Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, О конечности дискретного спектра оператора Шредингера трех частиц на решетке, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 2, 363–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:31:09

© 2008 г.

М. Э. Муминов*

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается система трех взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения квантовых частиц (с бесконечной массой одной частицы) на трехмерной решетке. Доказана конечность числа связанных состояний соответствующего оператора Шредингера в случае, когда потенциалы удовлетворяют некоторым условиям и два двухчастичных подгамильтониана с бесконечными массами имеют резонанс в нуле, а для двухчастичного подгамильтониана с конечными массами нуль является регулярной точкой.

Ключевые слова: резонанс, двухчастичные подгамильтонианы, дискретный спектр, принцип вариации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование бесконечного числа трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией трехчастичного непрерывного оператора Шредингера является одним из замечательных свойств спектрального анализа. Это свойство впервые было обнаружено Ефимовым [1] и называется эффектом Ефимова. В работах [2], [3] существование бесконечного числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера было доказано в том случае, когда два из трех двухчастичных гамильтонианов имеют резонанс в нуле и нуль является регулярной точкой для третьего гамильтониана с конечной массой. В этих работах также обсуждался вопрос существования бесконечного числа собственных значений в случае, когда масса одной частицы обращается в бесконечность. Однако в этом случае вопрос о числе собственных значений оставался открытым, хотя в работе [4] высказано предположение о том, что число собственных значений N конечно.

В настоящей работе рассматривается система трех квантовых частиц с бесконечной массой одной частицы на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения. Для конкретного

*Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан. E-mail: mmuminov@mail.ru

класса потенциалов доказана конечность числа связанных состояний соответствующего трехчастичного оператора Шредингера H рассматриваемой системы на решетке в случае, когда два двухчастичных подгамильтониана с бесконечными массами имеют резонанс в нуле, а для подгамильтониана с конечными массами нуль является регулярной точкой. Таким образом, для конкретного класса потенциалов трехчастичного оператора Шредингера на решетке доказываются предположения, высказанные в работе [4].

2. ОПИСАНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^3$.

Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$ определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} + \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2} + \frac{1}{2m_3} \Delta_{x_3},$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta$; $m_\alpha > 0$ – масса частицы $\alpha = \overline{1, 3}$; Δ – решетчатый лапласиан – есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x+s)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Трехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами $\hat{v}_{ij}$, $1 \leq i < j \leq 3$, определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_{12} - \hat{V}_{13} - \hat{V}_{23},$$

где $\hat{V}_{ij}$ – оператор умножения в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$:

$$(\hat{V}_{ij} \hat{\psi})(x_1, x_2, x_3) = \hat{v}_{ij}(x_i - x_j) \hat{\psi}(x_1, x_2, x_3), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3), \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

$\hat{v}_{ij}$ – ограниченная вещественнозначная функция.

В дальнейшем предположим, что потенциал $\hat{v}_{ij}(s)$, $1 \leq i < j \leq 3$, является неотрицательной четной функцией на $\mathbb{Z}^3$ и удовлетворяет условию $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |s|^\rho \hat{v}_{ij}(s) = 0$. Здесь $\rho > 3$, $s \in \mathbb{Z}^3$, $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|$.

Пусть T^3 – трехмерный тор, $L_2((T^3)^n)$, $n = 1, 2, 3$, – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^n$.

Переход из координатного представления гамильтониана в импульсное осуществляется при помощи следующего преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}_3: L_2((T^3)^3) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3).$$

Обозначим через $\mathbf{H} = \mathcal{F}_3^{-1} \hat{H} \mathcal{F}_3$ импульсное представление гамильтониана, описывающего систему трех произвольных квантовых частиц. Оператор $\mathbf{H}$ действует в $L_2((T^3)^3)$ по формуле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3.$$

Здесь

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{2m_1} \hat{\Delta}_{k_1} + \frac{1}{2m_2} \hat{\Delta}_{k_2} + \frac{1}{2m_3} \hat{\Delta}_{k_3}$$

и $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, – интегральный оператор типа свертки

$$(\mathbf{V}_\alpha f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(T^3)^3} v_\alpha(k_\beta - k'_\beta) \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \times \\ \times \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3,$$

где

$$v_\alpha(k) = (\mathcal{F}_1^{-1} \hat{v}_{\beta\gamma})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}_{\beta\gamma}(s) e^{i(k, s)}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma,$$

$\hat{\Delta}_{k_1} = \hat{\Delta} \otimes I \otimes I$, $\hat{\Delta}_{k_2} = I \otimes \hat{\Delta} \otimes I$ и $\hat{\Delta}_{k_3} = I \otimes I \otimes \hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}$ – оператор умножения на функцию $\varepsilon(k)$:

$$(\hat{\Delta} f)(k) = \varepsilon(k) f(k), \quad \varepsilon(k) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos k^{(i)}).$$

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полный квазиимпульс системы трех частиц. Шестимерное многообразие $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (T^3)^3 : k_1 + k_2 + k_3 = K\}$ изоморфно тору $(T^3)^2$. Изоморфизм осуществляется с помощью отображения

$$\Sigma_K : F_K \rightarrow (T^3)^2, \quad \Sigma_K((p, q, K - p - q)) = (p, q).$$

Обозначим через $\mathbf{U}_s$, $s \in \mathbb{Z}^3$, оператор, действующий в $L_2((T^3)^3)$ по формуле

$$(\mathbf{U}_s f)(k_1, k_2, k_3) = e^{-i(s, K)} f(k_1, k_2, k_3).$$

Из-за того что оператор $\mathbf{H}$ коммутирует с унитарной группой $\{\mathbf{U}_s, s \in \mathbb{Z}^3\}$, $\mathbf{H}$ представляется в виде следующего прямого интеграла [5]:

$$\mathbf{H} = \int_{T^3} \oplus \tilde{H}(K) dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}(K)$, действующий в $L_2(F_K)$, унитарно-эквивалентен оператору $H(K)$, действующему в $L_2((T^3)^2)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Здесь $H_0(K)$ является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(p, q) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(q) + \frac{1}{m_3} \varepsilon(K - p - q)$$

и

$$\begin{aligned}
 (V_1 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v_1(q-s) f(p, s) ds, \\
 (V_2 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v_2(p-s) f(s, q) ds, \\
 (V_3 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v_3(p-s) f(s, p+q-s) ds.
 \end{aligned}$$

Эквивалентность задается с помощью унитарного оператора $\tilde{U}_K: L_2(F_K) \rightarrow L_2((T^3)^2)$, определенного по формуле $\tilde{U}_K f = f \circ (\Sigma_K)$.

Введем оператор Шредингера $h_\alpha(k)$, $k \in T^3$, соответствующий двухчастичному гамильтониану на решетке [6], действующий в $L_2(T^3)$ по формуле

$$h_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - v_\alpha,$$

где $h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию $\varepsilon_\alpha(k; p) = (1/m_\beta)\varepsilon(p) + (1/m_\gamma)\varepsilon(k-p)$ и

$$(v_\alpha f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v_\alpha(p-s) f(s) ds.$$

Обозначим через $v_\alpha^{1/2}(\cdot)$ ядро оператора $v_\alpha^{1/2}$, где $v_\alpha^{1/2}$ – положительный квадратный корень оператора v_α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что оператор $h_\alpha(0)$ имеет резонанс в нуле, если уравнение

$$G_\alpha(0, 0)\varphi = \varphi \quad (1)$$

имеет единственное нетривиальное решение $\psi_\alpha \in L_2(T^3)$, удовлетворяющее условию $\int v_\alpha^{1/2}(q)\psi_\alpha(q) dq \neq 0$, где $G_\alpha(k, z)$ – интегральный оператор в $L_2(T^3)$ с ядром

$$G_\alpha(k, z; p, p') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{T^3} \frac{v_\alpha^{1/2}(p-t)v_\alpha^{1/2}(t-p')}{\varepsilon_\alpha(k; t) - z} dt, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad z \leq 0.$$

Заметим, что если нуль является резонансом оператора $h_\alpha(0)$ и f_α – соответствующее решение уравнения $h_\alpha(0)f = 0$, то

$$f_\alpha(p) = \frac{(v_\alpha^{1/2}\psi_\alpha)(p)}{\varepsilon_\alpha(0; p)} \in L_1(T^3) \setminus L_2(T^3),$$

т.е. $z = 0$ не является собственным значением оператора $h_\alpha(0)$.

Если уравнение (1) не имеет решения, то $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $h_\alpha(0)$. В таком случае нуль называется *регулярной точкой* оператора $h_\alpha(0)$.

Можно проверить [7], что для всех $K \in T^3$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров операторов каналов, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)) \cup \sigma(H_3(K)), \quad H_\alpha(K) = H_0(K) - V_\alpha.$$

Кроме того, если $H_i(0) \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, то $\sigma(H_i(0)) = \sigma(H_0(0)) = [0, M_0]$, $M_0 = \max_{p,q} \mathcal{E}_0(p, q)$.

Теперь сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА. Пусть нуль есть регулярная точка оператора $h_\alpha(0)$, $H_i(0) \geq 0$ и $V_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Предположим также, что дискретный спектр $\sigma_{\text{discr}}(H_{\beta\gamma}(0))$ оператора $H_{\beta\gamma}(0) = H_0(0) - V_\beta - V_\gamma$ конечен и компактный оператор v_α является конечномерным, т.е.

$$\dim \text{Ran}(v_\alpha) < \infty. \quad (2)$$

Тогда оператор $H(0)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть нуль есть регулярная точка оператора $h_\alpha(0)$ и операторы $h_\beta(0)$, $h_\gamma(0)$ имеют резонанс в нуле. Предположим, что $H_i(0) \geq 0$, $V_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, и $m_\alpha = \infty$, $m_\beta < \infty$, $m_\gamma < \infty$. Если оператор v_α удовлетворяет условию (2), то дискретный спектр оператора $H(0)$ конечен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это следствие доказывает сделанное в работе [4] предположение для решетчатого случая для класса потенциалов v_α , удовлетворяющих условию (2). При этом в случае выполнения условий следствия дискретный спектр соответствующего оператора Шредингера $H(0)$ конечен, если в трехчастичной системе частицы взаимодействуют с помощью парных контактных потенциалов притяжения.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем сначала некоторые свойства двухчастичного оператора Шредингера.

ЛЕММА 1. Пусть $h_3(0) \geq 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h_3(0)$. Тогда $\sigma(h_3(k)) \subset (0, \infty)$ для всех $k \in T^3 \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_3(0)$ – положительный оператор, т.е. $h_3(0) \geq 0$. Оператор $h_3(k)$ запишем в виде

$$h_3(k) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} h_3(0) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} U_k h_3(0) U_k^{-1}, \quad k \in T^3 \setminus \{0\}, \quad (3)$$

где $U_k: L_2(T^3) \rightarrow L_2(T^3)$ – унитарный оператор, определенный формулой $(U_k f)(q) = f(k + q)$, $f \in L_2(T^3)$. Из выражения (3) и положительности $h_3(0)$ имеем

$$(h_3(k)f, f) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (h_3(0)f, f) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (U_k h_3(0) U_k^{-1} f, f) \geq 0$$

для каждого $f \in L_2(T^3)$.

Пусть нуль является регулярной точкой оператора $h_3(0)$. Тогда $h_3(0)f \neq 0$ при $f \neq 0$. Отсюда имеем $(h_3(0)f, f) = ([h_3(0)]^{1/2} f, [h_3(0)]^{1/2} f) > 0$, и из выражения (3) вытекает, что $(h_3(k)f, f) > 0$ для всех $k \neq 0$ и $f \neq 0$. Отсюда и из $\inf \sigma_{\text{ess}}(h_3(k)) = m_k > 0$ получаем включение $\sigma(h_3(k)) \subset (0, \infty)$ для всех $k \in T^3 \setminus \{0\}$. Лемма 1 доказана.

Для оператора $G_3(k, z)$ имеем представление $G_3(k, z) = [v_3]^{1/2} r_0(k, z) [v_3]^{1/2}$, где $r_0(k, z)$ – оператор умножения на функцию $(\varepsilon_3(k; p) - z)^{-1}$, $k \in T^3$, $z \leq 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $h_3(0) \geq 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h_3(0)$. Тогда $\|G_3(k, z)\| < 1$ для всех $k \in T^3$ и $z \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное, т.е. будем считать, что выполняются условия леммы, но $\|G_3(k, z)\| \geq 1$ для некоторого $k \in T^3$ и $z \leq 0$. Тогда оператор $G_3(k, z)$ имеет собственное значение $\lambda \geq 1$, поскольку он является положительным и компактным. Так как для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением и оператора BA с той же кратностью (см., например, монографию [8]), то собственное значение $\lambda \geq 1$ оператора $[v_3]^{1/2}r_0(k, z)[v_3]^{1/2}$ является собственным значением оператора $r_0(k, z)v_3$ с той же кратностью. Пусть

$$r_0(k, z)v_3\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in L_2(T^3).$$

Тогда

$$v_3\psi = \lambda h_0^3(k)\psi - \lambda z\psi, \quad \psi \in L_2(T^3).$$

Отсюда

$$0 = \lambda h_3(k)\psi + (\lambda - 1)v_3\psi - \lambda z\psi, \quad \psi \in L_2(T^3),$$

или же

$$\lambda(h_3(k)\psi, \psi) = (1 - \lambda)(v_3\psi, \psi) + \lambda z(\psi, \psi) \leq 0, \quad k \neq 0.$$

Но согласно лемме 1 при $f \neq 0$ имеет место неравенство $(h_3(k)f, f) > 0$. Это противоречие доказывает лемму 2.

Из доказанной леммы следует неравенство

$$\|r_0(k, z)v_3\| < 1 \quad \text{при} \quad k \in T^3, \quad z \leq 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 3. Операторнозначная функция $R_0(\cdot)V_3$, определенная на $(-\infty, 0)$ со значениями в $L_2((T^3)^2)$, является непрерывной в смысле операторной топологии на $(-\infty, 0)$, и $\lim_{z \rightarrow -0} R_0(z)V_3 = R_0(0)V_3$, где $R_0(z)$, $z \leq 0$, – оператор умножения на функцию $(\mathcal{E}_0(p, q) - z)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности функции $v_3(\cdot)$ в T^3 и векторнозначной функции $f(z) = (\mathcal{E}_0(p, q) - z)^{-1}$ на $(-\infty, 0)$ получаем непрерывность операторнозначной функции $R_0(\cdot)V_3$ на $(-\infty, 0)$ в смысле операторной топологии.

Заметим, что $(0, 0) \in (T^3)^2$ является единственной невырожденной точкой минимума для функции $\mathcal{E}_0(\cdot, \cdot)$, и поэтому существуют числа $C', C'' > 0$ такие, что

$$C'(p^2 + q^2) \leq \mathcal{E}_0(p, q) \leq C''(p^2 + q^2) \quad \text{при} \quad p, q \in T^3. \quad (5)$$

Следовательно, $R_0(0)V_3$ является ограниченным оператором в $L_2((T^3)^2)$.

Из равенства

$$\begin{aligned} & \| (R_0(z)V_3 - R_0(0)V_3)f \|^2 = \\ & = \int_{(T^3)^2} \left| \frac{z}{(\mathcal{E}_0(p, q) - z)\mathcal{E}_0(p, q)} \int_{T^3} v_3(s - p)f(s, p + q - s) ds \right|^2 dp dq \end{aligned}$$

получим следующее неравенство для нормы оператора $R_0(z)V_3 - R_0(0)V_3$:

$$\|R_0(z)V_3 - R_0(0)V_3\|^2 \leq C \int_{(T^3)^2} \int_{T^3} \frac{z^2}{|(\mathcal{E}_0(p, q) - z)\mathcal{E}_0(p, q)|^2} |v_3(s - p)|^2 ds dp dq.$$

Согласно неравенству (5) имеем

$$\|R_0(z)V_3 - R_0(0)V_3\|^2 \leq C \int_{(T^3)^2} \frac{z^2}{|(p^2 + q^2 - z)(p^2 + q^2)|^2} dp dq \leq C|z|,$$

где $C > 0$ не зависит от z . Отсюда получим

$$\|R_0(z)V_3 - R_0(0)V_3\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -0.$$

Лемма 3 доказана.

Имеет место представление

$$UR_0(z)V_3U^{-1}f(p_1, p_2) = \left[I \otimes r_0 \left(p_1, z - \frac{1}{m_3} \varepsilon(p_1) \right) v_3 \right] f(p_1, p_2), \quad (6)$$

где $U: L_2((T^3)^2) \rightarrow L_2((T^3)^2)$ – унитарный оператор, определенный по формуле $Uf(p_1, p_2) = f(p_1, p_2 - p_1)$. Учитывая это представление, из неравенства (4) получим

$$\|R_0(z)V_3\| < 1 \quad \text{при} \quad z \leq 0.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что справедлива следующая

ЛЕММА 4. Пусть $h_3(0) \geq 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h_3(0)$. Тогда оператор $(I - R_0(z)V_3)^{-1}$ при $z < 0$ существует и определен в $L_2((T^3)^2)$. Кроме того, $\lim_{z \rightarrow -0} (I - R_0(z)V_3)^{-1} = (I - R_0(0)V_3)^{-1}$ в смысле операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Не умаляя общности, допустим, что $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$.

Предположим обратное, т.е. будем считать, что условия теоремы выполняются, а оператор $H(0)$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений.

Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ – собственные (ортонормальные) функции, соответствующие собственным значениям $z_1 \leq \dots \leq z_k \leq \dots < 0$. Так как $H_i(0) \geq 0$, то $\sigma_{\text{ess}}(H(0)) = [0, M_0]$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$.

По определению φ_i и z_i имеет место равенство

$$H(0)\varphi_i = z_i\varphi_i$$

или

$$\varphi_i = R_0(z_i)(V_1 + V_2 + V_3)\varphi_i.$$

Согласно лемме 4 последнее равенство можно записать в виде

$$\varphi_i = [I - R_0(z_i)V_3]^{-1}R_0(z_i)(V_1 + V_2)\varphi_i$$

или же

$$\varphi_i = Q(z_i)\varphi_i, \quad (7)$$

где $Q(z) = [I - R_0(z)V_3]^{-1}R_0(z)(V_1 + V_2)$.

Положим $K(z) = V_3^{1/2}Q(z)$, $z < 0$. Из лемм 3 и 4 получаем, что:

- 1) $K(z)$ является компактным оператором при каждом $z < 0$;
- 2) операторнозначная функция $K(\cdot)$ является непрерывной в смысле операторной топологии на $(-\infty, 0)$, и $\lim_{z \rightarrow -0} K(z) = K(0)$.

Отсюда и из равенства $(V_3\varphi_k, \varphi_k) = (K^*(z_k)K(z_k)\varphi_k, \varphi_k)$ с учетом ортонормальности системы $\{\varphi_k\}$ вытекает, что $(V_3\varphi_k, \varphi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как по условию теоремы дискретный спектр оператора $H_{12}(0)$ конечен, то согласно равенству $z_k\varphi_k = H_{12}(0)\varphi_k - V_3\varphi_k$ имеем $V_3\varphi_k \neq 0$ для некоторого $N_0 > 0$ и для всех $k \geq N_0$.

Следовательно, существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, для которой

$$(V_3\varphi_{n_k}, \varphi_{n_k}) = \|V_3^{1/2}\varphi_{n_k}\|^2 > 0, \quad \|K(z_{n_k})\varphi_{n_k}\| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\mathcal{H}_0$ – пространство собственных функций, соответствующих отрицательным собственным значениям $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots$ оператора $H(0)$, и

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} (\cdot, \varphi_{n_i}) K(z_{n_i}) \varphi_{n_i}.$$

Легко проверить, что K является компактным оператором. Пусть P – проектор на $\mathcal{H}_0$. Тогда по определению оператор $PH(0)P$ имеет бесконечное число собственных значений.

При этом

$$\tilde{N}(PH(0)P) = \infty,$$

где $\tilde{N}(A) = \dim \operatorname{Im} E_{(-\infty, 0)}(A)$, $\{E_\Omega(A)\}$ – спектральное семейство оператора A .

Учитывая равенство $UV_3U^{-1} = I \otimes v_3$, из теоремы о спектре тензорного произведения операторов получим $\sigma(V_3) = \sigma(v_3)$. Из выражения (2) следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, для которого $\sigma(V_3) \cap (0, \varepsilon) = \emptyset$ и

$$\sigma(PV_3P) \cap (0, \varepsilon) = \emptyset. \quad (8)$$

Из равенства

$$(PV_3Pf, f) = \left(V_3 \sum_{i=k}^{\infty} (f, \varphi_{n_i}) \varphi_{n_i}, \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_{n_i}) \varphi_{n_i} \right)$$

и формулы (7) для всех $f \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$(PV_3Pf, f) = \left(V_3 \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_{n_i}) Q(z_k) \varphi_{n_i}, \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_{n_i}) Q(z_i) \varphi_{n_i} \right) = (K^*Kf, f).$$

Следовательно, согласно выражению (8) операторы K^*K и PV_3P являются конечномерными в $\mathcal{H}_0$. Пользуясь неравенством (см. § XIII.15 в книге [5])

$$\tilde{N}(PH(0)P) \leq \tilde{N}(PH_{12}(0)P) + \tilde{N}(-PV_3P)$$

и учитывая конечность $\tilde{N}(PH_{12}(0)P)$ и $\tilde{N}(-PV_3P)$, имеем $\tilde{N}(PH(0)P) < \infty$.

Это противоречие доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Не ограничивая общности, предположим, что $m_1, m_2 < \infty, m_3 = \infty$.

В этом случае операторы $H_1(0)$, $H_2(0)$ и $H_{12}(0)$ определяются равенствами

$$H_1(0) = h_1(0) \otimes I + I \otimes h_0^2(0), \quad H_2(0) = h_0^1(0) \otimes I + I \otimes h_2(0), \quad (9)$$

$$H_{12} = h_1(0) \otimes I + I \otimes h_2(0), \quad (10)$$

где I – единичный оператор в $L_2(T^3)$. Так как $H_i(0) \geq 0$, $i = 2, 3$, из равенств (9) получим, что $\sigma_{\text{discr}}(h_i(0)) = \emptyset$. Из представления (9) и теоремы о спектре тензорного произведения операторов имеем $\sigma(H_{12}) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma(h_1(0)), \mu \in \sigma(h_2(0))\} = [0, M_0]$, т.е. $\sigma_{\text{discr}}(H_{12}(0)) = \emptyset$. Отсюда и из теоремы получаем доказательство следствия.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12**:5 (1970), 1080–1091.
- [2] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [3] A. V. Sobolev, *Comm. Math. Phys.*, **156** (1993), 101–126.
- [4] Н. Тамура, *J. Funct. Anal.*, **95** (1991), 433–459.
- [5] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [6] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 428–443.
- [7] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [8] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, М., Мир, 1970.

Поступила в редакцию 21.02.2007