Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Иванов, Суперсимметризация моделей Ландау,
ТМФ, 2008, том 154, номер 3, 409–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:40:21

© 2008 г.

Е. А. Иванов*

СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЛАНДАУ

Дан обзор последних работ, посвященных построению и изучению суперрасширений задачи Ландау о квантовой частице на плоскости в однородном магнитном поле, а также обобщения этой задачи на случай сферы S^2 , сделанного Хэлдейном. Основное внимание уделено планарным суперсимметричным моделям Ландау, которые инвариантны относительно неоднородной супергруппы $ISU(1|1)$, контракции супергруппы $SU(2|1)$, и представляют собой минимальные суперрасширения исходной модели Ландау. Их общее существенное свойство – наличие скрытой динамической $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии на мировой линии, которая присутствует как на классическом, так и на квантовом уровнях и наиболее естественно обнаруживается при переходе к новому инвариантному внутреннему произведению в пространстве квантовых состояний, что необходимо для обеспечения положительности всех норм. Для одной из планарных моделей – модели Ландау на суперплоскости – представлена формулировка вне массовой поверхности в терминах суперполей на мировой линии, позволяющая сделать $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию явной.

Ключевые слова: суперсимметрия, суперполе, супергруппа, частица.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Ландау [1] описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к плоскости. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна [2]) описывает заряженную частицу на сфере $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака, помещенного в центр. Эти модели имеют много приложений, в частности, в квантовом эффекте Холла (КЭХ) [3].

Суперсимметричные расширения модели Ландау, о которых пойдет речь в настоящей работе, представляют собой модели нерелятивистских суперчастиц, движущихся на супермногообразиях. Изучение таких моделей может прояснить вопрос о возможных проявлениях суперсимметрии в различных версиях КЭХ (включая так называемый спиновый КЭХ) и других реалистических моделях конденсированных сред. В математическом аспекте модель Ландау и ее суперрасширения тесно связаны с некоммутативной (супер)геометрией: после квантования в них возникает взаимно однозначное соответствие между нижними уровнями Ландау (УЛ) и

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

не(анти)коммутативными (супер)многообразиями, которые представлены соответствующими координатными операторами.

Задачи Ландау на суперсфере $SU(2|1)/U(1|1)$ размерности $(2|2)$ и суперфлаге $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$ размерности $(2|4)$, т.е. минимальные суперрасширения модели Хэлдейна на S^2 , рассмотрены в работах [4], [5] (см. также работу [6]). Для лучшего понимания общих особенностей суперсимметричных моделей Ландау оказалось полезным изучить планарные пределы таких суперобобщений. Планарные модели должны получаться из своих криволинейных прототипов в пределе большого радиуса сферы S^2 (пределе контракции). Такие модели были построены и исследованы в работах [7], [8], а также [9]. Модель, полученная из $SU(2|1)/U(1|1)$ -модели, называется *моделью Ландау на суперплоскости*, а модель, возникающая из $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$ -модели, носит название *модель Ландау на планарном суперфлаге*.

Данная работа представляет собой обзор суперсимметричных моделей Ландау [4], [5], [7], [8] с упором на их планарные варианты и присутствие в последних скрытой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии на мировой линии, что, по-видимому, является общим свойством планарных моделей [8], [9]. Для модели Ландау на суперплоскости в качестве существенно нового результата развит $\mathcal{N} = 2$ суперполевым формализм, позволяющий сделать явной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию на мировой линии. Кроме того, обсуждается проблема присутствия состояний с отрицательной нормой [7] в квантовых планарных моделях Ландау; показано, что во всех случаях эту трудность можно преодолеть за счет введения нетривиальной метрики на пространстве состояний в духе работ [10], [11].

2. ПРЕАМБУЛА: БОЗОННЫЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ

2.1. Бозонные модели Ландау как $d = 1$ сигма-модели ВЗВ-типа.

2.1.1. *Определения.* Стандартная планарная модель Ландау описывается следующим лагранжианом:

$$L_b = |\dot{z}|^2 - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z) = |\dot{z}|^2 + (A_z\dot{z} + A_{\bar{z}}\dot{\bar{z}}). \quad (2.1)$$

Здесь $z(t)$, $\bar{z}(t)$ – комплексные координаты двумерной евклидовой плоскости, 2κ – напряженность внешнего однородного магнитного поля,

$$A_z = -i\kappa\bar{z}, \quad A_{\bar{z}} = i\kappa z, \quad \partial_{\bar{z}}A_z - \partial_zA_{\bar{z}} = -2i\kappa. \quad (2.2)$$

Второй член в (2.1) – простейший пример члена Весса–Зумино (ВЗ).

Соответствующий канонический гамильтониан представляется в виде

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \kappa, \quad (2.3)$$

где

$$a = i(\partial_{\bar{z}} + \kappa z), \quad a^\dagger i(\partial_z - \kappa \bar{z}), \quad [a, a^\dagger] = 2\kappa. \quad (2.4)$$

Он коммутирует со следующими операторами, которые, таким образом, определяют инвариантности данной теории (см., например, работу [12]):

$$\begin{aligned} P_z &= -i(\partial_z + \kappa \bar{z}), & P_{\bar{z}} &= -i(\partial_{\bar{z}} - \kappa z), \\ [P_z, P_{\bar{z}}] &= 2\kappa, & F_b &= z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \\ [H, P_z] &= [H, P_{\bar{z}}] = [H, F_b] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Операторы P_z , $P_{\bar{z}}$ и F_b генерируют соответственно “магнитные трансляции” и вращения в $2D$ -мерном “пространстве отображения”. Эти операторы суть квантовые аналоги нетёровских зарядов, связанных с инвариантностью относительно трансляций $z' = z + a$, $\bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}$ и $U(1)$ -вращений $z' = e^{i\alpha}z$, $\bar{z}' = e^{-i\alpha}\bar{z}$.

2.1.2. Волновые функции. Волновая функция Ψ_0 , соответствующая низшему УЛ, $H\Psi_{(0)} = \kappa\Psi_{(0)}$, определяется уравнением

$$a\Psi_{(0)}(z, \bar{z}) = 0 \iff (\partial_{\bar{z}} + \kappa z)\Psi_{(0)} = 0 \implies \Psi_{(0)} = e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(0)}(z), \quad (2.6)$$

т.е. сводится к голоморфной функции.

Волновая функция, отвечающая n -му УЛ, строится как

$$\Psi_{(n)}(z, \bar{z}) = [i(\partial_z - \kappa \bar{z})]^n e^{-\kappa|z|^2} \psi_{(n)}(z), \quad H\Psi_{(n)} = \kappa(2n+1)\Psi_{(n)}, \quad (2.7)$$

т.е. также выражается через голоморфную функцию. Каждый УЛ бесконечно вырожден вследствие $(P_z, P_{\bar{z}})$ -инвариантности. На каждом УЛ волновые функции образуют бесконечномерные представления этой группы с базисом z^m , $m > 0$ [12].

Инвариантная норма определяется как интеграл

$$\|\Psi_{(n)}\|^2 = \int dz d\bar{z} \bar{\Psi}_{(n)}(z, \bar{z}) \Psi_{(n)}(z, \bar{z}) \sim \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa|z|^2} \bar{\psi}_{(n)}(\bar{z}) \psi_{(n)}(z) < \infty. \quad (2.8)$$

Он сходится для любого монома $\psi_{(n)}(z) \sim z^m$.

2.1.3. Планарная модель Ландау как ВЗВ-модель. Будем считать 2κ в $[P_z, P_{\bar{z}}] = 2\kappa$ независимым генератором (“центральный зарядом”) и построим нелинейную реализацию этой неабелевой группы магнитных трансляций в фактор-пространстве по одномерной подгруппе, порождаемой 2κ . Выбирая экспоненциальную параметризацию для соответствующих элементов фактор-пространства, получаем

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= e^{i(zP_z + \bar{z}P_{\bar{z}})}, & g^{-1}dg &= i\omega_z P_z + i\omega_{\bar{z}} P_{\bar{z}} + i\omega_{\kappa} 2\kappa, \\ \omega_z &= dz, & \omega_{\bar{z}} &= d\bar{z}, & \omega_{\kappa} &= \frac{1}{2i}(z d\bar{z} - \bar{z} dz). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Мы видим, что ВЗ-член в L_b есть не что иное, как 1-форма Картана, связанная с генератором 2κ . В этой геометрической постановке операторы рождения и уничтожения $a^\dagger$ и a возникают как ковариантные производные:

$$\nabla_z = \partial_z - \kappa \bar{z}, \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + \kappa z, \quad (2.10)$$

в то время как волновая функция, отвечающая низшему УЛ, определяется ковариантным условием Коши–Римана:

$$\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0, \quad \Psi'_{(n)}(z', \bar{z}') = e^{-\kappa(a\bar{z} - \bar{a}z)}\Psi_{(n)}(z, \bar{z}), \quad z' = z + a, \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}. \quad (2.11)$$

2.1.4. *Обобщение на S^2* . Аналог планарного лагранжиана Ландау L_b на сфере S^2 (т.е. лагранжиан модели Хэлдейна) записывается в виде

$$\tilde{L}_b = \frac{1}{(1 + r^2|z|^2)^2} |\dot{z}|^2 - i s \frac{1}{1 + r^2|z|^2} (\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z). \quad (2.12)$$

Первый член здесь – это $(d = 1)$ -проекция квадрата инвариантного интервала на S^2 , второй член – $(d = 1)$ -член ВЗ на фактор-пространстве $S^2 \sim SU(2)/U(1)$, r – “обратный” радиус S^2 .

После квантования унитарные волновые функции на каждом уровне образуют конечномерные неприводимые представления группы $SU(2)$ со “спинами” $s, s + 1/2, s + 1, \dots$. Таким образом, каждый УЛ имеет конечное вырождение (в этом состоит важное отличие от планарного случая, и связано оно с тем фактом, что $SU(2)$ является компактной группой, в то время как ее контракция, группа магнитных трансляций, не компактна). Волновая функция низшего УЛ определяется ковариантным условием аналитичности на S^2 :

$$\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0, \quad \nabla_{\bar{z}} = (1 + r^2|z|^2)\partial_{\bar{z}} + U(1)\text{-связность}. \quad (2.13)$$

Можно показать, что эта волновая функция сводится к голоморфной функции z , компоненты которой образуют неприводимый $SU(2)$ -мультиплет со спином s . Волновые функции, отвечающие высшим УЛ, строятся во многом подобно планарному случаю и выражаются через голоморфные функции, описывающие неприводимые $SU(2)$ -мультиплеты со спинами $s + 1/2, s + 1, \dots$. В пределе $r \rightarrow 0$ воспроизводится планарная модель Ландау.

2.2. Низший УЛ и пространственная некоммутативность. Вернемся к случаю планарной модели Ландау. Разность энергий низшего и первого УЛ есть $E_1 - E_0 = \kappa$, и она стремится к бесконечности с ростом κ . В этом пределе выживает только низший УЛ, который описывается ВЗ-членом. Условие аналитичности $\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0$ теперь возникает как квантовая версия соответствующей связи в фазовом пространстве. Стандартный оператор координаты $Z = z$ не коммутирует с этой связью и поэтому должен быть подходящим образом модифицирован:

$$Z = z - \frac{1}{\kappa}\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{i\kappa}P_{\bar{z}}, \quad \bar{Z} = \frac{i}{\kappa}P_z, \quad [\bar{Z}, Z] = \frac{2}{\kappa}. \quad (2.14)$$

Новые операторы $Z, \bar{Z}$ параметризуют некоммутативную плоскость.

Подобная ситуация имеет место и в S^2 -случае: в пределе низшего УЛ выживает только ВЗ-член, и соответствующие операторы координат, коммутирующие с гамильтоновыми связями, параметризуют некоммутативную (“размытую”) версию S^2 [13].

3. СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЛАНДАУ: ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Под суперсимметричными моделями Ландау мы будем понимать квантово-механические модели заряженной частицы на однородном суперпространстве такие, что в бозонном пределе они сводятся либо к исходной модели Ландау для заряженной частицы, движущейся на плоскости в однородном магнитном поле, либо к ее сферической версии, разработанной Хэлдейном.

3.1. Суперсимметрия мировой линии и суперсимметрия в пространстве отображения. Один из путей суперсимметризации моделей Ландау состоит в том, что вводится суперсимметрия на мировой линии

$$t \Rightarrow (t, \theta, \bar{\theta}), \quad z, \bar{z} \Rightarrow \mathcal{Z}(t, \theta, \bar{\theta}), \quad \bar{\mathcal{Z}}(t, \theta, \bar{\theta}), \quad (3.1)$$

$z, \bar{z} \Rightarrow (z, \bar{z}, \psi, \bar{\psi}, \dots)$ – супермультиплет на мировой линии. Здесь $\mathcal{Z}$ – некоторые ($d = 1$)-суперполя. Соответствующие модели отвечают той или иной версии суперсимметричной квантовой механики [14] (см., например, работу [15]). В этом варианте суперсимметризации фермионные поля не имеют непосредственной геометрической интерпретации в отличие от бозонных полей $z, \bar{z}$, которые, как мы видели, являются параметрами фактор-пространства.

Другой способ суперрасширения моделей Ландау состоит во введении суперсимметрии в пространстве отображения. Простейшая возможность – расширить группу магнитных трансляций до супергруппы, включающей генераторы “магнитных супертрансляций” $\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}$ и фермионный аналог $U(1)$ -генератора F_b :

$$\begin{aligned} \text{групповое многообразие: } (z, \bar{z}) &\Rightarrow \text{супергрупповое многообразие: } (z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}), \\ (P_z, P_{\bar{z}}, F_b, \kappa) &\Rightarrow (P_z, P_{\bar{z}}, \Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}, F_b, F_f, \kappa, \dots), \\ \Pi_\zeta = \partial_\zeta + \kappa \bar{\zeta}, \quad \Pi_{\bar{\zeta}} = \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa \zeta, \quad F_f = \zeta \partial_\zeta - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}, \quad \{\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}\} &= 2\kappa. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этом случае фермионные поля имеют ясный геометрический смысл: это грассманы координаты, расширяющие двумерную плоскость до $(2|2)$ -мерной суперплоскости.

Примечательно, что две планарные суперсимметричные модели Ландау, построенные с привлечением второго подхода (см. разделы 4 и 5), вдобавок обладают еще и скрытой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией на мировой линии.

3.2. “Фермионная модель Ландау”. Прежде чем перейти к обсуждению суперсимметризаций моделей Ландау, стоит рассмотреть упрощенную “фермионную модель Ландау”, в которой бозонные $2D$ -координаты $z, \bar{z}$ заменены фермионными $\zeta, \bar{\zeta}$.

Соответствующие лагранжиан и гамильтониан записываются в виде

$$\begin{aligned} L_f &= \dot{\zeta} \dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{\zeta} \bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}} \zeta), \quad H_f = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha^\dagger] = -\alpha^\dagger \alpha - \kappa, \\ \alpha &= \partial_{\bar{\zeta}} - \kappa \zeta, \quad \alpha^\dagger = \partial_\zeta - \kappa \bar{\zeta}, \quad \{\alpha, \alpha^\dagger\} = -2\kappa. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Инвариантности порождаются генераторами $\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}$ и F_f , определенными в (3.2),

$$[H_f, \Pi_\zeta] = [H_f, \Pi_{\bar{\zeta}}] = [H_f, F_f] = 0. \quad (3.4)$$

Квантовое “гильбертово пространство” модели включает основное состояние и единственное возбужденное состояние:

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= e^{-\kappa \zeta \bar{\zeta}} \psi_0(\zeta), \quad \psi^{(1)} = e^{\kappa \zeta \bar{\zeta}} \psi_1(\bar{\zeta}), \quad \alpha \psi^{(0)} = \alpha^\dagger \psi^{(1)} = 0, \\ \psi_0 &= A_0 + \zeta B_0, \quad \psi_1 = A_1 + \bar{\zeta} B_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пары (A_0, B_0) , (A_1, B_1) образуют два неприводимых мультиплета группы магнитных супертрансляций с энергиями $-\kappa$ и κ .

Уже в этом простейшем примере мы сталкиваемся с проблемой, которая присутствует также и в суперрасширениях модели Ландау, рассмотренных в следующих разделах. Это появление духов и необходимость их “изгнания”.

При естественном инвариантном выборе внутреннего произведения,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\zeta d\bar{\zeta} \overline{\phi(\zeta, \bar{\zeta})} \psi(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (3.6)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \psi^{(0)} | \psi^{(1)} \rangle &= 0, \\ \langle \psi^{(0)} | \psi^{(0)} \rangle &= 2\kappa \bar{A}_0 A_0 + \bar{B}_0 B_0, \\ \langle \psi^{(1)} | \psi^{(1)} \rangle &= -2\kappa \bar{A}_1 A_1 - \bar{B}_1 B_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Состояния A_1 , B_1 имеют отрицательную норму, т.е. они представляют собой духи¹⁾. Как обычно, присутствие духов должно рассматриваться как нежелательное свойство, поскольку оно может привести к нарушению унитарности²⁾. В данном случае эту трудность можно преодолеть путем введения нетривиальной метрики на “гильбертовом пространстве”:

$$\langle \langle \phi | \psi \rangle \rangle := \langle G\phi | \psi \rangle, \quad G(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}) = \psi^{(0)} - \psi^{(1)}, \quad G = -\kappa^{-1} H_f. \quad (3.8)$$

Характерные черты этой процедуры сводятся к следующим.

1. Генераторы симметрий Π_ζ , $\Pi_{\bar{\zeta}}$ и F_f коммутируют с метрикой G , поэтому новое внутреннее произведение остается инвариантным. Однако свойства эрмитова сопряжения операторов, которые не коммутируют с G , изменяются, например

$$\alpha^\dagger = -\alpha^\dagger \Rightarrow H_f = \alpha^\dagger \alpha - \kappa, \quad \{\alpha, \alpha^\dagger\} = 2\kappa.$$

2. Относительно нового произведения импульс, канонически сопряженный координате, оказывается также и эрмитово сопряженным той же координате:

$$\zeta^\dagger = \frac{1}{\kappa} \partial_\zeta, \quad (\bar{\zeta})^\dagger = \frac{1}{\kappa} \partial_{\bar{\zeta}}, \quad (\partial_\zeta)^\dagger = \kappa \zeta, \quad (\partial_{\bar{\zeta}})^\dagger = \kappa \bar{\zeta}.$$

На этом мы закончим обсуждение упрощенной модели.

4. МОДЕЛЬ ЛАНДАУ НА СУПЕРПЛОСКОСТИ

4.1. Лагранжиан, гамильтониан и симметрии. Модель Ландау на суперплоскости может рассматриваться как “гибрид” бозонной и фермионной моделей Ландау. Она описывается следующим лагранжианом:

$$L = L_f + L_b = |\dot{z}|^2 + \dot{\zeta} \dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + \dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta). \quad (4.1)$$

¹⁾Появление духов в $(d = 1)$ -суперсимметричных моделях с кинетическими членами второго порядка для фермионов было отмечено в работе [16].

²⁾См., однако, работу [17].

Соответствующий квантовый гамильтониан имеет вид

$$H = a^\dagger a - \alpha^\dagger \alpha = \partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} - \partial_z \partial_{\bar{z}} + \kappa(\bar{z} \partial_{\bar{z}} + \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} - z \partial_z - \zeta \partial_{\zeta}) + \kappa^2(z \bar{z} + \zeta \bar{\zeta}). \quad (4.2)$$

Полный набор симметрий помимо тех, что порождены генераторами P_z , $P_{\bar{z}}$ и Π_{ζ} , $\Pi_{\bar{\zeta}}$, включает также новые симметрии с генераторами

$$Q = z \partial_{\zeta} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{z}}, \quad Q^\dagger = \bar{z} \partial_{\bar{\zeta}} + \zeta \partial_z, \quad C = F_b + F_f = z \partial_z + \zeta \partial_{\zeta} - \bar{z} \partial_{\bar{z}} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}, \quad (4.3)$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = [H, C] = 0. \quad (4.4)$$

Эти генераторы порождают супералгебру $ISU(1|1)$, являющуюся контракцией $SU(2|1)$:

$$\{Q, Q^\dagger\} = C, \quad [C, Q] = [C, Q^\dagger] = 0, \quad [Q, P_z] = i\Pi_{\zeta}, \quad \{Q^\dagger, \Pi_{\zeta}\} = iP_z. \quad (4.5)$$

4.2. Состояния и вырождение. По определению волновая функция низшего УЛ $\psi^{(0)}$ обращается в нуль под действием как бозонных, так и фермионных операторов уничтожения a и α :

$$\begin{aligned} (\partial_{\bar{z}} + \kappa z) \psi^{(0)} &= (\partial_{\bar{\zeta}} - \kappa \zeta) \psi^{(0)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi^{(0)} &= e^{-\kappa K_2} \psi_{\text{an}}^{(0)}(z, \zeta), \quad K_2 = |z|^2 + \zeta \bar{\zeta}, \quad H \psi^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

т.е. она имеет дополнительное двукратное вырождение, $\psi_{\text{an}}^{(0)}(z, \zeta) = A^{(0)}(z) + \zeta B^{(0)}(z)$.

Гильбертово пространство для N -го УЛ определяется волновой функцией

$$\begin{aligned} \psi^{(N)} &\sim (a^\dagger)^N e^{-\kappa K_2} \psi_+^{(N)}(z, \zeta) + (a^\dagger)^{N-1} \alpha^\dagger e^{-\kappa K_2} \psi_-^{(N)}(z, \zeta), \\ H \psi^{(N)} &= 2\kappa N \psi^{(N)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\psi_{\pm}^{(N)}(z, \zeta) = A_{\pm}^{(N)}(z) + \zeta B_{\pm}^{(N)}(z)$. Каждый УЛ с $N > 0$ четырехкратно вырожден.

Естественное $ISU(1|1)$ -инвариантное внутреннее произведение

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\mu \overline{\phi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})} \psi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}), \quad d\mu = dz d\bar{z} d\zeta d\bar{\zeta}, \quad (4.8)$$

приводит к отрицательным нормам для некоторых состояний, как и в упрощенной фермионной модели. Однако все нормы можно сделать положительными, вводя ту же самую метрику на гильбертовом пространстве:

$$G = -\kappa^{-1} H_f = \frac{1}{\kappa} [\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{\zeta} \zeta + \kappa(\zeta \partial_{\zeta} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}})]. \quad (4.9)$$

Метрика G коммутирует с генераторами всех симметрий за исключением Q , $Q^\dagger$. Следовательно, по отношению к новому произведению $\langle G\phi | \psi \rangle$ оператор, сопряженный к Q , не совпадает с $Q^\dagger$. Новый сопряженный оператор $Q^\ddagger$ легко вычисляется:

$$Q^\ddagger = Q^\dagger - \frac{i}{\kappa} S, \quad S = i(\partial_z \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{z} \zeta - \kappa \bar{z} \partial_{\bar{\zeta}} - \kappa \zeta \partial_z). \quad (4.10)$$

Поскольку оба оператора $Q^\dagger$ и $Q^\ddagger$ коммутируют с полным гамильтонианом H (так как $[H, G] = 0$), их разность S также коммутирует с ним, $[H, S] = [H, S^\ddagger] = 0$, и, следовательно, порождает новую (скрытую) симметрию модели.

4.3. Скрытая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия мировой линии. Операторы S , $S^\dagger$ выражаются в виде

$$S = a^\dagger \alpha, \quad S^\dagger = a \alpha^\dagger \quad (4.11)$$

и, как легко проверить, генерируют $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию на мировой линии:

$$[H, S] = [H, S^\dagger] = 0, \quad \{S, S^\dagger\} = 2\kappa H, \quad \{S, S\} = 0 = \{S^\dagger, S^\dagger\}. \quad (4.12)$$

Другими словами, $(2\kappa)^{-1/2}S$, $(2\kappa)^{-1/2}S^\dagger$ и H образуют $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ супералгебру Пуанкаре.

Генераторы S , $S^\dagger$ аннигилируют основное состояние, соответствующее низшему УЛ:

$$S\psi^{(0)} = S^\dagger\psi^{(0)} = 0, \quad (4.13)$$

поэтому основное состояние является синглетом $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. Следовательно, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия не нарушена, и волновые функции, отвечающие высшим УЛ, образуют ее неприводимые мультиплеты. Каждое такое состояние состоит из двух неприводимых мультиплетов супергруппы $ISU(1|1)$, чем объясняется четырехкратное вырождение УЛ с $N > 0$. Интересно, что для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии существует следующий конечномерный аналог модельно-независимого представления Сугавары в терминах $ISU(1|1)$ -зарядов:

$$S = 2i\kappa Q^\dagger + P\P^\dagger, \quad S^\dagger = -2i\kappa Q + P^\dagger\P, \quad H = P^\dagger P + \Pi^\dagger\P - 2\kappa C, \quad (4.14)$$

т.е. S , $S^\dagger$, H принадлежат обертывающей алгебре супералгебры $ISU(1|1)$.

На классическом уровне скрытая суперсимметрия мировой линии реализуется следующими преобразованиями полей z , ζ и сопряженных к ним:

$$\delta z = \epsilon \dot{\zeta}, \quad \delta \zeta = -\dot{z} \bar{\epsilon}. \quad (4.15)$$

Как и должно быть, на массовой поверхности они замыкаются на производную полей по времени, если учесть уравнения движения $\ddot{z} = 2i\kappa \dot{z}$, $\ddot{\zeta} = 2i\kappa \dot{\zeta}$. $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия существует только при $\kappa \neq 0$, т.е. она представляет собой род динамической суперсимметрии.

В разделе 6 будет показано, как воспроизвести эту реализацию исходя из явно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричного суперполевого подхода вне массовой оболочки.

5. МОДЕЛЬ ПЛАНАРНОГО СУПЕРФЛАГА

В этом разделе мы рассмотрим основные черты еще одной $ISU(1|1)$ -инвариантной модели, обобщающей модель Ландау: модели Ландау на планарном суперфлаге [7].

5.1. Классическая и квантовая структуры модели.

5.1.1. *Определения.* Модель Ландау на суперфлаге [5] описывает заряженную частицу на фактор-суперпространстве $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$. Один из двух ВЗ-членов на подгруппе $U(1) \times U(1)$ есть лоренцев член взаимодействия с однородным магнитным полем напряженности 2κ на S^2 . Второй ВЗ-член является чисто фермионным, с постоянным коэффициентом M .

В планарном пределе, когда $SU(2|1)$ переходит в $ISU(1|1)$ и S^2 – в евклидову двумерную плоскость, действие, полученное в работе [5], переходит в следующее действие [7]:

$$L = (1 + \bar{\xi}\xi)|\dot{z}|^2 + (\bar{\xi}\dot{z}\dot{\zeta} - \xi\dot{z}\dot{\bar{\zeta}}) + \bar{\xi}\dot{\xi}\dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + \dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta) + iM(\bar{\xi}\dot{\xi} + \xi\dot{\bar{\xi}}). \quad (5.1)$$

Основное отличие этой модели от модели Ландау на суперплоскости состоит в том, что в (5.1) фигурирует дополнительная фермионная переменная $\xi(t)$, $\bar{\xi}(t)$. Ее можно интерпретировать как поле Намбу–Голдстоуна, связанное с $ISU(1|1)$ -генераторами Q , $Q^\dagger$. Благодаря этой дополнительной переменной удается построить второй ВЗ-член и одновременно избежать появления нестандартного кинетического члена второго порядка для ζ , $\bar{\zeta}$. Несмотря на эти привлекательные свойства в квантовой теории при естественном определении внутреннего произведения все еще присутствуют отрицательные нормы.

5.1.2. *Квантование.* В теории имеются связи на фазовом пространстве (из-за фермионных членов первого порядка в (5.1)). Решая эти связи, можно найти общую структуру волновой функции:

$$\Psi = K_1^M e^{-\kappa K_2} \Psi_{\text{ch}}(z, \bar{z}_{\text{sh}}, \zeta, \xi), \quad K_1 = 1 + \bar{\xi}\xi, \quad \bar{z}_{\text{sh}} = \bar{z} - \xi\bar{\zeta}. \quad (5.2)$$

Операторный гамильтониан в применении к этим “физическим” волновым функциям записывается в виде

$$H = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 2\kappa, \\ \hat{a} = i\sqrt{K_1}(\partial_{\bar{z}} + \kappa z_{\text{sh}} - \bar{\xi}\partial_{\bar{\zeta}}), \quad \hat{a}^\dagger = i\sqrt{K_1}(\partial_z - \kappa \bar{z}_{\text{sh}} - \xi\partial_{\zeta}). \quad (5.3)$$

На N -м УЛ физическая киральная волновая функция имеет специальный вид: она выражается через *аналитическую* функцию от (z, ζ, ξ) согласно формуле

$$\Psi_{\text{ch}}^{(N)} = \tilde{\nabla}_z^N \Psi_{\text{an}}^{(N)}(z, \zeta, \xi), \quad \tilde{\nabla}_z = \partial_z - 2\kappa \bar{z}_{\text{sh}} - \xi\partial_{\zeta}, \quad H\Psi_{\text{ch}}^{(N)} = 2\kappa N\Psi_{\text{ch}}^{(N)}. \quad (5.4)$$

$ISU(1|1)$ -инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d\mu \int d\xi d\bar{\xi} \bar{\Phi} \Psi = \int d\mu e^{-2\kappa K_2} \int d\xi d\bar{\xi} K_1^{2M} \overline{\Phi_{\text{ch}}} \Psi_{\text{ch}}, \quad (5.5)$$

где $d\mu = dz d\bar{z} d\zeta d\bar{\zeta}$ – мера интегрирования модели на суперплоскости. Записав разложение

$$\Psi_{\text{an}}^{(N)} = A^{(N)}(z) + \zeta B^{(N)}(z) + \xi C^{(N)}(z) + \zeta \xi B^{(N)}(z), \quad (5.6)$$

можно показать, что

$$\|\Psi\|^2 \propto \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa|z|^2} [(2M - N)(2\kappa A^\dagger A + B^\dagger B) + 2\kappa C^\dagger C + D^\dagger D]. \quad (5.7)$$

Таким образом, при $N > 2M > 0$ и $M < 0$ появляются отрицательные нормы. При $N = 2M$ присутствуют нулевые нормы.

Как и в предыдущих случаях, можно переопределить внутреннее произведение путем введения нетривиального метрического оператора на пространстве состояний. На аналитических функциях этот оператор задается выражением

$$G_{\text{an}} = [\xi, \partial_\xi] = -1 + 2\xi \partial_\xi. \quad (5.8)$$

После такого переопределения квадрат нормы (под знаком интеграла) приобретает вид

$$\propto [(N - 2M)(2\kappa A^\dagger A + B^\dagger B) + 2\kappa C^\dagger C + D^\dagger D]. \quad (5.9)$$

Теперь при $M < 0$ все состояния обладают положительной нормой. Это справедливо и при $M = 0$ с тем исключением, что половина состояний с $N = 0$ имеет нулевую норму. Естественно определить (супер)пространство физических состояний как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами. В результате состояния с нулевыми нормами не дают вклада в физический спектр. Получаем, что при $M = 0$ модель на планарном суперфлаге имеет точно такой же спектр, включая вырождение, как и модель на суперплоскости, и, следовательно, эквивалентна последней. При $M > 0$ остаются отрицательные нормы для значений $N < 2M$, так что в этом интервале параметров необходимо сохранить “наивное” определение нормы.

5.2. Скрытая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия. Как и в модели на суперплоскости, переход к новому определению нормы меняет правило эрмитова сопряжения $ISU(1|1)$ -суперзаряда Q , в результате чего естественным путем появляются новые сохраняющиеся суперзаряды. В применении к аналитическим волновым функциям эти суперзаряды даются выражениями

$$S_{\text{an}} = 2i\kappa\xi(2M - N_{\text{an}}), \quad S_{\text{an}}^\dagger = 2i\kappa\partial_\xi, \quad \{S_{\text{an}}, S_{\text{an}}^\dagger\} = 2\kappa(H_{\text{an}} - 4\kappa M). \quad (5.10)$$

Эта квантовая суперсимметрия на мировой линии существует при $M \leq 0$, поскольку невозможно достичь положительной определенности антикоммутатора в (5.10) при $M > 0$ во всей области изменения параметров и на каждом УЛ.

При $M = 0$ оба оператора S и $S^\dagger$ аннигилируют основное состояние ($N = 0$) по модулю состояний с нулевой нормой. В этом случае мировая суперсимметрия не нарушена, основное состояние является $\mathcal{N} = 2$ синглетом и обладает только двукратным вырождением, которое связано с $ISU(1|1)$ -инвариантностью. При $N > 0$ волновые функции образуют нетривиальные мультиплеты $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, причем каждый такой мультиплет состоит из двух неприводимых $ISU(1|1)$ -мультиплетов, благодаря чему возникает четырехкратное вырождение. При $M = 0$ планарный суперфлаг эквивалентен модели Ландау на суперплоскости. При $M < 0$ основное состояние не инвариантно относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, которая, таким образом, спонтанно нарушена в этом случае.

Как и в модели Ландау на суперплоскости, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия на массовой поверхности имеет реализацию в терминах исходных $d = 1$ переменных:

$$\delta z = -\epsilon\xi(\dot{z} + \bar{\xi}\dot{\bar{z}}), \quad \delta\bar{z} = -[(1 + \bar{\xi}\xi)\dot{z} + \bar{\xi}\dot{\bar{z}}]\bar{\epsilon}, \quad \delta\xi = -2i\kappa\bar{\epsilon} \quad (5.11)$$

(реализация на $\bar{z}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\xi}$ может быть получена путем комплексного сопряжения). С учетом уравнений движения эти преобразования на каждом поле замыкаются на производную по времени. В частности, правильное замыкание на ξ получается благодаря тому, что $\dot{\xi} = 0$ на массовой оболочке. Замыкание пропорционально κ , поэтому $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия существует только при $\kappa \neq 0$, т.е., как и в модели Ландау на суперплоскости, она носит динамический характер. Было бы интересно вывести эту реализацию и действие (5.1) из подходящего $\mathcal{N} = 2$ суперполевого формализма вне массовой оболочки, как это сделано в следующем разделе для модели на суперплоскости.

6. ЯВНАЯ $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЯ

В этом разделе модель Ландау на суперплоскости (см. раздел 4) переформулирована в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперполей мировой линии.

6.1. Суперполевое действие модели на суперплоскости.

6.1.1. *Определения.* Основные объекты суть $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ киральные бозонное и фермионное суперполя Φ и Ψ одинаковой размерности.

Вещественное $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ суперпространство параметризовано координатами

$$(\tau, \theta, \bar{\theta}). \quad (6.1)$$

Левое и правое киральные суперпространства определяются как

$$(t_L, \theta), \quad (t_R, \bar{\theta}), \quad t_L = \tau - i\theta\bar{\theta}, \quad t_R = \tau + i\theta\bar{\theta} = t_L + 2i\theta\bar{\theta}. \quad (6.2)$$

Удобно работать в левом (киральном) базисе, поэтому для краткости будем использовать обозначение $t_L \equiv t$, $t_R = t + 2i\theta\bar{\theta}$. В этом базисе $\mathcal{N} = 2$ ковариантные спинорные производные имеют вид

$$\bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \quad D = \frac{\partial}{\partial\theta} - 2i\bar{\theta}\partial_t, \quad \{D, \bar{D}\} = 2i\partial_t, \quad D^2 = \bar{D}^2 = 0. \quad (6.3)$$

Киральные суперполя Φ и Ψ подчиняются связям

$$\bar{D}\Phi = \bar{D}\Psi = 0 \quad (6.4)$$

и в левокиральном базисе имеют следующее компонентное разложение:

$$\Phi(t, \theta) = z(t) + \theta\chi(t), \quad \Psi(t, \theta) = \psi(t) + \theta h(t), \quad (6.5)$$

где комплексные поля $z(t)$, $h(t)$ представляют собой бозоны и $\chi(t)$, $\psi(t)$ – фермионы. Разложение сопряженных суперполей в том же левокиральном базисе записывается как

$$\bar{\Phi} = \bar{z} - \bar{\theta}\bar{\chi} + 2i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}}, \quad \bar{\Psi} = \bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{h} + 2i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{\psi}}. \quad (6.6)$$

Нам также потребуется компонентная структура следующих суперполей:

$$\begin{aligned} D\Phi &= \chi - 2i\bar{\theta}\dot{z} + 2i\theta\bar{\theta}\dot{\chi}, & \bar{D}\Phi &= (D\Phi)^\dagger = \bar{\chi} + 2i\theta\dot{\bar{z}}, \\ D\Psi &= h - 2i\bar{\theta}\dot{\psi} + 2i\theta\bar{\theta}\dot{h}, & \bar{D}\Psi &= -(D\Psi)^\dagger = -\bar{h} + 2i\theta\dot{\bar{\psi}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Интеграл Березина нормирован условием

$$\int d^2\theta (\theta\bar{\theta}) = 1. \quad (6.8)$$

6.1.2. *Суперполевое действие.* Суперполевое действие, приводящее в компонентах к действию модели Ландау на суперплоскости (4.1), имеет вид

$$S = - \int dt d^2\theta \{ \Phi \bar{\Phi} + \Psi \bar{\Psi} + \rho [\Phi D\Psi - \Phi \bar{D}\bar{\Psi}] \} \equiv \int dt d^2\theta \{ \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \}. \quad (6.9)$$

Здесь ρ – вещественный параметр. Проводя интегрирование по грассмановым переменным, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\Rightarrow -2i(z\dot{\bar{z}} + \psi\dot{\bar{\psi}}) - (\chi\bar{\chi} + h\bar{h}), \\ \mathcal{L}_2 &\Rightarrow -2i\rho(z\dot{h} + \chi\dot{\psi} + \dot{\bar{z}}\bar{h} + \bar{\chi}\dot{\bar{\psi}}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Поля h и χ являются вспомогательными и могут быть исключены с помощью их уравнений движения:

$$\chi = 2i\rho\dot{\bar{\psi}}, \quad h = -2i\rho\dot{\bar{z}}. \quad (6.11)$$

После подстановки этих выражений в (6.10) получаем

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \Rightarrow -2i(z\dot{\bar{z}} + \psi\dot{\bar{\psi}}) + 4\rho^2(\dot{z}\dot{\bar{z}} + \dot{\psi}\dot{\bar{\psi}}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}. \quad (6.12)$$

Сделаем переобозначения

$$\bar{\psi} = \zeta, \quad \psi = \bar{\zeta}, \quad 4\rho^2 \equiv \frac{1}{\kappa} \quad (6.13)$$

и интегрируя по частям, лагранжиан (6.12) можно привести к виду

$$\hat{\mathcal{L}} = -i(z\dot{\bar{z}} - \bar{z}\dot{z} + \zeta\dot{\bar{\zeta}} - \bar{\zeta}\dot{\zeta}) + \frac{1}{\kappa}(\dot{z}\dot{\bar{z}} + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}}). \quad (6.14)$$

Он совпадает с лагранжианом модели на суперплоскости (4.1) с точностью до обращения времени $t \rightarrow -t$ и общего коэффициента $-\kappa$ перед действием.

6.2. Симметрии.

6.2.1. *Суперсимметрия.* По построению суперполевое действие (6.9) обладает явной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией. $\mathcal{N} = 2$ преобразования компонентных полей могут быть найдены из суперполевых вариаций

$$\delta\Phi = -[\epsilon Q - \bar{\epsilon}\bar{Q}]\Phi, \quad \delta\Psi = -[\epsilon Q - \bar{\epsilon}\bar{Q}]\Psi, \quad (6.15)$$

где в левокиральном базисе

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - 2i\theta\partial_t, \quad \{Q, \bar{Q}\} = -2i\partial_t = 2P_0. \quad (6.16)$$

Из (6.15), (6.16) следует, что вне массовой оболочки

$$\delta z = -\epsilon\chi, \quad \delta\chi = 2i\bar{\epsilon}\dot{z}, \quad \delta\psi = -\epsilon h, \quad \delta h = 2i\bar{\epsilon}\dot{\psi}. \quad (6.17)$$

После подстановки выражений (6.11) для вспомогательных полей и с учетом переобозначений (6.13) эти преобразования принимают вид

$$\delta z = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\epsilon\dot{\zeta}, \quad \delta\zeta = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\bar{\epsilon}\dot{z}. \quad (6.18)$$

Они совпадают с (4.15) (с точностью до перенормировки параметров $\epsilon, \bar{\epsilon}$).

6.2.2. *Две $ISU(1|1)$ -симметрии.* Суперполевые $ISU(1|1)$ -преобразования имеют несколько более сложный вид. Главное требование к ним – совместность с условиями киральности (6.4). В то время как супертрансляции в пространстве отображения действуют как сдвиги Φ и Ψ :

$$\delta_b \Phi = b, \quad \delta_\beta \Psi = \nu, \quad (6.19)$$

где b и ν – комплексные константные бозонные и фермионные параметры, нечетные $SU(1|1)$ -преобразования вне массовой оболочки содержат в явном виде θ и $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \bar{D}\left(\omega\bar{\theta}\bar{\Psi} - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{\omega}\theta D\Phi\right), & \delta\Psi &= \bar{D}\left(\omega\bar{\theta}\bar{\Phi} - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{\omega}\theta D\Psi\right), \\ \delta\bar{\Phi} &= D\left(\bar{\omega}\theta\Psi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\omega\bar{\theta}\bar{D}\bar{\Phi}\right), & \delta\bar{\Psi} &= -D\left(\bar{\omega}\theta\Phi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\omega\bar{\theta}\bar{D}\bar{\Psi}\right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где $\omega, \bar{\omega}$ – соответствующие грассмановы параметры преобразований. Эти преобразования согласованы с киральностью и антикиральностью суперполевых вариаций благодаря присутствию проекторов $\bar{D}$ и D в их правых частях. Преобразования компонентных полей имеют вид

$$\delta z = \omega\bar{\psi}, \quad \delta\chi = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\bar{\omega}\dot{z}, \quad \delta\psi = \omega\bar{z}, \quad \delta h = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\bar{\omega}\dot{\psi} \quad (6.21)$$

(надо добавить и комплексно-сопряженные к ним). Они замыкаются на C -преобразования, реализованные как

$$\delta_c z = i\alpha z, \quad \delta_c \psi = -i\alpha\psi, \quad \delta_c \chi = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\alpha\dot{\psi}, \quad \delta_c h = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\alpha\dot{z} \quad (6.22)$$

(плюс комплексно-сопряженные вариации), где α – параметр преобразования. Выражения для вспомогательных полей на массовой оболочке (6.9) совместимы с преобразованиями (6.21), (6.22). Имеется полное соответствие между преобразованиями (6.21), (6.22) и $ISU(1|1)$ -генераторами (4.3).

Из-за явного присутствия θ в (6.20) эти $SU(1|1)$ -преобразования не коммутируют с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией мировой линии. Любопытно, что существует и другой тип “внутренних” нечетных преобразований, которые по построению коммутируют с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией:

$$\delta\Phi = \lambda\left(\Psi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{D}\bar{\Phi}\right), \quad \delta\Psi = \bar{\lambda}\left(\Phi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{D}\bar{\Psi}\right), \quad (6.23)$$

где λ – соответствующий грассманов параметр. На компонентных полях вариации (6.23) порождают следующие переобразования:

$$\delta z = \lambda\left(\psi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{\chi}\right) \Rightarrow \lambda\left(\psi - \frac{i}{2\kappa}\dot{\psi}\right), \quad (6.24)$$

$$\delta\psi = \bar{\lambda}\left(z + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar{h}\right) \Rightarrow \bar{\lambda}\left(z + \frac{i}{2\kappa}\dot{z}\right), \quad (6.25)$$

$$\delta\chi = -\lambda\left(h + \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\dot{z}\right) \Rightarrow 0,$$

$$\delta h = -\bar{\lambda}\left(\chi - \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\dot{\psi}\right) \Rightarrow 0. \quad (6.26)$$

Здесь стрелка означает переход к вариации на массовой поверхности (со вспомогательными полями, исключенными в соответствии с (6.11)). Легко проверить инвариантность (6.12) и (6.14) относительно (6.24), (6.25). Преобразования (6.23) порождают $SU(1|1)$ -супергруппу, отличающуюся от “стандартной” (6.20)–(6.22). Вычисляя скобку Ли двух преобразований (6.26), находим явную суперполевую реализацию соответствующего $\tilde{C}$ -преобразования:

$$\delta_{\tilde{e}}\Phi = i\beta\left(\Phi + \frac{i}{2\kappa}\dot{\Phi}\right), \quad \delta_{\tilde{e}}\Psi = i\beta\left(\Psi + \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\overline{D}\Phi + \frac{i}{2\kappa}\dot{\Psi}\right). \quad (6.27)$$

Как и следовало ожидать, эти преобразования коммутируют с (6.23). Вместе с супертрансляциями (6.19) $SU(1|1)$ -преобразования (6.23) и (6.27) образуют еще одну супергруппу $ISU(1|1)$. Эта супергруппа не коммутирует со “стандартной” (хотя обе имеют общий супертрансляционный сектор): замыкание этих двух супергрупп содержит некоторые новые преобразования, которые, по-видимому, порождают бесконечномерную группу симплектических диффеоморфизмов суперпространства отображения (присутствие скрытых симметрий такого типа в действии (6.12) на массовой поверхности отмечено в работе [7]).

Остается построить $\mathcal{N} = 2$ суперполевую формулировку модели планарного суперфлага. Ее основными элементами должны быть те же суперполя Φ и Ψ , дополненные новым голдстоуновским киральным спинорным суперполем $\Omega = \xi(t) + \theta g(t)$. Формулировка компонентного действия (5.1) в формализме первого порядка [7] может стать подходящей отправной точкой для такого построения. Одной из интересных проблем для дальнейших исследований является построение моделей, подобных модели на суперфлаге, исходя из $\mathcal{N} = 2$ суперполевого формализма. Отметим также, что подход, изложенный в этом разделе, по-видимому, может быть использован для построения обобщений моделей на суперплоскости и суперфлаге со скрытой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией на мировой линии (и, возможно, суперсимметриями с $\mathcal{N} > 4$).

7. РЕЗЮМЕ

Кратко суммируем содержание работы.

Самосогласованные суперрасширения бозонной модели Ландау существуют [4]–[9] и могут интерпретироваться как сигма-модели ВЗВ-типа на соответствующих градуированных расширениях группы “магнитных трансляций”, лежащей в основе исходной модели Ландау.

Несмотря на появление нежелательных отрицательных норм при “естественном” выборе инвариантного внутреннего произведения эту трудность можно обойти, переопределив внутреннее произведение в духе работ [10], [11].

Интригующей общей чертой планарных суперрасширений модели Ландау является наличие скрытой динамической $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии [8], [9]. Сохраняется ли это свойство в моделях Ландау на суперсфере и суперфлаге? Возможно ли во всех случаях воспроизвести его исходя из альтернативного суперполевого формализма, как в модели на суперплоскости? Существуют ли обобщения на высшие $\mathcal{N}$? Желательно иметь ответы на эти вопросы.

Что касается физических применений, то прежде всего хотелось бы полностью осознать, какие явления описываются суперсимметричными версиями КЭХ и каков физический смысл дополнительных фермионных переменных.

Благодарности. Я благодарен организаторам семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы”, пригласившим меня сделать доклад, ставший основой этой статьи. Большинство представленных результатов получено в сотрудничестве с Т. Картрайтом, Л. Мезинцеску и П. К. Таунсендом, которым я выражаю свою глубокую признательность. Работа поддержана РФФИ (грант № 06-02-16684), INTAS (грант № 05-7928) и Программой Гейзенберг–Ландау. Я благодарен Laboratoire de Physique Ecole Normale Supérieure (Lyon, France) за гостеприимство на последних этапах этой работы и Ф. Дельдуку за полезные замечания.

Список литературы

- [1] L. Landau, *Z. Phys.*, **64** (1930), 629–637.
- [2] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 605–608.
- [3] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [4] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *Fuzzy $CP^{(n|m)}$ as a quantum superspace*, [arXiv: hep-th/0311159](#).
- [5] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *A super-flag Landau model*, [arXiv: hep-th/0404108](#).
- [6] K. Hasebe, Y. Kimura, *Nucl. Phys. B*, **709** (2005), 94–114; [arXiv: hep-th/0409230](#); K. Hasebe, *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 206802; [arXiv: hep-th/0411137](#).
- [7] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *JHEP*, **01** (2006), 143; [arXiv: hep-th/0510019](#).
- [8] T. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *JHEP*, **04** (2007), 020; [arXiv: hep-th/0612300](#).
- [9] K. Hasebe, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 105017; [arXiv: hep-th/0503162](#).
- [10] C. M. Bender, *Contemp. Phys.*, **46** (2005), 277–292; [arXiv: quant-ph/0501052](#); *Making sense of non-Hermitian Hamiltonians*, [arXiv: hep-th/0703096](#).
- [11] T. Curtright, L. Mezincescu, *Biorthogonal quantum systems*, [arXiv: quant-ph/0507015](#).
- [12] H. Elvang, J. Polchinski, *The Quantum Hall effect on R^4* , [arXiv: hep-th/0209104](#).
- [13] J. Madore, *Classical Quantum Gravity*, **9** (1992), 69–87.
- [14] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **188**:3 (1981), 513–554.
- [15] В. П. Акулов, А. И. Пашнев, *ТМФ*, **65** (1985), 84–92.
- [16] Д. В. Волков, А. И. Пашнев, *ТМФ*, **44**:3 (1980), 321–326.
- [17] D. Robert, A. V. Smilga, *Supersymmetry vs ghosts*, [arXiv: math-ph/0611023](#).