Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Кашлев, Распределение плотности потока и уравнение баланса энергии каскадных частиц в твердых телах, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 3, 485–499

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:42:55

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА И УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ КАСКАДНЫХ ЧАСТИЦ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В рамках предложенного подхода в теорию введен основной термодинамический параметр – квазitemпература каскадных частиц, отличная от температуры решетки, и в дальнейшем построено уравнение баланса энергии частиц на основе термодинамического описания системы. Вместе с тем в работе дан анализ плотности потока каскадных частиц, его стационарного значения и временной эволюции.

1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ КАСКАДОВ СМЕЩЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Вопросы термодинамики каскадных процессов в твердых телах, анализ которых необходим для полного понимания каскадообразования, вынуждают искать новые подходы к решению проблемы. В качестве такого подхода предлагается “гибридное” описание каскадов: с одной стороны, на основе традиционной теории марковских процессов, с другой – методом неравновесного статистического функционала [1].

Радиационные повреждения кристалла в случае, если бомбардирующие частицы способны передать энергию, большую чем пороговая энергия, необходимая для смещения атома решетки, достаточно сложны. Высокая энергия первично выбитого атома (ПВА) определяет возможность развития каскада смещений вследствие соударений выбитого из узла движущегося атома (каскадной частицы) с атомами, локализованными в узлах решетки. Если принять традиционное деление процесса каскадообразования на несколько этапов [2], то размножение смещенных атомов происходит только на первом, так называемом каскадном этапе (характерное время порядка 10^{-13} с). На следующем релаксационном (с характерным временем порядка 10^{-12} с) этапе за счет многократных подпороговых столкновений происходит перераспределение энергии, полученной от излучения. В данной работе представлен полный анализ баланса энергии в подсистеме каскадных частиц (КЧ), причем мы ограничились расчетом баланса на ранних этапах каскадообразования, вслед за которыми идет термализация каскада.

*Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН, Москва, Россия

Сформулируем используемые модельные предположения:

А. Будем рассматривать каскадный процесс в сплошной среде. Конечно, такая модель не позволяет включить в рассмотрение эффекты, обусловленные структурой кристаллической решетки, такие как фокусирующие замещающие столкновения, каналирование и коррелированные замещения. Однако в большинстве ситуаций, представляющих физический интерес (например, каскады, образующиеся при облучении нейтронами с энергией порядка 1 МэВ), пространственная структура каскада незначительно влияет [3] на энергетическое распределение КЧ. Более того, оказалось [4], что эффекты, обусловленные кристаллической структурой, фактически не влияют на число дефектов в каскаде. Таким образом, имеются веские указания на то, что каскадный процесс в сплошной среде можно считать адекватной моделью каскада в кристаллическом твердом теле, хотя в рамках этой модели нельзя достигнуть высокой точности.

Б. Ограничимся изучением низкоэнергетического каскада, который реализуется в тех случаях, когда энергия ПВА ε_0 ограничена сверху $\varepsilon_c > \varepsilon_0$ (здесь $\varepsilon_c = 7Z_1^{7/3}(e^2/a_0)$, Z_1 – атомный номер ПВА, a_0 – боровский радиус). В условиях низкоэнергетического каскада потерями энергии частиц, обусловленными их рассеянием на электронах, можно пренебречь [2]. Кроме того, в случае низкоэнергетического каскада вторично выбитые атомы всегда образуются с энергией ниже пороговой энергии ионизации, поэтому представление о каскаде упругих соударений к ним применимо в полной мере.

В. Будем предполагать, что плотность образующихся дефектов мала и атом смещается в результате бинарного столкновения. Причем смещение происходит всякий раз, когда локализованный атом получает энергию, превышающую пороговое значение ε_d . Если энергия смещенного атома, первоначально двигавшегося в среде, после столкновения становится меньше пороговой энергии смещения ε_d , он останавливается и в дальнейшем остается в локализованном состоянии. В отличие от работы [5] мы не требуем, чтобы бомбардируемый атом выходил из потенциальной ямы перед тем как сместиться. Поэтому размножение смещений происходит только в случае, если энергия налетающей частицы ε превышает $2\varepsilon_d$, в то время как при $2\varepsilon_d > \varepsilon > 0$ реализуются только подпороговые столкновения (без размножения смещенных атомов).

Г. Аналитические решения уравнений теории каскадов получены с использованием двух межатомных потенциалов: потенциала твердых сфер [6] и степенного потенциала Линдхарда [7]. Однако с точки зрения приложений оба потенциала не столь эффективны, как более реалистические модельные потенциалы: потенциал Борна–Майера и потенциал Томаса–Ферми. Действительно, использование, к примеру, степенного потенциала приводит к появлению расходимости в члене столкновений кинетического уравнения. Устранение расходимости требует дополнительной регуляризации с раздельным описанием далеких и близких столкновений [8]. Поэтому в данной работе используется потенциал Борна–Майера, что позволяет полностью снять вопрос о расходимостях.

Д. Чтобы смоделировать механизм отвода энергии из подсистемы КЧ, рассматриваются два возможных канала с высокими скоростями рассеивания энергии. Во-первых, это механизм отвода энергии за счет рождения фононов в процессах рассеяния КЧ, в том числе рождения фононов с неравновесной функцией распределения [9]. Через этот

канал отводится кинетическая энергия, накопившаяся в каскадной зоне по фононному механизму. Во-вторых, механизм передачи энергии, связанный с возбуждением электронного газа. Последний необходимо учитывать при анализе баланса энергии в металлах [10].

2. ТЕОРИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КАСКАДАМ НА РЕЛАКСАЦИОННОМ ЭТАПЕ

Сделав традиционное предположение [11] о том, что каскадный процесс является гауссовским марковским процессом, построим кинетическое уравнение в случае $\varepsilon_0 < \varepsilon_c$. С этой целью введем условную плотность вероятности $W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon, \mathbf{r})$ обнаружить частицу с энергией ε в точке $\mathbf{r} = \{r, \mathbf{\Omega}\}$ в момент времени t . При этом предполагается, что в начальный момент ПВА с энергией ε_0 двигался в заданном направлении $\mathbf{\Omega}_0$, а $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}$ (r — непрерывная переменная). Учтем два положения теории [12]. Во-первых, плотность вероятности трансформируется в дельта-функцию в пределе $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int d\mathbf{r} W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon, \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{\Omega}_0=(1,0,0)} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (1)$$

и объем системы считается равным единице. Во-вторых, в случае марковского процесса плотность вероятности удовлетворяет уравнению Смолуховского. Здесь следует учесть, что на временах порядка характерного времени релаксационного этапа не могут вводиться понятия о распространении тепла и тепловом движении атомов среды. Поэтому при записи уравнения Смолуховского ограничимся учетом упругого рассеяния КЧ на неподвижных атомах среды. В результате в условиях подпороговых столкновений, характерных для релаксационного этапа, имеем

$$\begin{aligned} W_{t+\tau}(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon, \mathbf{r}) = & \int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' \left\{ \int d(\Delta\mathbf{r}_1) W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon', \mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}_1) \times \right. \\ & \times W_{\tau}^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}_1 | \varepsilon' - \varepsilon, \Delta\mathbf{r}_1) + \\ & \left. + \int d(\Delta\mathbf{r}_2) W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon', \mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}_2) W_{\tau}^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}_2 | \varepsilon, \Delta\mathbf{r}_2) \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $W_{\tau}^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}_1 | \varepsilon, \Delta\mathbf{r})$ — плотность вероятности перехода в результате упругого соударения, $\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r} = \{|\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}|, \mathbf{\Omega}_1\}$, интегрирование выполняется по области $R(\varepsilon')$, в которой $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$.

Теперь в уравнении (2) произведем разложение по малому параметру $\Delta\mathbf{r}$ и сохраним только первые не исчезающие члены. Затем образуем выражение $(1/\tau)(W_{t+\tau} - W_t)$ и найдем его предел при $\tau \rightarrow 0$ с учетом условия нормировки (1). Поясним указанные преобразования более подробно. Начнем с того, что введем величину $A_{\tau}^{(1)}$ с помощью соотношения

$$\int d(\Delta\mathbf{r}) W_{\tau}^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \Delta\mathbf{r}) = \int d\mathbf{\Omega}_1 A_{\tau}^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}; \varepsilon, \mathbf{\Omega}_1). \quad (3)$$

В результате умножения на $1/\tau$ правой части уравнения (2), в которой оставлены только первые не исчезающие члены, с использованием определения (3) получаем следующее представление для этой правой части:

$$\int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon', \mathbf{r}) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int d\mathbf{\Omega}'_1 A_\tau^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}; \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_1) + \int d\mathbf{\Omega}'_2 A_\tau^{(1)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega}; \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_2) \right\}. \quad (4)$$

Величина в фигурных скобках в выражении (4) представляется в виде суммы “диагональной” и “недиагональной” частей,

$$A_\tau(\varepsilon, \mathbf{\Omega} | \varepsilon') = A_\tau^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{\Omega}) \delta(\varepsilon - \varepsilon') + \int d\mathbf{\Omega}'_1 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_1) + \int d\mathbf{\Omega}'_2 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_2), \quad (5)$$

где $B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega}; \varepsilon, \mathbf{\Omega}') = 0$ при $\varepsilon = \varepsilon'$. Величина $A_\tau(\varepsilon, \mathbf{\Omega} | \varepsilon')$ имеет смысл вероятности перехода $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ в момент времени τ . Проинтегрировав обе части (5) по ε , а также приняв во внимание нормировку (1), получаем равенство

$$A_\tau^{(2)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega})|_{\mathbf{\Omega}=(1,0,0)} + G_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega})|_{\mathbf{\Omega}=(1,0,0)} = 1, \quad (6)$$

где

$$G_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega}) = \int_{R(\varepsilon)} d\varepsilon \left\{ \int d\mathbf{\Omega}'_1 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_1) + \int d\mathbf{\Omega}'_2 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_2) \right\}.$$

С учетом формулы (5) выражение (4) нетрудно привести к виду

$$\int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 | \varepsilon', \mathbf{r}) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int d\mathbf{\Omega}'_1 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_1) + \int d\mathbf{\Omega}'_2 B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_2) + A_\tau^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{\Omega}) \delta(\varepsilon - \varepsilon') \right\}. \quad (7)$$

Анализ показывает, что величины

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} A_\tau^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{\Omega}) &= \tilde{A}(\varepsilon, \mathbf{\Omega}), \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}') &= \tilde{B}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}'), \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} B_\tau(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}') &= \tilde{B}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}') \end{aligned} \quad (8)$$

не зависят от времени. Теперь, следуя работе [11], введем определение сечения упругого рассеяния, сопровождаемого передачей энергии атому среды

$$\tilde{B}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}') d\varepsilon d\mathbf{\Omega}' = N_1 v(\varepsilon) \frac{d^2}{d\varepsilon d\mathbf{\Omega}'} \sigma^{(a)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} | \varepsilon, \mathbf{\Omega}') d\varepsilon d\mathbf{\Omega}', \quad (9)$$

где $v(\varepsilon) = k_v \sqrt{\varepsilon}$ – скорость КЧ, N_1 – полное число атомов среды. Учитывая (2), (7), (8) и определение дифференциального сечения (9), находим окончательное уравнение для плотности вероятности

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 \mid \varepsilon, \mathbf{r}) = & N_1 \int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 \mid \varepsilon', \mathbf{r}) \times \\ & \times \left\{ \int d\mathbf{\Omega}'_1 \frac{d^2 \sigma^{(a)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} \mid \varepsilon' - \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_1)}{d\varepsilon' d\mathbf{\Omega}'_1} + \int d\mathbf{\Omega}'_2 \frac{d^2 \sigma^{(a)}(\varepsilon', \mathbf{\Omega} \mid \varepsilon, \mathbf{\Omega}'_2)}{d\varepsilon' d\mathbf{\Omega}'_2} \right\} - \\ & - 2N_1 \int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 \mid \varepsilon, \mathbf{r}) \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon \mid \varepsilon', \mathbf{\Omega})}{d\varepsilon'}. \end{aligned} \quad (10)$$

Связь величины $\tilde{A}(\varepsilon, \mathbf{\Omega})$ с сечением рассеяния

$$\sigma^{(a)}(\varepsilon, \mathbf{\Omega} \mid \varepsilon', \mathbf{\Omega}') \big|_{\mathbf{\Omega}=(1,0,0)} = \sigma^{(a)}(\varepsilon \mid \varepsilon', \mathbf{\Omega}')$$

была получена на основе соотношений (6) и (8).

Чтобы выделить из распределения плотности потока КЧ

$$I_t(\varepsilon, \mathbf{r}) = v(\varepsilon) W_t(\varepsilon_0, \mathbf{\Omega}_0 \mid \varepsilon, \mathbf{r}) \big|_{\mathbf{\Omega}_0=(1,0,0)}$$

пространственно-однородную часть, разложим функцию, зависящую от $\mathbf{r}$, по полиномам Лежандра $P_l(\Omega)$:

$$I_t(\varepsilon, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \Psi_t^l(\varepsilon, \mathbf{r}) P_l(\Omega).$$

Если ввести пространственный момент нулевого порядка

$$M_t^{0l}(\varepsilon) = \int dr r^2 \Psi_t^l(\varepsilon, \mathbf{r}),$$

то пространственно-однородная часть функции распределения потока $I_t(\varepsilon)$ будет равна первому члену разложения $(1/4\pi) M_t^{0l}(\varepsilon)$. Этот член необходим, в частности, для вычисления функции плотности числа состояний.

Выведем уравнение движения для момента нулевого порядка, выполнив следующую процедуру: получим уравнение для $I_t(\varepsilon)$ на основе уравнения (10), умножим полученное уравнение на r^2 и проинтегрируем по r , затем каждый член этого уравнения умножим на $P_l(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω . В результате простых, но громоздких преобразований с учетом нормировки (1), рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра и преобразования Лапласа

$$\psi_p(\varepsilon) = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} I_t(\varepsilon)$$

находим искомое уравнение для изображения $\psi_p(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} p \psi_p(\varepsilon) - \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) = N_1 \int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' \left\{ \frac{d}{d\varepsilon'} \sigma^{(a)}(\varepsilon' | \varepsilon) + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\varepsilon'} \sigma^{(a)}(\varepsilon' | \varepsilon' - \varepsilon) \right\} \psi_p(\varepsilon') - N_1 \sigma_{\text{tr}}^{(a)}(\varepsilon) \psi_p(\varepsilon). \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma_{\text{tr}}^{(a)}(\varepsilon) = 2 \int_{R(\varepsilon')} d\varepsilon' \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon'} \sigma^{(a)}(\varepsilon | \varepsilon')$$

— полное транспортное сечение упругого рассеяния.

3. СООТНОШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Переходя на уровень термодинамического описания, будем изучать каскадный процесс во временной шкале переноса тепла. Использование этой “огрубленной” шкалы件но件но прежде всего потому, что оно позволяет ввести в теорию тепловое движение атомов среды и, следовательно, конечную температуру термостата. Теперь, считая КЧ самостоятельной термодинамической подсистемой, мы должны полную систему разделить на две подсистемы, слабо взаимодействующие между собой: значение параметра $i = 1$ отвечает термостату, т.е. сплошной среде, а значение $i = 2$ — газу “горячих” атомов, т.е. газу КЧ. В рамках сокращенного описания состояние системы будем характеризовать совокупностью средних значений всего двух переменных P_{mi} , где $m = 1, 2$, $P_{1i} = H_i$ — гамильтониан и $P_{2i} = N_i$ — число частиц i -й подсистемы. Полный гамильтониан КЧ запишем в виде $H_2 = H_0^{(2)} + H_{\text{int}}^{(2)}$, где $H_0^{(2)}$ — гамильтониан газа невзаимодействующих частиц, $H_{\text{int}}^{(2)}$ — гамильтониан взаимодействия КЧ с термостатом. Причем взаимодействие (потенциал взаимодействия обозначим V) связано с рассеянием КЧ, которое сопровождается либо рождением фононов, либо генерацией однопарных возбуждений. Что же касается взаимодействия между одинаковыми частицами, то оно не рассматривается, поскольку плотность КЧ в принятой модели считается малой (такое же предположение сделано и в работе [10]).

Согласно определению неравновесной статистической термодинамики [1] функционал энтропии дается выражением

$$S(t, 0) = \Phi(t) + \sum_{mi} P_{mi} F_{im}(t),$$

где

$$\Phi(t) = \ln \text{Sp} \exp \left\{ - \sum_{mi} P_{mi} F_{im}(t) \right\}$$

–функционал Масье–Планка. Поскольку взаимодействие является слабым, представим неравновесный статистический функционал в виде разложения по степеням потенциала взаимодействия V . С точностью до членов первого порядка имеем

$$\begin{aligned} \rho(t) = \rho_1(t) + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^1 d\tau e^{-\tau S_0(t,0)} \Delta \left\{ [F_{21}(t+t') - \beta_1] \dot{H}_2(t') \right\} e^{(\tau-1)S_0(t,0)} - \\ - \int_0^1 d\tau e^{-\tau S_0(t,0)} \{ \beta_1 H_{\text{int}}^{(2)} \} e^{(\tau-1)S_0(t,0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\rho_1(t) = \exp\{-S(t,0)\}$ – квазиравновесное распределение, соответствующее экстремуму информационной энтропии [1],

$$\begin{aligned} S_0(t,0) &= \Phi_0(t) + F_{21}(t) \{ H_2 - \tilde{\mu}_2 N_2 \} + \tilde{B}, \\ \Phi_0(t) &= \ln \text{Sp} \exp \{ -F_{21}(t) (H_2 - \tilde{\mu}_2 N_2) - \tilde{B} \}, \\ \tilde{B} &= \beta_1 (H_1 - \mu_1 N_1), \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_2 - \frac{Mv^2}{2}, \quad \epsilon \rightarrow +0, \\ \Delta A &= A - \langle A \rangle_1^t, \quad \langle A \rangle_1^t = \text{Sp} \{ \rho_1(t) A \}, \quad M - \text{масса КЧ}. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметры $F_{im}(t)$, вошедшие в соотношения (12), (13), подбираются таким образом, чтобы истинные средние набора величин $\langle P_{mi} \rangle^t = \text{Sp} \{ \rho(t) P_{mi} \}$ были равны их квазиравновесным средним $\langle P_{mi} \rangle_1^t$. Тогда квазиравновесное распределение становится максимально близким к истинному неравновесному распределению. При таком выборе параметры $F_{im}(t)$ являются термодинамическими, причем $1/F_{11} = 1/\beta_1$ – температура термостата, $1/F_{21}$ – квазitemпература подсистемы $\{2\}$, $F_{12} = -\beta_1 \mu_1$, μ_1 – химический потенциал термостата, $F_{22} = -F_{21} \mu_2$, μ_2 – квазихимический потенциал подсистемы $\{2\}$, $\lambda = \exp(-F_{22})$ – абсолютная активность КЧ. Используя выражение для $\Phi(t)$, нетрудно вывести соотношения, позволяющие вычислять флуктуации величин P_{mi} ,

$$\frac{\delta^2 \Phi(t)}{\delta F_{im}(t) \delta F_{jn}(t)} = -\frac{\delta \langle P_{nj} \rangle^t}{\delta F_{im}(t)} = -\frac{\delta \langle P_{mi} \rangle^t}{\delta F_{jn}(t)} = (P_{nj}, P_{mi})^t, \quad (14a)$$

где

$$(P_{nj}, P_{mi})^t = \int_0^1 d\tau \text{Sp} \{ P_{nj} e^{-\tau S_0(t,0)} \Delta P_{mi} e^{(\tau-1)S_0(t,0)} \}. \quad (14b)$$

Определения (12)–(14) даны в терминах квантовой теории. Однако исследуемая система допускает “гибридное” описание (как и в работе [13]): подсистема $\{1\}$ – как квантовая, а подсистема $\{2\}$ – как классическая. Поэтому при переходе к классической теории символ Sp следует понимать как интегрирование по фазовым переменным, а квантовые корреляционные функции (14б) заменить на классические. Отметим, что в данной работе применяется система единиц, в которой $\hbar = k_B = 1$.

Используя термодинамические соотношения (14), найдем связь квазitemпературы подсистемы $\{2\}$ с соответствующей флуктуацией энергии. В условиях конечной температуры термостата получаем

$$\frac{1}{F_{i1}(t)} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} & \text{при } i = 1, \\ \left\{ \frac{1}{C_V}(H_2, H_2)^t \right\}^{1/2} & \text{при } i = 2, \end{cases} \quad (15)$$

где C_V — теплоемкость газа КЧ, отнесенная к одной частице.

Найдем распределение КЧ по энергиям. Ранние этапы каскадообразования завершаются установлением квазиравновесия в подсистеме $\{2\}$, которое рассматривается как неравновесное стационарное состояние (“steady state”). Стационарную плотность потока можно связать с плотностью числа состояний КЧ. Действительно,

$$g(\varepsilon) = \frac{I(\varepsilon)}{v(\varepsilon)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_t(\varepsilon) = I^{\text{SS}}(\varepsilon) \equiv I(\varepsilon). \quad (16a)$$

В свою очередь, стационарное значение $I(\varepsilon)$ согласно предельной теореме [12] дается выражением

$$I(\varepsilon) = \lim_{p \rightarrow 0} p\psi_p(\varepsilon). \quad (16b)$$

Теперь запишем число заполнения состояния частицы в условиях квазиравновесия, учитывая явный вид ρ_1 и $S_0(0, 0)$ (13),

$$n^{(2)}(\varepsilon) = \lambda \exp(-F_{21}\varepsilon). \quad (16b)$$

С учетом (16) распределение КЧ по энергиям принимает вид

$$\tilde{p}(\varepsilon) d\varepsilon = g(\varepsilon)n^{(2)}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{v(\varepsilon)}\lambda \exp(-F_{21}\varepsilon) \lim_{p \rightarrow 0} (p\psi_p(\varepsilon)) d\varepsilon. \quad (17a)$$

Абсолютная активность λ в (17a) находится из условия нормировки, которое при наличии подпороговых столкновений можно записать в форме

$$\int_0^{2\varepsilon_d} d\varepsilon \tilde{p}(\varepsilon) = 1. \quad (17b)$$

4. КВАЗИРАВНОВЕСНАЯ ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА И ЕГО ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Задачу аналитического решения уравнения (11) можно значительно упростить, если перейти к дифференциальному уравнению. Такой прием используется во многих работах (см., например, [14]). Продифференцируем обе части (11) по ε , а затем выполним стандартную процедуру [15] решения обыкновенного дифференциального уравнения. При этом будем учитывать энергетическую зависимость сечения рассеяния (П.1) (см. приложение) в модели Борна–Майера $U_{\text{BM}}(r) = U_0 \exp(-r/R)$. Принимая во внимание (16б), в пределе $p \rightarrow 0$ получаем

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\psi_p(\varepsilon) = C_1 f_1(\varepsilon) \exp \left\{ - \int d\varepsilon \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{N_1}{\xi(\varepsilon)} \frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon | \varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{\xi'(\varepsilon)}{\xi(\varepsilon)} \right] \right\}, \quad (18)$$

$$f_1(\varepsilon) = \varepsilon \exp \left[\int d\varepsilon \kappa(\varepsilon) \right],$$

где

$$\frac{d^2 \sigma^{(a)}(\varepsilon' | \varepsilon)}{d\varepsilon d\varepsilon'} = \kappa(\varepsilon) \frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon' | \varepsilon)}{d\varepsilon'},$$

$$\xi(\varepsilon) = N_1 \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon | \varepsilon')}{d\varepsilon'}, \quad \xi'(\varepsilon) \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \xi(\varepsilon).$$

Коэффициент C_1 в (18) находится с использованием стационарного значения потока (16б), полного распределения (17а) и условия нормировки (17б).

В области больших и малых ε можно получить явный вид плотности числа состояний $g(\varepsilon)$ с помощью (16), (18) и (П.1),

$$g(\chi) = \begin{cases} k_1 \alpha \chi^2 & \text{при } 2\chi < 1, \\ \frac{1}{\pi} \alpha (\chi - k_2)^{-2} & \text{при } \chi - 1 > k_1, \end{cases} \quad (19)$$

где $\chi = (\varepsilon/\varepsilon^*)^{3/4}$, $\varepsilon^* = (12)^{1/3} (1/\alpha)$, $\alpha = 2MR^2$, $k_1 = 4/5$, $k_2 = 7/5$. Из (19) следует, что ветвь $g(\chi)$, соответствующая большим значениям χ , дает функциональную зависимость, близкую к энергетическому распределению быстрых частиц в условиях кулоновских столкновений [2]. Из-за сложности общего решения (18) анализ функции $g(\chi)$ во всем интервале χ может быть выполнен только методами численного интегрирования. В аналитическом варианте теории возможны только ее аппроксимации. В частности, можно использовать, как показал анализ, интерполяционную формулу

$$g(\chi) = \frac{1}{3} k_2 \alpha \{ \exp(-C_2^3 \chi^4) \} \{ \exp(3C_2 \chi^2 - 1) \}, \quad (20)$$

где $C_2 = k_1/k_2$. Функция (20) в области больших и малых значений χ удовлетворительно согласуется с ветвями (19) и имеет максимум, что вообще характерно для распределения плотности состояний быстрых частиц, движущихся в твердых телах.

Теперь рассмотрим временную эволюцию плотности потока $I_t(\varepsilon)$. Используя ту же процедуру, что и при выводе решения (18), найдем решение уравнения (11) при $p \neq 0$, а затем, выполнив обратное преобразование Лапласа, перейдем от изображения $\psi_p(\varepsilon)$ к плотности потока. В результате получаем

$$I_t(\varepsilon) = I^{\text{SS}}(\varepsilon) f_2(t),$$

$$f_2(t) = \frac{\gamma(\eta, t)}{\Gamma(\eta)} = 1 - \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left\{ \left(\frac{2t}{\tau_R} \right)^{\eta-1} \exp \left(-\frac{2t}{\tau_R} \right) \right\}. \quad (21)$$

Здесь $\gamma(\eta, t)$ – неполная гамма-функция, $\Gamma(\eta)$ – гамма-функция, $\eta \equiv \eta(\bar{\varepsilon})$, $\tau_R = M/\zeta$, $\zeta \equiv \zeta(\bar{\varepsilon})$ – коэффициент трения. Причем энергия КЧ, вошедшая в выражения

$$\eta(\varepsilon) = 1 + 2N_1 \frac{\varepsilon}{\xi(\varepsilon)} \frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon | \varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad \zeta(\varepsilon) = \frac{1}{2} M v(\varepsilon) N_1 \sigma_{\text{tr}}^{(a)}(\varepsilon),$$

для простоты заменена ее средним значением. Известно [16], что задачи, постановка которых дана на базе уравнений статистической механистической теории, фактически сформулированы в пределе $F_{21}^{-1} \rightarrow \infty$. Это самый простой вариант теории. Ограничиваясь этим пределом, имеем

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{F_{21}^{-1} \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{2\varepsilon_d} d\varepsilon \tilde{p}(\varepsilon) \varepsilon \right\} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{C_2 \alpha}. \quad (22)$$

Отметим также, что в правой части (21) написано асимптотическое выражение $\gamma(\eta, t)/\Gamma(\eta)$ в области больших t .

Хорошо известно [17], что существует некоторая связь средних значений величин и соответствующих флуктуаций в том смысле, что средние и флуктуации обусловлены одними и теми же переходами (актами рассеяния) частиц. В конечном счете это обстоятельство предопределяет единое значение релаксационных постоянных в исследованиях, в которых параллельно изучаются временная эволюция средних и флуктуаций (см., например, [12, 17]). Воспользуемся этим положением. Поскольку нами рассматривается гауссовский марковский процесс, временную зависимость корреляционной функции $(H_2, H_2)^t$, вошедшей в (15), можно аппроксимировать функцией, характерной для гауссовской флуктуации [12], с временем релаксации τ_R . В это случае временной ход квазitemпературы (15) дается выражением

$$\frac{1}{F_{21}(t)} = \frac{1}{F_{21}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{2t}{\tau_R}} \right\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{F_{21}(t)} = \frac{1}{F_{21}^{\text{SS}}} \equiv \frac{1}{F_{21}}. \quad (23)$$

Формула (23) определяет кинетику “нагрева” подсистемы {2} в непосредственной окрестности квазиравновесия (имеется в виду временной интервал, значительно меньший, чем время релаксационного этапа).

5. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ КЧ

Для построения уравнения баланса энергии КЧ в квазиравновесном состоянии (или вблизи него) необходимо вычислить вводимую за счет излучения мощность, а также отвод тепла из подсистемы $\{2\}$. Отвод энергии (характерное время порядка 10^{-11} с) за счет неупругих процессов рассеяния КЧ определим с помощью диссипативной функции, записанной в виде

$$\left\langle \left(\frac{dE_2}{dt} \right)_{\text{out}} \right\rangle = \langle \dot{H}_2 \rangle, \quad \dot{H}_2 = \frac{1}{i} [H_2, H_1].$$

Усреднение потока $\dot{H}_2$ по распределению (12), (13) осуществляется в рамках традиционной процедуры термодинамической теории релаксационных процессов [1]. Причем в случае слабого взаимодействия, когда обмен энергии между подсистемой $\{2\}$ и термостатом является медленным, достаточно ограничиться соотношениями, стационарными по термодинамическим параметрам. В этом приближении, сохраняя член второго порядка по потенциалу взаимодействия, получим

$$\left\langle \left(\frac{dE_2}{dt} \right)_{\text{out}} \right\rangle = (\beta_1 - F_{21}) \int_{-\infty}^0 dt (\dot{H}_2, \dot{H}_2)^t e^{\epsilon t}. \quad (24)$$

Сделаем два дополнительных замечания по поводу диссипативной функции. Во-первых, ее можно представить в другой форме, а именно в форме, принятой в нелинейной термодинамике,

$$\left\langle \left(\frac{dE_2}{dt} \right)_{\text{out}} \right\rangle = L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2}(X) X, \quad L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2}(X) = L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} X \bar{\omega} \right) \left\{ \frac{1}{2} X \bar{\omega} \right\}^{-1}, \quad (25a)$$

где $\bar{\omega}$ – среднее значение энергии передачи в условиях подпороговых столкновений, $X = \beta_1 - F_{21}$ – термодинамическая сила. Во-вторых, вошедший в (25a) коэффициент $L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2} \equiv L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2}(F_{21})$ – это коэффициент переноса, входящий в линейное соотношение между потоком энергии и силой X . Интегрируя по t выражение (24), а также используя соотношения (12), (13), (14б) и (20), находим

$$L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2} = \frac{1}{2} \int d\varepsilon g(\varepsilon) \int d\varepsilon' g(\varepsilon') K(\varepsilon, \varepsilon'; F_{21}) (\varepsilon - \varepsilon')^2. \quad (25б)$$

Здесь

$$g(\varepsilon) = \frac{k_2}{3} \alpha \exp \left\{ - \left(C_2 \frac{\varepsilon}{*} \right)^3 \right\} \left\{ \exp \left(3 C_2 \left(\frac{\varepsilon}{*} \right)^{3/2} - 1 \right) \right\},$$

$$K(\varepsilon, \varepsilon'; F_{21}) = 2\pi \sum_{\mu\mu'} w_\mu(\varepsilon; F_{21}) |\langle \varepsilon, \mu | V | \varepsilon', \mu' \rangle|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon' + \omega_{\mu\mu'})$$

– константа скорости перехода $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, $w_\mu(\varepsilon; F_{21}) = n_\mu^{(1)} \lambda \exp(-F_{21}\varepsilon)$ – больцмановский фактор, E_μ – энергия элементарных возбуждений термостата, $\omega_{\mu\mu'} = E_\mu - E_{\mu'}$, $n_\mu^{(1)}$ – среднее число заполнения состояния подсистемы $\{1\}$.

Последовательный расчет средней энергии, вводимой в единицу времени, делается на основе теории реакции системы на включение внешнего возмущения [1]. Для этого необходимо вычислить добавку $\Delta\rho$ к функционалу ρ (12), пропорциональную $\tilde{\Phi}$ – плотности потока бомбардирующих частиц, а затем с помощью $\rho + \Delta\rho$ найти среднюю кинетическую энергию, выделившуюся в единицу времени в каскадной зоне. Однако возможен и упрощенный вариант расчета функции

$$\left\langle \left(\frac{dE_2}{dt} \right)_{\text{in}} \right\rangle,$$

если из статистической теории каскадов взять готовую форму – каскадную функцию, усредненную по энергетическому спектру ПВА. Каскадная функция, характеризующая полное число выбитых атомов, в расчете на один ПВА имеет вид [2, 6]

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{T_m}{T_m - \varepsilon_d} \left(1 + \ln \left(\frac{T_m}{2\varepsilon_d} \right) \right) & (\text{бомбардировка заряженными частицами}), \\ T_m (4\varepsilon_d)^{-1} & (\text{бомбардировка нейтронами}). \end{cases}$$

Здесь T_m – максимальная энергия, передаваемая выбитому атому. Если $\sigma^{(d)}$ – это поперечное сечение столкновений, которые приводят к смещениям (П.2) (см. приложение), то число ПВА, образующихся в единицу времени, равно $\tilde{\Phi}\sigma^{(d)}N_1$. А значит, скорость размножения каскадных частиц с учетом (176) есть

$$\frac{dN_2}{dt} = \tilde{\Phi}\sigma^{(d)}N_1\bar{\nu}. \quad (26)$$

Выражение (26) следует дополнить вкладом, который дает спонтанная атермическая рекомбинация. Дело в том, что смещенные атомы и вакансии, связанные с ними, рекомбинируют всякий раз, когда сближаются на расстояние, меньшее радиуса рекомбинации $R_c(\varepsilon)$. Будем пренебрегать возможностью того, что вблизи каждой вакансии находится более чем один смещенный атом. Тогда число смещений в поврежденном объеме $\tilde{V}_1$, оставшихся после рекомбинации, дается выражением $\bar{\nu} \exp(-\bar{\nu}\tilde{V}_2/\tilde{V}_1)$, где $\tilde{V}_2$ – объем спонтанной рекомбинации. Если ввести сечение рекомбинации $\sigma^{(r)} = \pi R_c^2(\varepsilon)$ (П.3) (см. приложение), то полную скорость образования КЧ с учетом (26) и рекомбинационных эффектов при $\bar{\nu}\tilde{V}_2 \ll \tilde{V}_1$ можно записать в форме уравнения химической кинетики

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{tot}} = \tilde{\Phi}\sigma^{(d)}N_1\bar{\nu} \left\{ 1 - \frac{8}{3}\sigma^{(r)}N_V(\varepsilon_0)a \right\}, \quad (27)$$

где $N_V(\varepsilon_0) = \bar{\nu}/\tilde{V}_1$ – плотность термодинамически неравновесных вакансий, образовавшихся под воздействием излучения, a – параметр решетки.

Средняя скорость увеличения внутренней энергии подсистемы $\{2\}$ под влиянием облучения определяется соотношением

$$\left\langle \left(\frac{dE_2}{dt} \right)_{\text{in}} \right\rangle = \frac{1}{N_2} \langle H_2 \rangle \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{tot}}. \quad (28)$$

Согласно (28) для расчета вводимой мощности необходимо знать среднюю энергию частицы, вычисленную методом статистической термодинамики. Используя (17), (22) и ограничиваясь старшим членом, получаем

$$\frac{1}{N_2} \langle H_2 \rangle = \bar{\varepsilon} f_3(F_{21}), \quad (29)$$

где

$$f_3(F_{21}) = 2[\varphi(F_{21})]^{-2} \left\{ 1 - [1 + \varphi(F_{21})] \exp(-\varphi(F_{21})) \right\},$$

$$\varphi(F_{21}) = \frac{\pi}{2} F_{21}^* \bar{\varepsilon}.$$

Учитывая вводимую мощность (27)–(29) и скорость отвода энергии (25) из подсистемы {2}, запишем уравнение баланса энергии КЧ в виде

$$\left\langle \frac{dE_2}{dt} \right\rangle = \bar{\varepsilon} f_3(F_{21}) \tilde{\Phi} \sigma^{(d)} N_1 \bar{\nu} \left\{ 1 - \frac{8}{3} \sigma^{(r)} N_V(\varepsilon_0) a \right\} - L_{\dot{H}_2 \dot{H}_2}(X) X. \quad (30)$$

Итак, получено уравнение баланса энергии (30) на термодинамическом уровне описания. Если процесс передачи энергии из подсистемы {2} в решетку протекает достаточно медленно, то внутренняя энергия КЧ возрастает до тех пор, пока скорость поступления энергии от излучения не уравнивается потерями на теплопередачу. Естественно, что в условиях интенсивной накачки энергии могут быть достигнуты высокие значения внутренней энергии подсистемы {2}, а это, в свою очередь, может приводить к значениям квазitemпературы КЧ, заметно превышающим температуру решетки. Уравнение баланса (30), в которое вошли основные термодинамические величины $X = \beta_1 - F_{21}$ и F_{21}^{-1} , позволяет дать последовательный анализ квазitemпературы КЧ, а также анализ устойчивости стационарного состояния газа “горячих” атомов, т.е. газа КЧ.

Исследование баланса энергии было начато с механистической интерпретации, когда учитывалось только упругое рассеяние КЧ на неподвижных атомах среды. Это максимально упростило кинетическое уравнение (10), что в конечном счете позволило найти его аналитическое решение (18). Затем был осуществлен переход к временной шкале переноса тепла, и в рассмотрение вошли неупругие процессы рассеяния, в частности процессы, сопровождаемые генерацией элементарных возбуждений термостата. Существенно, что в нашей постановке задачи те самые акты неупругого рассеяния частиц, которые приводят к диссипации (24), одновременно определяют и стационарные значения флуктуаций величин P_{mi} (15). Именно в этом реализовано основное положение флуктуационно-диссипативной теории [1, 17].

Движущиеся смещенные атомы в пределе малой плотности рассмотрены без учета столкновений друг с другом. Такая постановка близка к традиционной формулировке проблемы броуновских частиц, где также изучалось поведение ансамбля частиц, взаимодействующих только с атомами среды. Примечательно, что полученная временная зависимость распределения плотности (21) содержит в качестве времени релаксации

величину $\tau_R = M/\zeta$, где ζ – коэффициент трения, обусловленного упругим рассеянием КЧ. С таким же временем релаксации эволюционирует и ансамбль броуновских частиц в теории Ланжевена.

В случае каскадного процесса система в целом находится в сильно неравновесном состоянии [2]. В этих условиях, как было показано выше, средний поток КЧ (21) и флуктуация энергии (23) растут по мере приближения подсистемы $\{2\}$ к квазиравновесию. Этот результат полностью совпадает (в качественном отношении) с выводами теории химических реакций [17]. В этой теории [17], если система первоначально далека от равновесия, то средние значения величин растут в период приближения к равновесию, и наоборот, если система близка к равновесию, то наблюдается спад средних значений. Что же касается флуктуаций, то они [17] растут в любом случае независимо от начального состояния системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим явный вид сечений рассеяния, использованных при выводе уравнения баланса энергии:

1) дифференциальное сечение упругого рассеяния в модели Борна–Майера

$$\frac{d\sigma^{(a)}(\varepsilon' | \varepsilon)}{d\varepsilon'} = -16\pi U_0^2 R^6 M^2 (1 + 8M\varepsilon R^2)^{-1} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon')^2}; \quad (\text{П.1})$$

2) поперечное сечение резерфордовских столкновений, в результате которых возникают смещенные атомы, в расчете на один атом решетки имеем

$$\sigma^{(d)} = 16\pi a_0^2 (Z_1 Z_2)^2 \frac{M^2}{(M + M_2)^2} \frac{E_R^2}{T_m^2} \left(\frac{T_m}{\varepsilon_d} - 1 \right), \quad (\text{П.2})$$

где Z_2 и M_2 – атомный номер и масса бомбардирующей частицы, E_R – постоянная Ридберга. При бомбардировке нейтронами $\sigma^{(d)} \sim M^{2/3}$ и по порядку величины поперечное сечение равно (1–10) барн;

3) сечение рекомбинации. Как показано в статье [18], между компонентами пары Френкеля возникает дипольное взаимодействие $\tilde{U}_A(r) \sim 1/r^3$. Чтобы избежать сложного вычисления радиуса рекомбинации на основе потенциала $\tilde{U}_A$, ограничимся простой оценкой R_c . Если пренебречь диффузией вакансий, для этого достаточно найти расстояние между компонентами пары, при котором энергия пары $\tilde{U}_A$ равна средней энергии КЧ. Вычислив на основе полученного значения $R_c(\bar{\varepsilon})$ сечение, находим

$$\sigma^{(r)} \sim (v_p |v_v|)^{2/3} \left(\frac{1 + \nu_p}{1 - \nu_p} \right)^{4/3} \left(\frac{A}{\bar{\varepsilon}} \right)^{2/3}. \quad (\text{П.3})$$

В (П.3) вошли параметры потенциала $\tilde{U}_A$ [18]: v_p и v_v – релаксационные объемы смещенного атома и вакансии ($v_p > 0$ и $v_v < 0$), A – упругая константа анизотропии, ν_p – отношение Пуассона.

Что касается объема атермической рекомбинации $\tilde{V}_2$, то он не является сферическим, тем не менее этот объем аппроксимируется эквивалентной сферой. Вычисление узлов решетки, входящих в эту сферу, выполняется методами численного интегрирования, причем число узлов зависит от модели атом-атомного потенциала. Расчеты, выполненные для конкретных металлов, показали, что объем атермической рекомбинации включает от 50 до 150 атомных объемов.

Список литературы

- [1] Д. Н. Зубарев. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- [2] Д. Динс, Д. Винйард. Радиационные эффекты в твердых телах. М.: ИЛ, 1960.
- [3] J. Narayan, O. S. Oen, D. Fathy, O. W. Holland. Materials Lett. 1985. V. 3. № 3. P. 68–72.
- [4] M. T. Robinson. In: Radiation – Induced Voids in Metals. U.S. Atomic Energy Commission, 1972. P. 397–411.
- [5] W. S. Snyder, J. Neufeld. Phys. Rev. 1956. V. 103. P. 862–864.
- [6] Г. Н. Кунчин, Р. С. Пиз. УФН. 1956. Т. 60. № 3. С. 582–594.
- [7] J. Lindhard, M. Scharff, H. E. Schiott. Mat. Fys. Medd. Dan. Selekt. 1963. V. 33. № 14. P. 3–42.
- [8] В. М. Ленченко, Ю. З. Акилов. ФТП. 1971. Т. 5. № 2. С. 397–404.
- [9] В. В. Ганн, И. Г. Марченко. ВАНТ. 1987. № 2(40). С. 81–84.
- [10] A. J. Sampo, R. Lussi. Phys. Chem. Solids. 1983. V. 44. № 6. P. 479–488.
- [11] P. Mazur, J. B. Sanders. Physica. 1969. V. 44. № 3. P. 444–448.
- [12] В. И. Тихонов, М. А. Миронов. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
- [13] M. Rahman. Phys. Rev. B. 1996. V. 52. № 5. P. 3383–3392.
- [14] J. Lindhard, V. Nielsen, M. Scharff, P. V. Thomsen. Mat. Fys. Medd. Dan. Selekt. 1963. V. 33. № 10. P. 2–42.
- [15] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [16] Д. Карери. Порядок и беспорядок в структуре материи. М.: Мир, 1985.
- [17] J. Keizer. J. Chem. Phys. 1976. V. 64. P. 1679–1687.
- [18] W. G. Wolfer, A. Si-Ahmed. J. Nucl. Mater. 1981. V. 99. № 1. P. 117–123.

Поступила в редакцию 30.VIII.1999 г.,
после доработки 31.I.2000 г.