Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Багаев, Двухпетлевые вычисления эффективного действия матричной σ -модели в формализме фонового поля, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 354–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:56:31

© 2008 г.

А. А. Багаев*

ДВУХПЕТЛЕВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ МАТРИЧНОЙ σ -МОДЕЛИ В ФОРМАЛИЗМЕ ФОНОВОГО ПОЛЯ

В формализме фонового поля рассматривается матричная σ -модель. Прямым вычислением бесконечной части эффективного действия показано равенство “бегущих констант связи” при регуляризации с импульсом обрезания и размерной регуляризации в двухпетлевом приближении. Проверено совпадение β -функции с имеющимися результатами.

Ключевые слова: фоновое поле, главное киральное поле, перенормировка, бегущая константа связи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная матричная σ -модель (главное киральное поле) задается действием

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \operatorname{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g), \quad (1.1)$$

где e_0 – безразмерная константа связи, матрица g – элемент компактной группы Ли G , tr – матричный след.

Модель (1.1) описывает двумерный голдстоуновский бозон [1], [2] и ряд явлений в теории конденсированного состояния.

Эффективное действие нашей модели в формализме фонового поля [3] имеет вид

$$W = \frac{1}{e_0^2} W_{-1} + W_0 + e_0^2 W_1 + \cdots + e_0^{2n} W_n + \cdots, \quad (1.2)$$

где W_n – вклады $(n+1)$ -петлевых вакуумных диаграмм. Все расходящиеся слагаемые (1.2) комбинируются в множитель (“бегущую константу связи”) при W_{-1} , имеющий вид ряда по степеням e_0^2 с расходящимися коэффициентами [3], [4]. Из перенормируемости и асимптотической свободы [5] следует, что можно выбрать константу e_0 стремящейся к нулю при снятии регуляризации таким образом, что ряд (1.2) окажется конечным.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: багаев@mail.ru

“Бегущая константа связи” имеет вид

$$\frac{1}{e_{\text{MC}}^2(\mu)} = \frac{1}{e^2(\Lambda)} + c_0 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + c_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} e^2(\Lambda) + \dots$$

в регуляризации с импульсом обрезания Λ (μ – точка нормировки) и

$$\frac{1}{e_{\text{DR}}^2(\mu)} = \frac{1}{e^2(\varepsilon)} + \frac{b_0}{\varepsilon} \mu^{-\varepsilon} + \frac{b_1}{\varepsilon} e^2(\varepsilon) \mu^{-2\varepsilon} + \dots$$

в размерной регуляризации, где ε – дефект размерности (μ – параметр с размерностью импульса). В старших петлях ($n \geq 3$) еще имеются слагаемые, пропорциональные $(\ln \Lambda/\mu)^{n-1}$ или ε^{1-n} , соответственно.

Имеет место равенство $\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} e_{\text{MC}}(\mu) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} e_{\text{DR}}(\mu)$, если $b_0 = c_0$ и

$$c_1 = 2b_1 \quad (1.3)$$

(см. работу [3]). Следовательно, β -функции, определяемые как

$$\beta(e^2) \equiv \frac{de^2(\mu)}{d \ln \mu} = \beta_1 e_0^4 + \beta_2 e_0^6 + \dots, \quad (1.4)$$

также равны, и $\beta_1 = c_0$, $\beta_2 = c_1 = 2b_1$.

Основная цель настоящей работы – вычисление бесконечной части ряда (1.2) с точностью до двухпетлевого приближения в регуляризации с импульсом обрезания и в размерной регуляризации и проверка равенства (1.3) для σ -модели.

Фаддеев и Болохов проверяли условие (1.3) для полей Янга–Миллса, но, во-первых, вычисления оказались весьма сложными, а во-вторых, регуляризация с импульсом обрезания нарушает калибровочную инвариантность [6], [7], поэтому появляются квадратичные расходимости, не устранимые вычитанием или перенормировкой действия. Аналогичное наблюдается и в нашем случае (см. раздел 5), но двухпетлевые вычисления с двумерной моделью (1.1) проще, чем в четырехмерной теории калибровочных полей. Структура расходимостей при этом похожа на янг-миллсовскую, а квадратичные расходимости, как будет показано, просто устраниваются.

Модель (1.1) является частным случаем общей двумерной нелинейной модели (см. ниже формулу (6.2)), в которой поле принимает значения в дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ [8]. Для модели (6.2) известна β -функция в двухпетлевом приближении, выраженная через геометрические инварианты $\mathcal{M}$ [8], [9], однако она сложна для интерпретации. Выражение упрощается для симметрического $\mathcal{M}$ (например, $SU(N)$) [8]; будет показано, что оно совпадает с результатом нашего анализа модели (6.2) с $G = SU(N)$ в пределе большого N .

Подробно исследован другой частный случай модели (6.2) – $O(N)$ -симметричная σ -модель (6.1), или модель n -поля [1], [2]; изучалось $1/N$ -разложение [5], [10]. В пределе большого N теория n -поля описывает свободные безмассовые частицы [5]. Известна β -функция с точностью до четырехпетлевого приближения [11]. В разделе 6 показано совпадение β -функций для моделей (1.1) и (6.1), когда $G = SU(2) \cong O(4)$.

Кроме того, $SU(N)$ σ -модель эквивалентна интегрируемой фермионной модели [2], [12] и модели со спиновыми цепочками [13] в магнитном поле, исследованной с помощью анзаца Бете; для инвариантного заряда определен аналог β -функции (6.4), которая оказывается эквивалентной функции (1.4) для $SU(2)$ σ -модели.

В данной работе используется формализм фонового поля [5], [4] с неклассическим внешним полем [14], что упрощает перенормировку константы связи [3]. При этом вычисления проводятся в более удобном координатном представлении, а не в традиционном импульсном (как, например, в работе [11]). Полученные коэффициенты β -функции выражены в терминах нормировки оператора Казимира группы G (в рассматриваемом конкретном представлении) подобно теории Янга–Миллса [3], [4], что не встречается в современных исследованиях старших порядков для модели (1.1). Также несколько уточнены формулы [4] для двухпетлевых вычислений (см. приложение) в четырехмерном случае¹⁾ в двух схемах регуляризации.

2. ФОРМАЛИЗМ ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ σ -МОДЕЛИ

Представим поле g в модели (1.1) в виде $g(x) = h(x)g_{\text{cl}}(x)$, где h – “квантовое” поле, а g_{cl} – “классическое” фоновое поле. Интегрирование по h [5] дает формулу (1.2), W_0 – детерминант (3.1), $W_{n \geq 1}$ представляют собой суммы вкладов 1-неприводимых вакуумных диаграмм, если g_{cl} удовлетворяет “квантовым уравнениям движения” [14]:

$$\times \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} = 0. \quad (2.1)$$

Первый член – вариационная производная (1.1), т.е. $\partial_\mu(R_\mu)_{\text{cl}} \equiv \partial_\mu(\partial_\mu g_{\text{cl}} g_{\text{cl}}^{-1})$, второе слагаемое – сумма 1-неприводимых графов с одной внешней линией.

Параметризуем “квантовое” поле $h(x) = e^{e_0 \phi(x)}$ с помощью поля ϕ , принадлежащего фундаментальному представлению алгебры $\mathfrak{g}$, $\phi = \phi^A t^A$, где генераторы t^A удовлетворяют условиям

$$\text{Sp}(t^A t^B) = -\frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad [t^A, t^B] = f^{ABC} t^C.$$

Здесь f^{ABC} – структурные константы $\mathfrak{g}$ в фундаментальном представлении, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор, а Sp обозначает форму Киллинга на $\mathfrak{g}$, т.е. $\text{tr}(\cdot \times \cdot)$.

В этом формализме формула (1.1) переходит (детали см. в приложении) в выражение

$$S = \frac{1}{e_0^2} W_{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} e_0^{n-2} S_n,$$

где

$$W_{-1} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \text{Sp}(R^2(x))$$

¹⁾ Отметим, что для случая двух измерений аппарат, аналогичный предложенному в работе [4], систематически не разработан.

– классическое действие (обозначение “cl” опущено);

$$S_n = -\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[\text{Sp}(B_\mu(\phi^n) R_\mu) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \text{Sp}(B_\mu(\phi^{n-m}) B_\mu(\phi^m)) \right]$$

– функционалы n -го порядка по степеням поля ϕ ($B_\mu(\phi^n)$ – кратный коммутатор, см. формулу (II.1) в приложении); S_1 не учитывается в силу уравнений (2.1).

3. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

Выделим из $A = e^{-S}$ слагаемые A_0 и A_1 , пропорциональные $(e_0)^0$ и $(e_0)^2$ соответственно. Первое из них имеет вид

$$A_0 = -S_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \phi^A K^{AB} \phi^B,$$

где оператор

$$(K)^{AB} = \frac{1}{2} (\partial^2 \delta^{AB} - f^{AKB} R_\mu^K \partial_\mu) \quad (3.1)$$

задает квадратичную форму по ϕ в действии.

Применяя теорему Вика к $A_1 = e_0^2[-S_4 + (S_3)^2/2]$, получаем W_1 – сумму вкладов диаграмм “восьмерка” и “рыбка” или пяти типов диаграмм; штрихами на линиях обозначены производные $G(x, y)$ (см. рисунок в разделе 6):

$$\begin{aligned} (W_1)_1 &= -\frac{1}{48} f^{ABC} f^{BDE} f^{DMN} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x R_\mu^A(x) [\partial_\mu G^{ME}(x, y)|_{y=x} G^{NC}(x, x) + \\ &\quad + N \leftrightarrow E + C \leftrightarrow E]; \\ (W_1)_2 &= -\frac{1}{48} f^{ABC} f^{BDE} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x [\partial_\mu G^{DE}(x, y)|_{y=x} \partial_\mu G^{AC}(x, y)|_{y=x} + C \leftrightarrow E]; \\ (W_1)_3 &= -\frac{1}{48} f^{ABC} f^{BDE} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x [G^{EC}(x, x) \partial_\mu G^{DA}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\mu|_{y=x}]; \\ (W_1)_4 &= \frac{1}{288} f^{AKC} f^{KME} f^{BLD} f^{LNF} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x d^2y \times \\ &\quad \times [\partial_\mu G^{MN}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\nu G^{EF}(x, y) G^{CD}(x, y) + D \leftrightarrow F + F \leftrightarrow N] R_\mu^A(x) R_\nu^B(y); \\ (W_1)_5 &= \frac{1}{288} f^{AKC} f^{KME} f^{BLD} f^{LNF} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x d^2y [\partial_\mu G^{MD}(x, y) G^{CN}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\nu \times \\ &\quad \times G^{EF}(x, y) + 2 \cdot D \leftrightarrow F] R_\mu^A(x) R_\nu^B(y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Известно, что $W_0 = (1/2) \ln(\det K)$. Вычислим его методом теплового ядра (или собственного времени Фока) [15]–[17] с помощью формулы (следующей из (II.2), см. приложение)

$$\ln \det K = \text{const} - \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \theta^{AB}(x, x, s) \right), \quad (4.1)$$

где $\theta(x, y, s)$ – фундаментальное решение (3.1), известное в виде разложения в окрестности точки $s = 0$ [15]:

$$\theta^{AB}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi s} e^{-(x-y)^2/(4s)} [a_0^{AB}(x, y) + a_1^{AB}(x, y)s + \dots], \quad a_0^{AB}(x, x) = \delta^{AB}. \quad (4.2)$$

Гладкие коэффициенты $a_n^{AB}(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (II.3) (см. приложение).

Регуляризуем (4.1), заменив расходящийся интеграл на логарифм; из явного вида оператора (3.1), формулы (II.36) и производных по x_μ уравнения (II.3a) (см. приложение) получаем, что бесконечная часть $\widetilde{W}_0$ имеет вид

$$\widetilde{W}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x a_1^{AA}(x, x) \cdot \ln \frac{\Lambda}{\mu} = -\frac{C(G)}{4\pi} W_{-1} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (4.3)$$

где $C(G)$ – собственное значение оператора Казимира алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, $c_0 = b_0 = -C(G)/(4\pi)$, что совпадает с результатами, полученными в монографии [5].

5. ВЫЧИСЛЕНИЯ В ДВУХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Функция Грина $G^{AB}(x, y)$ оператора (3.1) связана с функцией θ (4.2) соотношением

$$G^{AB}(x, y) = \int_0^{+\infty} ds \theta^{AB}(x, y, s) = a_0^{AB}(x, y)p_0(x-y) + a_1^{AB}(x, y)p_1(x-y) + \dots, \quad (5.1)$$

где $p_0(x)$ имеет сингулярность высшего порядка при $x = 0$, $[p_1] = [p_0] + 2$.

Есть три вида расходимостей (3.2):

1) p_0^2 , $\partial_\mu p_0 \partial_\mu p_1$, p_0 , $\partial^2 p_1 p_0$, $\int dy \partial_\mu p_0 \partial_\nu p_0 p_0$, $\int dy \partial_\mu \partial_\nu p_0 p_0^2$, $\int dy \partial_\mu p_0 \partial_\nu p_0$, $\int dy \partial_\mu \partial_\nu p_0 p_0$ имеют размерность $[p_0]$;

2) $\partial_\mu p_0 p_0$, $\partial_\mu p_0$ имеют размерность $[p_0] - 1$;

3) $\partial_\mu p_0 \partial_\mu p_0$, $\partial^2 p_0 p_0$, $\partial^2 p_0$ имеют размерность $[p_0] - 2$.

В случае двумерного пространства первый из множителей в формуле (5.1),

$$p_0(x) = -\frac{1}{4\pi} \ln \mu^2 x^2, \quad p_1(x) = \frac{1}{16\pi} x^2 [\ln \mu^2 x^2 - 1] \quad (5.2)$$

(ср. с работой [4]), имеет особенность в точке $x = 0$. В окончательных выражениях осуществим замену $x^2 \mapsto \epsilon^2 \sim 1/\Lambda^2$; в этом состоит регуляризация с импульсом обрезания.

Все расходимости являются либо квадратичными, либо линейными, либо логарифмическими по параметру Λ : $\langle \widetilde{W}_1 \rangle_{\text{MC}} = \Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_0$.

Квадратичная расходимость

$$\Gamma_2 = \frac{1}{12} C(G) \int_{\mathbb{R}^2} d^2x F^{AA}(x, x) \cdot \partial^2 p_0(y) \Big|_{y=0}$$

присутствует, как и в теории Янга–Миллса. Функционал, пропорциональный квадратично-расходящемуся множителю, является “калибровочно-инвариантным” объектом, если предположить, что поля $R_\mu(x)$ играют роль связности, как и калибровочные поля. Это предположение резонно благодаря уравнению параллельного переноса (П.3а) и структуре оператора (П.4) (см. приложение). То же самое наблюдается и при анализе полей Янга–Миллса: квадратичные расходимости возникают вследствие того, что регуляризация с импульсом обрезания не является калибровочно-инвариантной [6], [7]. Однако заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} f^{ABM} f^{MDC} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x G^{BD}(x, x) K^{AL} G^{LC}(x, y) \Big|_{y=x} = \\ = \text{const} + \frac{1}{12} C(G) \int_{\mathbb{R}^2} d^2x F^{AA}(x, x) \cdot \partial^2 p_0(y) \Big|_{y=0}; \end{aligned}$$

значит,

$$\widetilde{W}'_1 = \widetilde{W}_1 - \frac{1}{12} f^{ABM} f^{MDC} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x G^{BD}(x, x) K^{AL} G^{LC}(x, y) \Big|_{y=x}$$

не содержит квадратичных расходимостей, при том что остальные расходимости $\widetilde{W}'_1$ и $\widetilde{W}_1$ одинаковы. В случае Янга–Миллса аналогичный прием не применим.

Выражение Γ_1 , пропорциональное $\partial_\mu p_0(y) \Big|_{y=0}$, равно нулю в силу четности выражения (5.2).

Логарифмический вклад $\Gamma_0 = \Gamma_0^2 + \Gamma_0^1$ – сумма квадрата и первой степени логарифма; $\Gamma_0^2 = 0$, что следует из (П.5а) для случая МС, а $\Gamma_0^1 = \langle \widetilde{W}'_1 \rangle_{\text{МС}}$ с помощью (П.5б) и (П.5в) (см. приложение) запишется как

$$\langle \widetilde{W}'_1 \rangle_{\text{МС}} = -\frac{1}{3} C^2(G) \left(\frac{p_0(0)}{16\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu p_0(x) \partial_\mu p_1(x) \Big|_{x=0} \right) W_{-1} = -\frac{C^2(G)}{32\pi^2} W_{-1} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (5.3)$$

следовательно, $c_1 = -C^2(G)/(32\pi^2)$.

Для размерной регуляризации перейдем формально в пространство $2 - \varepsilon$ измерений. Множители в соотношении (5.1) имеют вид

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \mu^{-\varepsilon} + \pi^{\varepsilon/2} \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) |x|^\varepsilon \right\}, \\ p_1(x) &= \frac{1}{16\pi} \left\{ -\frac{2x^2}{\varepsilon} \mu^{-\varepsilon} + \pi^{\varepsilon/2} \Gamma\left(-1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) |x|^{2+\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Расходимости – это полюсы по ε ; в двух петлях имеются полюсы только первого и второго порядков, причем вклад, пропорциональный $1/\varepsilon^2$, равен нулю, как и Γ_0^2 в регуляризации с импульсом обрезания.

Для $1/\varepsilon$ (с учетом (П.5), см. приложение) получается

$$\langle W_1 \rangle_{\text{DR}} = -\frac{1}{3} C^2(G) \left(\frac{\mu^{-\varepsilon}}{16\pi} p_0(0) + \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{64\pi^2} \right) W_{-1} = -\frac{C^2(G)}{64\pi^2} W_{-1} \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}, \quad (5.4)$$

откуда $b_1 = -C^2(G)/(64\pi^2)$.

Различие между двумя схемами регуляризации на языке диаграмм: 1. – регуляризация с импульсом обрезания; 2. – размерная регуляризация; 1, 2, 3, 4, 5 – номера слагаемых (3.2).

6. ВЫВОДЫ

Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), видим, что для c_1 и b_1 выполняется равенство (1.3).

Схема на рисунке иллюстрирует состав слагаемых (3.2), дающих логарифмический вклад в эффективное действие в различных схемах регуляризации.

Для $O(N)$ -симметричной σ -модели с действием

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x (\partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n}), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^N, \quad (6.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^N$, известна β -функция [11]

$$\beta(T) = \varepsilon T - (N-2)T^2 - (N-2)T^3 + O(T^4),$$

где T – температура, аналог константы связи. Эквивалентность $O(4)$ - и $SU(2)$ σ -моделей показана в приложении. Сравним β -функции.

Приравнявая $4\pi\beta(T)^2$ при $N = 4$ и выражение (1.4) с коэффициентами (4.3) и (5.3) при $C(G) = 2$, находим, что $T = e_0^2/(4\pi)$. Следовательно, в данном частном случае результаты настоящей работы и работы [11] совпадают.

Для общей нелинейной двумерной модели

$$S[X] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x G_{ab}(X) \partial_\mu X^a \partial_\mu X^b, \quad (6.2)$$

когда $X(x) \in \mathcal{M}$, уравнения Гелл-Манна–Лоу можно найти в монографии [9]. В частном случае симметрического многообразия, т.е. когда $\mathcal{M} = G/H$, имеем

$$\beta_{ab} \left(\frac{G}{T} \right) = \left(-\varepsilon + \frac{1}{2}T + \frac{(\dim \mathcal{M})^2 + 4 \dim A (\dim H - \dim \mathcal{M})}{8 \dim \mathcal{M} (\dim H - \dim A)} T^2 \right) \frac{G_{ab}}{T} \quad (6.3)$$

(см. работу [8]), где в случае $SU(N)$ σ -модели $G = SU(N) \times SU(N)$, $H = SU(N)$, $\mathcal{M} = SU(N)$, а $\dim A$ есть размерность подалгебры Картана H , т.е. $N-2$. Если принять

$$T = \frac{C(G)}{2\pi} e_0^2 = \frac{N}{2\pi} e_0^2,$$

²⁾Дополнительные множители – от $\beta_1 = -(N-2)/(2\pi)$ для $O(N)$ σ -модели [5] и от (П.6).

то выражение (6.3) будет давать (1.4) в режиме больших N .

Формула для инвариантного заряда Z спиновой цепочки во внешнем магнитном поле h (см. формулу (5.9) в работе [13])

$$\frac{dZ}{dL} = \beta(Z) = -\frac{Z^2}{\pi} - \frac{Z^3}{2\pi^2} + \dots, \quad L = \ln \frac{h}{m}, \quad (6.4)$$

где m – параметр, имеющий смысл массы, получена в результате анализа $SU(2)$ σ -модели с помощью анзаца Бете. Если принять $Z = e_0^2/2$, то имеет место равенство $2\beta(Z) = \beta_1 e_0^4 + \beta_2 e_0^6 + \dots$, в котором $C(G) = 2$. Множитель 2 может быть устранен переопределением действия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя $L_\mu = h^{-1} \partial_\mu h$, перепишем подынтегральное выражение в формуле (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \text{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g) &= \text{Sp}((R_{\text{cl}} + L)^2) = -\text{Sp}((R_\mu)_{\text{cl}}(R_\mu)_{\text{cl}}) - \\ &\quad - 2 \text{Sp}((R_\mu)_{\text{cl}} \cdot h^{-1} \partial_\mu h) - \text{Sp}(h^{-1} \partial_\mu h \cdot h^{-1} \partial_\mu h). \end{aligned}$$

Комбинация $h^{-1} \partial_\mu h$ имеет вид

$$h^{-1} \partial_\mu h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_0^n}{n!} \left[\dots \left[\partial_\mu \underbrace{\phi, \phi}_{n \text{ раз}}, \dots, \phi \right] \right]; \quad (\text{П.1})$$

мы использовали известное правило дифференцирования экспоненты [18].

Для вычислений с помощью метода собственного времени полезна следующая формула:

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-x} - e^{-Ax}}{x} = \ln A, \quad A > 0. \quad (\text{П.2})$$

Коэффициенты (4.2) и (5.1) удовлетворяют цепочке рекуррентных уравнений

$$-(x_\mu - y_\mu) M_\mu^{AC} a_0^{CB} = 0, \quad (\text{П.3a})$$

$$-(x_\mu - y_\mu) M_\mu^{AC} a_{N+1}^{CB} + K^{AC} a_N^{CB} = (N+1) a_{N+1}^{AB}, \quad (\text{П.3б})$$

где введен новый оператор

$$M_\mu^{AB} = \partial_\mu \delta^{AB} - \frac{1}{2} f^{AKB} R_\mu^K. \quad (\text{П.4})$$

Для двухпетлевых вычислений использованы формулы

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy \partial_\mu \partial_\nu p_0(y) p_0^2(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} p_0^2(0) \delta_{\mu\nu} & \text{в случае MC,} \\ -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{\varepsilon^2} \delta_{\mu\nu} & \text{в случае DR;} \end{cases} \quad (\text{П.5a})$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} dy \partial_\mu p_0(y) \partial_\nu p_0(y) p_0(y) &= \begin{cases} \frac{1}{4} p_0^2(0) \delta_{\mu\nu} & \text{в случае MC,} \\ \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \right] \delta_{\mu\nu} & \text{в случае DR;} \end{cases} \\ \partial^2 p_1 &= -p_0 + \frac{\mu^{-\varepsilon}}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{П.5б})$$

(ср. с работой [4]), а также формула

$$\partial_\mu p_0(x) \partial_\mu p_1(x) \Big|_{x=0} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} p_0(0) & \text{в случае MC,} \\ 0 & \text{в случае DR,} \end{cases} \quad (\text{П.5в})$$

которая выполняется и в четырехмерии для p_1 и p_2 вместо p_0 и p_1 соответственно (с квадратом коэффициента); однако подобная комбинация не рассматривалась в работе [4].

Очевидно, что $SU(2) \ni g = aI + 2i\langle \vec{b}, \vec{\sigma} \rangle$, где $\mathbf{n} = (a; \vec{b})$ – единичный четырехмерный вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}$ – вектор, составленный из матриц Паули, а I – единичная матрица в пространстве $\mathbb{C}^2$.

Подынтегральное выражение в формуле (1.1)

$$\text{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g) = \text{tr}([\partial_\mu a \partial_\mu a + \langle \partial_\mu \vec{b}, \partial_\mu \vec{b} \rangle] I) = 2(\partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n}) \quad (\text{П.6})$$

с точностью до константы совпадает с подынтегральным выражением (6.1).

Благодарности. Автор благодарит Т. А. Болохова и Л. Д. Фаддеева за обсуждение изучаемой проблемы и ценные замечания.

Список литературы

- [1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **72** (1977), 224.
- [2] A. Polyakov, P. B. Wiegmann, *Phys. Lett. B*, **131** (1983), 121.
- [3] Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 133.
- [4] I. Jack, H. Osborn, *Nucl. Phys. B*, **207** (1982), 474.
- [5] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Удмуртский ун-т, Ижевск, 1999.
- [6] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **518** (2001), 195.
- [7] А. А. Славнов, *ТМФ*, **130**:1 (2002), 3.
- [8] D. Friedan, *Ann. Phys.*, **163** (1985), 318.
- [9] А. М. Цвелик, *Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния*, Физматлит, М., 2002.
- [10] E. Brézen, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B*, **14** (1976), 3110.
- [11] S. Hikami, E. Brezen, *J. Phys. A*, **11** (1978), 1141.
- [12] P. B. Wiegmann, *Phys. Lett. B*, **141** (1984), 217.
- [13] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, *Ann. Phys.*, **167** (1986), 227.
- [14] L. Faddeev, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **33**:2, 201.
- [15] Б. С. Девитт, *Динамическая теория групп и полей*, Наука, М., 1987.
- [16] V. A. Fock, *Phys. Z. Sowjetunion*, **12** (1937), 404.
- [17] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **82** (1951), 664.
- [18] М. М. Постников, *Группы и алгебры Ли*, Лекции по геометрии. Семестр 5, Наука, М., 1982.

Поступила в редакцию 28.12.2006,
после доработки 16.03.2007