 05-02-17654), LSS (грант № 1578.2003-2) и INTAS (грант № 03-51-6346).

Список литературы

- [1] D. Anselmi, *Class. Quant. Grav.*, **17** (2000), 1383; [arXiv:hep-th/9906167](#).
- [2] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, V. N. Zaikin, *JHEP*, **12** (2000), 018; [arXiv:hep-th/0010239](#).
- [3] M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **209** (1988), 491; *Ann. Phys.*, **190** (1989), 59.
- [4] М. А. Васильев, *Изв. вузов. Сер. физ.*, **45:7** (2002), 23; [arXiv:hep-th/0204167](#).
- [5] C. Fronsdal, “Massless particles, ortosymplectic symmetry and another type of Kaluza–Klein theory”, *Essays on Supersymmetry*, Math. Phys. Stud., **8**, Reidel, Dordrecht, 1986, 163.
- [6] I. Bandos, J. Lukierski, D. Sorokin, *Phys. Rev. D* (3), **61** (2000), 045002; [arXiv:hep-th/9904109](#).
- [7] M. A. Vasiliev, *Phys. Rev. D* (3), **66** (2002), 066006; [arXiv:hep-th/0106149](#).
- [8] M. A. Vasiliev, “Relativity, causality, locality, quantization and duality in the $Sp(2M)$ invariant generalized space-time”, *Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry*, World Scientific, Singapore, 2002, 826; [arXiv:hep-th/0111119](#).
- [9] S. Weinberg, *Phys. Rev.* (2), **133** (1964), B1318.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. II. *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [11] S. Deser, A. Waldron, *Stress and strain: $T^{\mu\nu}$ of higher spin gauge fields*, [arXiv:hep-th/0403059](#).
- [12] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson, L. Brink, *Nucl. Phys. B*, **227** (1983), 31; 41; F. A. Berends, G. J. Burgers, H. van Dam, *Z. Phys. C*, **24** (1984), 247; *Nucl. Phys. B*, **260** (1985), 295; A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson, *Class. Quant. Grav.*, **3** (1986), 927.
- [13] E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **189** (1987), 89; *Nucl. Phys. B*, **291** (1987), 141.
- [14] L. Bel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 1094; **248** (1959), 1297; I. Robinson, *Class. Quant. Grav.*, **14** (1997), A331.
- [15] S. Deser, *Gen. Rel. Grav.*, **8** (1977), 573; W. Rindler, A. Trautman (eds.), *Gravitation and Geometry. A Volume in Honour of Ivor Robinson*, Monogr. Textbooks Phys. Sci., **4**, Bibliopolis, Napoli, 1987; S. Deser, Z. Yang, *Class. Quant. Grav.*, **7** (1990), 1491.
- [16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, М., 1973.
- [17] S. Deser, J. M. McCarthy, *Class. Quant. Grav.*, **7** (1990), L119.
- [18] R. A. Arnowitt, S. Deser, *Nucl. Phys.*, **49** (1963), 133.
- [19] М. А. Васильев, О. А. Гельфонд, *ТМФ*, **145:1** (2005), 35.

Поступила в редакцию 19.03.2007