Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, О микроскопическом происхождении интегрируемости в теории Виттена–Зайберга, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 424–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:11:46

© 2008 г.

А. В. Маршаков*

О МИКРОСКОПИЧЕСКОМ ПРОИСХОЖДЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ТЕОРИИ ВИТТЕНА–ЗАЙБЕРГА

Обсуждается микроскопическая причина интегрируемости в теории Виттена–Зайберга. В частности, рассматривается наиболее подробно теория с простейшим ультрафиолетовым старшим возмущением, для которой дополнительные явные результаты получены с использованием бозонизации и эллиптической униформизации спектральной кривой.

Ключевые слова: калибровочные теории, интегрируемые системы, инстантоны, римановы поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы обсуждаем микроскопическую причину интегрируемости в теории Виттена–Зайберга, следуя во многом результатам работы [1]. Развитие суперсимметричных калибровочных теории достигло наконец того уровня, что их можно считать областью, допускающей применение методов математической физики. Особенно часто интерес вызывают свойства низкоэнергетических эффективных действий, которые в теориях с расширенной суперсимметрией могут быть выражены в терминах голоморфных функций на пространствах модулей вакуумов или препотенциалов. Эти препотенциалы обладают замечательными свойствами, которые кратко можно характеризовать тем, что они являются квазиклассическими тау-функциями [2], а сама низкоэнергетическая теория [3] может быть сформулирована на языке интегрируемых систем [4].

Точный вид препотенциала содержит исчерпывающую информацию об эффективной теории в режиме сильной связи, в то время как в слабой связи препотенциал может быть представлен в виде суммы по инстантонным вкладам калибровочной теории. Как часто случается в традиционной квантовой теории поля, даже каждый член этой бесконечной суммы является сам по себе плохо определенным, так как содержит интегрирование по некомпактному пространству модулей инстантонов. Однако оказывается, что существует сохраняющая суперсимметрию инфракрасная

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, mars@itep.ru

регуляризация, которая позволяет провести вычисление, сводя его к сумме по точечным инстантам, вклады которых можно параметризовать случайными разбиениями [5]. Более того, оказывается, что регуляризованный таким образом объем четырехмерного пространства-времени может быть интерпретирован как константа связи в дуальной топологической теории струн [6], представляя собой, таким образом, новую форму дуальности между струнами и калибровочными теориями.

Эта дуальность предсказывает нетривиальное соотношение между деформированными препотенциалами $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий и производящими функциями классов Громова–Виттена. Подобно последним [7], деформированные препотенциалы могут быть выражены в терминах корреляционных функций в двумерной теории свободных фермионов. Эти корреляционные функции могут быть отождествлены с тау-функциями интегрируемых систем, для которых фермионное представление существенно отличается от традиционного [8]. Мы отложим детальное обсуждение этого вопроса, касающегося полных деформированных препотенциалов, и сосредоточимся, следуя [1], на их главной квазиклассической асимптотике.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Свободные фермионы. Введем сначала основные определения и обозначения для двумерной теории одного свободного комплексного фермиона с действием $\int \tilde{\psi} \bar{\partial} \psi$ на цилиндре. Решения уравнения Дирака можно разложить по голоморфной координате $w \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}\psi(w) &= \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \psi_r w^{-r} \left(\frac{dw}{w} \right)^{1/2}, \\ \tilde{\psi}(w) &= \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \tilde{\psi}_r w^r \left(\frac{dw}{w} \right)^{1/2},\end{aligned}\tag{1}$$

так что соответствующие моды после квантования удовлетворяют (анти)коммутиционным соотношениям

$$\{\psi_r, \tilde{\psi}_s\} = \delta_{rs}.\tag{2}$$

Фермионные пространства Фока строятся над вакуумами заряда M (море Дирака)

$$|M\rangle = \psi_{-M+1/2} \psi_{-M+3/2} \psi_{-M+5/2} \dots = \bigwedge_{r > -M} \psi_r,\tag{3}$$

так что

$$\psi_r |M\rangle = 0, \quad r > -M, \quad \tilde{\psi}_r |M\rangle = 0, \quad r < -M,\tag{4}$$

и эти определения отвечают двухточечной функции

$$\langle 0 | \tilde{\psi}(z) \psi(w) | 0 \rangle = \frac{\sqrt{dz dw}}{z - w}.\tag{5}$$

Более распространенные так называемые “японские” соглашения (с целочисленной нумерацией фермионных мод $\psi_i, \psi_i^*, i \in \mathbb{Z}$, см., например, [9]) могут быть

получены из введенных посредством

$$\tilde{\psi}_r \rightarrow \psi_{r+1/2}, \quad \psi_r \rightarrow \psi_{r+1/2}^*, \quad M = -n. \quad (6)$$

Удобно также использовать базис состояний, отвечающих разбиениям: для каждого разбиения $\mathbf{k} = (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{\ell_{\mathbf{k}}} = 0 \geq 0 \dots)$ построим состояние в пространстве Фока

$$|M; \mathbf{k}\rangle = \psi_{-M+1/2-k_1} \psi_{-M+3/2-k_2} \dots = \bigwedge_{r>-M} \psi_{r-k_i}. \quad (7)$$

Определим также $U(1)$ -ток:

$$J = : \tilde{\psi} \psi : = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n w^{-n} \frac{dw}{w}, \quad J_n = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} : \tilde{\psi}_r \psi_{r+n} :. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} [J_n, \psi_r] &= -\psi_{r+n}, & [J_n, \tilde{\psi}_r] &= \tilde{\psi}_{r-n}, \\ [J_n, \psi(w)] &= -w^n \psi(w), & [J_n, \tilde{\psi}(w)] &= w^n \tilde{\psi}(w). \end{aligned} \quad (9)$$

Вспомним также правила бозонизации

$$\tilde{\psi} = : e^{i\phi} :, \quad \psi = : e^{-i\phi} :, \quad J = i\partial\phi, \quad (10)$$

где

$$\phi(z)\phi(0) \sim -\ln z + \dots, \quad (11)$$

и полезный факт из теории представлений групп $U(\hat{N})$ и перестановок, а именно соответствие Шура–Вейля, которое заключается в том, что

$$(\mathbf{C}^{\hat{N}})^{\otimes k} = \bigoplus_{\mathbf{k}, |\mathbf{k}|=k} R_{\mathbf{k}} \otimes \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \quad (12)$$

как представление $\mathcal{S}_k \times U(\hat{N})$. Теперь пусть $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_{\hat{N}})$ представляет собой матрицу из группы $U(\hat{N})$. Тогда, пользуясь формулой характеров Вейля и правилами бозонизации (10), легко получить, что

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}_{\mathbf{k}}} U = \left\langle \hat{N}; \mathbf{k} \mid : \exp \left(i \sum_{n=1}^{\hat{N}} \phi(u_n) \right) : \mid 0 \right\rangle = s_{\mathbf{k}}(u_1, \dots, u_{\hat{N}}) = \frac{\det u_j^{k_i + \hat{N} - i}}{\det u_j^{\hat{N} - i}} \quad (13)$$

представляют собой стандартные функции Шура для любого разбиения $\mathbf{k}$ (замечательный обзор свойств этих функций можно найти в [10]). В частности, из этой формулы получаем

$$e^{J_{-1}/\hbar} |M\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}}{\hbar^k} |M; \mathbf{k}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\dim R_{\mathbf{k}}}{\hbar^k k!} |M; \mathbf{k}\rangle, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\mathbf{k}} &= \frac{\dim R_{\mathbf{k}}}{k!} = \prod_{i < j} \frac{k_i - k_j + j - i}{j - i} = \\ &= \prod_{i=1}^{\ell_{\mathbf{k}}} \frac{(\ell_{\mathbf{k}} - i)!}{(\ell_{\mathbf{k}} + k_i - i)!} \prod_{1 \leq i < j \leq \ell_{\mathbf{k}}} \frac{k_i - k_j + j - i}{j - i} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq \ell_{\mathbf{k}}} (k_i - k_j + j - i)}{\prod_{i=1}^{\ell_{\mathbf{k}}} (\ell_{\mathbf{k}} + k_i - i)!} \end{aligned} \quad (15)$$

является мерой Планшереля. Это следует из того, что при конкретных значениях $u_1 = \dots = u_{\widehat{N}} = 1/(\hbar \widehat{N})$

$$s_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\hbar \widehat{N}}, \dots, \frac{1}{\hbar \widehat{N}} \right) \Big|_{\widehat{N} \rightarrow \infty} = \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}}{\hbar^k}. \quad (16)$$

2.2. Инстантоны и вычисление Некрасова [5]. В контексте $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий изложение начинается обычно с микроскопической теории, определяемой ультрафиолетовым препотенциалом $\mathcal{F}_{\text{UV}}$, который можно возмутить произвольными степенями голоморфных операторов,

$$\mathcal{F}_{\text{UV}} = \frac{1}{2}(\tau_0 + t_1) \text{Tr } \Phi^2 + \sum_{k>0} t_k \frac{\text{Tr } \Phi^{k+1}}{k+1} \equiv \frac{1}{2} \tau_0 \text{Tr } \Phi^2 + \text{Tr } \mathbf{t}(\Phi), \quad (17)$$

и квадратичным антиголоморфным препотенциалом $\overline{\mathcal{F}}_{\text{UV}} = (\bar{\tau}_0/2) \text{Tr } \overline{\Phi}^2$. После этого производится интегрирование по быстрым модам, т.е. пертурбативным флуктуациям с импульсами, превышающими некоторый масштаб μ , а также по непертурбативным модам, например инстантонам (и флуктуациям в окрестности инстантонов) всех размеров, не превышающих μ^{-1} . Полученная в результате эффективная теория может быть разложена по степеням ∂^2/μ^2 . Благодаря $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии ведущие члены этого разложения полностью определяются эффективным препотенциалом $\mathcal{F}(\mu)$. Постепенно понижая масштаб μ и устремив его к нулю, мы приходим к инфракрасному препотенциалу: $\mathcal{F}_{\text{UV}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{IR}}$. Аргументы, связанные с суперсимметрией, предполагают, что ренормгрупповые потоки действуют на $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ более или менее независимо друг от друга. Поэтому проблему вычисления голоморфных объектов можно упростить, перейдя к пределу $\bar{\tau}_0 \rightarrow i\infty$ при фиксированном $\mathcal{F}_{\text{UV}}$. В таком пределе основной вклад в континуальный интеграл дают инстантоны калибровочной теории. Постановка задачи [5] позволяет вычислить этот вклад точно, одновременно с вкладом околоинстантонных флуктуаций. Ценой, которую за это приходится заплатить, является введение в задачу дополнительных параметров, а именно некоторого инфракрасного обрезания, которое мы будем обозначать $\hbar^{-2}$, так как эта константа играет роль параметра петлевого разложения в дуальной топологической теории струн [6].

В частности, в так называемой некоммутативной $U(1)$ -теории (или теории в специальной точке пространства модулей $U(N)$ -калибровочной теории с $2N - 2$ фундаментальными гипермультиплетами) инстантонная статсумма $Z(a, \hbar, \mathbf{t})$ для возмущенного ультрафиолетового препотенциала (17) может быть представлена в виде

суммы по диаграммам Юнга, или по разбиениям [5], [6], [11]:

$$Z(a, \mathbf{t}, \hbar) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^2}{(-\hbar^2)^{|\mathbf{k}|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} t_k \frac{\text{ch}_{k+1}(a, \mathbf{k}, \hbar)}{k+1} \right], \quad (18)$$

где $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}$ – мера Планшереля (15), а полиномы Черна $\text{ch}_{k+1}(a, \mathbf{k}, \hbar)$ могут быть введены, скажем, с помощью производящей функции

$$\text{Ch}(u; \mathbf{k}, \hbar) \equiv (e^{\hbar u/2} - e^{-\hbar u/2}) \sum_{i=1}^{\infty} e^{u(a+\hbar(1/2-i+k_i))} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{l!} \text{ch}_l(a, \mathbf{k}, \hbar). \quad (19)$$

Для чистой калибровочной теории с группой $U(N)$ соответствующая статсумма определяется обобщением формулы (18):

$$Z(\vec{a}, \mathbf{t}, \hbar) = Z^{\text{pert}}(\vec{a}, \mathbf{t}, \hbar) \sum_{\vec{\mathbf{k}}} (\mathbf{m}(\vec{a}, \vec{\mathbf{k}}, \hbar))^2 (-1)^{|\vec{\mathbf{k}}|} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} t_k \frac{\text{ch}_{k+1}(\vec{a}, \vec{\mathbf{k}}, \hbar)}{k+1} \right], \quad (20)$$

где $\mathbf{m}(\vec{a}, \vec{\mathbf{k}}, \hbar)$ представляет собой $U(N)$ -обобщение меры Планшереля [11], а $Z^{\text{pert}}(\vec{a}, \mathbf{t}, \hbar)$ обозначает вклад в статсумму пертурбативных флуктуаций.

2.3. Цепочка Тоды и тау-функции. Обратимся сначала к хорошо известной формуле для тау-функций тодовской молекулы (или открытой N -цепочке Тоды с координатами $q_n(\mathbf{t}, \mathbf{a}) = \ln(Z(\mathbf{t}; n|\mathbf{a})/Z(\mathbf{t}; n-1|\mathbf{a}))$ [12]), которые определяются всеми главными n -минорами

$$Z(\mathbf{t}; n|\mathbf{a}) = \sum_{K: i_1 < \dots < i_n} \mu_K(\mathbf{a})^2 \exp \left[\sum_{l, i_k} t_l H_l(\mathbf{a}_{i_k}) \right] = \Delta_{n \times n} (A \cdot D \cdot A^T) \quad (21)$$

матрицы размера $N \times N$, которую можно разложить в матричное произведение $A_{ij} \sim \mathbf{a}_i^{j-1}$, $D_{ij} = \delta_{ij} e^{z_i} \prod_{k=1, k \neq i}^N |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k|^{-1}$, где

$$z_i = \sum_l t_l H_l(\mathbf{a}_i) = \sum_l (t_l \mathbf{a}_i^l + \dots) + z_i^{(0)} \quad (22)$$

с некоторыми подходящим образом выбранными “начальными фазами” $z_i^{(0)}$. Переписав (21) в виде

$$Z(\mathbf{t}; n|\mathbf{a}) = \sum_{|K|=n} \prod_{i \in K} \frac{e^{z_i}}{\prod_{k=1, k \neq i}^N |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k|} \prod_{i, j \in K, i \neq j} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^2, \quad (23)$$

мы видим, что первая сумма в формуле (21) производится на самом деле по разбиениям $(k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n)$ фиксированной длины, для которых

$$k_j = i_{n-j+1} + j - n - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Для конкретного решения цепочки Тоды при $\mathbf{a}_i \simeq i$ из (23) получаем

$$Z(\mathbf{t}; n) = \sum_{|K|=n} \prod_{i \in K} e^{z_i} \frac{\prod_{i, j \in K, i \neq j} (i - j)^2}{\prod_{i \in K} (i - 1)! (N - i)!}. \quad (25)$$

Такое сингулярное или “струнное” решение представляет собой набор частиц, которые движутся с постоянными скоростями, пропорциональными их номерам. В теории КП/КдФ аналогом является решение $u \propto x/t$, или линейно растущий потенциал модели Концевича [13], который никогда не опрокидывается.

Сравнивая (25) с (21), находим, что

$$\mu_K(\mathbf{a})^2|_{\mathbf{a}_i=i} = \left(\frac{\prod_{i,j \in K} (i-j)}{\prod_{i \in K} (i-1)!} \right)^2 \prod_{i \in K} \frac{(i-1)!}{(N-i)!} = \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^2|_{\ell_{\mathbf{k}}=n} \prod_{i \in K} e^{z_i^{(0)}}. \quad (26)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ при подходящем выборе гамильтонианов (19) (различные возможные варианты отличаются друг от друга некоторым линейным преобразованием времен с треугольной матрицей)

$$H_l(\mathbf{a}_i)|_{\mathbf{a}_i=i} \rightarrow \frac{\text{ch}_{l+1}(a; i, \hbar)}{l+1} \quad (27)$$

и перенормировке начальных фаз $z_i^{(0)}$, переходя от суммирования по разбиениям фиксированной длины $\ell_{\mathbf{k}} = n$ к “большому каноническому” ансамблю с помощью аналога преобразования Фурье, получаем $Z(\mathbf{t}; n) \rightarrow Z(a, \mathbf{t}, \hbar)$, т.е. статсумму (18). Согласно (14) она эквивалентна следующему фермионному коррелятору:

$$\begin{aligned} Z(a, \mathbf{t}, \hbar) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^2}{(-\hbar^2)^{|\mathbf{k}|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} t_k \frac{\text{ch}_{k+1}(a, \mathbf{k})}{k+1} \right] = \\ &= \left\langle M \left| e^{-J_1/\hbar} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \sum_{k>0} t_k W_{k+1} \right] e^{J_{-1}/\hbar} \right| M \right\rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

где взаимно коммутирующие моды генераторов алгебры W_{∞} можно определить как

$$\begin{aligned} W_{k+1} &= -\frac{\hbar^k}{k+1} \oint : \tilde{\psi} \left(\left(w \frac{d}{dw} + \frac{1}{2} \right)^{k+1} - \left(w \frac{d}{dw} - \frac{1}{2} \right)^{k+1} \right) \psi : = \\ &= \frac{\hbar^k}{k+1} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left[\left(-r + \frac{1}{2} \right)^{k+1} - \left(-r - \frac{1}{2} \right)^{k+1} \right] : \psi_r \tilde{\psi}_r :. \end{aligned} \quad (29)$$

Матричный элемент (28) является частным примером нестандартного фермионного представления тау-функции, в котором тодовские времена привязаны к нулевым модам W -генераторов (29) вместо мод $U(1)$ -тока (8). Такие представления в контексте разного рода задач обсуждались также в работах [7], [14].

Если из всех t_k только t_1 отлично от нуля, коррелятор в (28) дает

$$\begin{aligned} Z(a = \hbar M, t_1, 0, 0, \dots) &= \langle M | e^{-J_1/\hbar} e^{t_1 L_0/\hbar} e^{J_{-1}/\hbar} | M \rangle = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} t_1 a^2 + e^{t_1} \right) \right] = e^{-\mathcal{F}/\hbar^2} \end{aligned} \quad (30)$$

– статсумму топологической струны на $\mathbb{P}^1$. Это единственный случай, когда суммирование по разбиениям выполняется непосредственно, с помощью теоремы Бернсайда:

$$\sum_{\mathbf{k}, |\mathbf{k}|=k} \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{k!^2} \sum_{\mathbf{k}, |\mathbf{k}|=k} \dim R_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{k!}. \quad (31)$$

2.4. Функции Бейкера–Ахиезера. В дополнение к (14) можно рассмотреть

$$\tilde{\psi}_{-r} e^{J_{-1}/\hbar} |M+1; \emptyset\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{C}_{\mathbf{k}} |M; \mathbf{k}\rangle, \quad (32)$$

где вычисляемый с помощью теоремы Вика и с использованием свойств функций Шура (13) коэффициент

$$\tilde{C}_{\mathbf{k}} = \langle M, \mathbf{k} | \tilde{\psi}_{-r} e^{J_{-1}/\hbar} |M+1; \emptyset\rangle = \hbar^{M-|\mathbf{k}|-r-1/2} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{i - k_i + r - 1/2 - M}{i} \mathbf{m}_{\mathbf{k}} \quad (33)$$

представлен через формально бесконечное, но на самом деле конечное произведение

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{i - k_i + r - 1/2 - M}{i} = \frac{1}{\Gamma(r + 1/2 - M)} \prod_{i=1}^{\ell_{\mathbf{k}}} \frac{i - k_i + r - 1/2 - M}{i + r - 1/2 - M}. \quad (34)$$

Таким образом, для функций Бейкера–Ахиезера получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r) &= \frac{\langle M | e^{-J_1/\hbar} \tilde{\psi}_{-r} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \sum_{k>0} t_k W_{k+1}\right] e^{J_{-1}/\hbar} |M+1\rangle}{\langle M | e^{-J_1/\hbar} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \sum_{k>0} t_k W_{k+1}\right] e^{J_{-1}/\hbar} |M\rangle} = \\ &= \frac{\hbar^{M-r-1/2}}{Z(a, \mathbf{t}, \hbar)} \exp\left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} \frac{t_k \hbar^k}{k+1} \left(\left(r + \frac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(r - \frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\right] \times \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^2}{(-\hbar^2)^{|\mathbf{k}|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} t_k \frac{\text{ch}_{k+1}(a, \mathbf{k}, \hbar)}{k+1}\right] \prod_{i=1}^{\infty} \frac{i - k_i + r - 1/2 - M}{i} = \\ &= \hbar^{M-r-1/2} \exp\left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} \frac{t_k \hbar^k}{k+1} \left(\left(r + \frac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(r - \frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\right] \times \\ &\quad \times \frac{\exp[M\Gamma'(r + 1/2)/\Gamma(r + 1/2)]}{\Gamma(r + 1/2)} \frac{Z(a, \mathbf{t} - \boldsymbol{\delta}(r), \hbar)}{Z(a, \mathbf{t}, \hbar)}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $a = M\hbar$, а сдвиг времен $\boldsymbol{\delta}(r) = (\delta_1(r), \delta_2(r), \dots)$ генерируется формулой

$$\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} \delta_k(r) \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln \frac{\Gamma(r + 1/2 - x/\hbar)}{\Gamma(r + 1/2)} + \frac{x}{\hbar} \frac{\Gamma'(r + 1/2)}{\Gamma(r + 1/2)}. \quad (36)$$

В квазиклассической асимптотике $\hbar \rightarrow 0$ при $\hbar r = z$ формула (35) дает

$$\tilde{\Psi}(z, a, \mathbf{t}, \hbar) \sim \exp\left[\frac{1}{\hbar} \left(\sum_{k>0} t_k z^k - z(\ln z - 1) + a \ln z + \dots\right)\right] \quad (37)$$

(похожие формулы в контексте пятимерных теорий Виттена–Зайберга [15] были получены в работе [16]). Аналогично можно определить двухточечные функции

$$\begin{aligned} \frac{\langle M+1 | e^{-J_1/\hbar} \tilde{\psi}_{-r} \tilde{\psi}_{-r} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \sum_{k>0} t_k W_{k+1}\right] e^{J_{-1}/\hbar} |M+1\rangle}{\langle M | e^{-J_1/\hbar} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \sum_{k>0} t_k W_{k+1}\right] e^{J_{-1}/\hbar} |M\rangle} \sim \\ \sim \exp\left[\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} \frac{t_k \hbar^k}{k+1} \left(\left(r + \frac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(r - \frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\right] \times \\ \times \frac{\exp[2M\Gamma'(r + 1/2)/\Gamma(r + 1/2)]}{\Gamma(r + 1/2)^2} \frac{Z(a, \mathbf{t} - 2\boldsymbol{\delta}(r), \hbar)}{Z(a, \mathbf{t}, \hbar)} \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} e^{S(z, a, \mathbf{t})/\hbar}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$S(z, a, \mathbf{t}) = \sum_{k>0} t_k z^k - 2z(\ln z - 1) + 2a \ln z + \dots \quad (39)$$

2.5. Бозонизация. На малом фазовом пространстве ($t_k = 0$ при $k > 1$) тау-функция $\mathbb{P}^1$ -модели (30) может быть легко вычислена с использованием того факта, что ее можно представить как матричный элемент оператора эволюции для гармонического осциллятора между начальными и конечными когерентными состояниями. Действительно, после отождествления $L_0 = J_0^2/2 + J_{-1}J_1 = -M^2/2 + \alpha^\dagger \alpha / \hbar^2$, где $[\alpha, \alpha^\dagger] = \hbar^2$, на собственных состояниях с зарядом $J_0 \sim M = a/\hbar$ из (28) получаем

$$\begin{aligned} Z(a, t_1, 0, 0, \dots) &= e^{-t_1 a^2/(2\hbar^2)} \langle 0 | e^{-\alpha/\hbar^2} e^{(t_1/\hbar^2)\alpha^\dagger \alpha} e^{\alpha^\dagger/\hbar^2} | 0 \rangle = \\ &= e^{-t_1 a^2/(2\hbar^2)} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{t_1 n}}{(-\hbar^2)^n n!} = \exp \left[-\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} t_1 a^2 + e^{t_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где независимая от заряда a часть (генерируемая инстантонами на мировом листе топологической струнной $\mathbb{P}^1$ -модели) является просто ядром оператора эволюции в голоморфном представлении с фиксированными на границе α_{in} и $\alpha_{\text{out}}^\dagger$. Этот результат безусловно является квазиклассически точным, в данном случае по константе Планка в струнной нормировке ($\hbar^2$ вместо $\hbar$).

Если также включить второе время t_2 , статсумма

$$Z(M; t_1, t_2, 0, 0, \dots) = \langle M | e^{-J_1/\hbar} e^{t_1 L_0 + \hbar t_2 W_0} e^{J_{-1}/\hbar} | M \rangle \quad (41)$$

уже не может быть описана в терминах одной квазичастицы. Теперь, как видно из соотношения

$$L_0 \rightarrow H_0 = \sum_{n>0} n \alpha_n^\dagger \alpha_n = \alpha^\dagger \alpha + 2A^\dagger A + \dots, \quad (42)$$

возникает система связанных осцилляторов $[\alpha_n, \alpha_m^\dagger] = \hbar^2 \delta_{nm}$ с квадратичным гамильтонианом, возмущенным специальным, сохраняющим энергию условием $[H_0, H_I] = 0$, взаимодействием

$$W_0 \rightarrow H_I = \sqrt{2} ((\alpha^\dagger)^2 A + \alpha^2 A^\dagger) + \dots \quad (43)$$

Более точно,

$$Z(M; t_1, t_2, 0, 0, \dots) = e^{\mathbf{t}(a)/\hbar^2} \langle 0 | e^{-\alpha/\hbar^2} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} (\mathbf{t}''(a) H_0 + t_2 H_I) \right] e^{\alpha^\dagger/\hbar^2} | 0 \rangle, \quad (44)$$

где $\mathbf{t}(a) = t_1 a^2/2 + t_2 a^3/3$, $\mathbf{t}''(a) \equiv t_1 + 2t_2 a$. Поэтому задача сводится к вычислению матричных элементов

$$\left\langle 0 \left| e^{-\alpha/\hbar^2} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} (\mathbf{t}''(a) H_0 + t_2 H_I) \right] e^{\alpha^\dagger/\hbar^2} \right| 0 \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_2^{2k}}{(\hbar^2)^{2k} (2k)!} \langle \lambda | H_I^{2k} | \lambda' \rangle \quad (45)$$

для когерентных состояний

$$\alpha_n |\lambda\rangle = \lambda \delta_{n,1} |\lambda\rangle \quad (46)$$

Препотенциал как сумма всех связных древесных диаграмм в бозонной теории поля с кубичным взаимодействием. Каждая вершина пропорциональна t_2 , а каждая пара внешних хвостов – множителю $e^{t''(a)}$. Изображенные диаграммы отвечают буквально вкладу редуцированной “бозонной модели БКШ”, где штриховыми линиями отмечены $\langle AA^\dagger \rangle$ –“пропагаторы”.

при $\lambda = -1$ и $\lambda' = e^{t''(a)/\hbar^2}$, $\langle \lambda | \lambda' \rangle = e^{-t''(a)/\hbar^2}$.

В квазиклассическом приближении матричный элемент (45) равен

$$\left\langle 0 \left| e^{-\alpha/\hbar^2} \exp \left[\frac{1}{\hbar^2} (t''(a)H_0 + t_2 H_I) \right] e^{\alpha^\dagger/\hbar^2} \right| 0 \right\rangle \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} e^{-F(t'', t_2)/\hbar^2}, \quad (47)$$

так что для препотенциала $\ln Z = -\mathcal{F}/\hbar^2 + O(1)$ из (44), (47) получаем

$$\mathcal{F} = t(a) + F(t''(a), t_2). \quad (48)$$

Нетривиальный вклад $F(t''(a), t_2)$ может быть представлен в виде суммы по всем связным древесным диаграммам (см. рисунок) в бозонной теории поля (45) с кубичным взаимодействием, что отражается в появлении функции Ламберта в точном квазиклассическом решении. Любопытно было бы найти точное решение этой теории, хотя бы квазиклассически, что уже не вполне тривиально даже для редуцированной модели БКШ двух связанных осцилляторов, отвечающих первым членам в формулах (42), (43) и диаграммам, изображенным на рисунке. Соответствующая классическая система

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= t''\alpha + 2t_2\alpha^\dagger A, & \dot{\alpha}^\dagger &= -t''\alpha^\dagger - 2t_2\alpha A^\dagger, \\ \dot{A} &= 2t''A + t_2\alpha^2, & \dot{A}^\dagger &= -2t''A^\dagger - t_2\alpha^{\dagger 2} \end{aligned} \quad (49)$$

может быть проинтегрирована в терминах эллиптических функций и обладает, в частности, решением в виде кинка. Мы вернемся к подробному обсуждению этих вопросов в отдельной публикации.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Инстантонное вычисление в $\mathcal{N} = 2$ расширенной калибровочной теории (17) приводит к препотенциалу Виттена–Зайберга, определяемому как критическое значение функционала¹⁾

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int dx f''(x) \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2} \int_{x_1>x_2} dx_1 dx_2 f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) \quad (50)$$

¹⁾В дальнейшем удобно выбрать другую, отличающуюся в два раза нормировку времен t , соответствующую стандартному соглашению для квазиклассических иерархий [2].

по отношению ко второй производной профильной функции $f''(x) = d^2 f/dx^2$ с ядром

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right), \quad (51)$$

совпадающим с пертурбативным препотенциалом чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Формула (50) означает, что основной вклад в квазиклассическую свободную энергию для статсумм (18) и (20) вносит одна “большая” диаграмма Юнга, отвечающая разбиению $\mathbf{k}^*$ с профильной функцией $f_{\mathbf{k}^*}(x) = f(x)$, где для каждого разбиения $\mathbf{k} = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{\ell_{\mathbf{k}}} \geq k_{\ell_{\mathbf{k}}+1} = 0, \dots$ профильная функция определяется формулой

$$f_{\mathbf{k}}(x) = |x-a| + \sum_{i=1}^{\ell_{\mathbf{k}}} (|x-a-\hbar(k_i-i+1)| - |x-a-\hbar(k_i-i)| - |x-a-\hbar(1-i)| + |x-a+\hbar i|) \quad (52)$$

(подробнее см. в [11], [1]). В частности, для полиномов (19) можно написать

$$\text{ch}_l(a, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int dx f_{\mathbf{k}}''(x) x^l \sim \sum_{i=1}^{\infty} ((a + \hbar(k_i - i + 1))^l - (a + \hbar(k_i - i))^l). \quad (53)$$

Вариационную задачу для функционала (50) следует решать с учетом нормировки функции $f(x)$, а также при условии

$$a = \frac{1}{2} \int dx x f''(x), \quad (54)$$

которое налагается обычным образом, путем добавления его с множителем Лагранжа

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} + a^D \left(a - \frac{1}{2} \int dx x f''(x) \right), \quad (55)$$

что имеет вид дополнительного члена с $k = 0$ в первом слагаемом формулы (50). Постановка задачи для функционала (50) почти идентична стандартной квазиклассической проблеме для матричных моделей, в которой ядро кулоновского газа заменено на (многозначную!) функцию Виттена–Зайберга (51).

Экстремальное уравнение для функционала (50) имеет вид

$$\sum_{k>0} t_k x^k - \int d\tilde{x} f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})(\ln |x - \tilde{x}| - 1) = a^D \quad (56)$$

на носителе $\mathbf{I}$, где $f''(x) \neq 0$. В общем случае неабелевой микроскопической теории носитель состоит из нескольких (несвязных) отрезков вдоль вещественной оси в комплексной плоскости, на которых числа заполнения фиксируются независимым образом с помощью нескольких множителей Лагранжа (см. ниже). Уравнение (56) означает, что

$$S(z) = \sum_{k>0} t_k z^k - \int dx f''(x)(z - x)(\ln(z - x) - 1) - a^D \quad (57)$$

представляет собой аналитическую многозначную функцию на двойном накрытии z -плоскости, обладающую следующими свойствами.

1. Вещественная часть многозначной функции (57) на разрезе равна нулю,

$$S(x) = \frac{1}{2}(S(x + i0) + S(x - i0)) = 0, \quad x \in \mathbf{I}, \quad (58)$$

благодаря условию (56).

2. Для ее мнимой части можно написать

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} S(z \pm i0) = \mp \int_z^\infty dx f''(x)(z - x) = \mp \begin{cases} 0, & z > x^+, \\ a - z + f(z), & x^- < z < x^+, \\ 2(a - z), & z < x^-. \end{cases} \quad (59)$$

3. Из (59) следует, что даже дифференциал dS является многозначным. Действительно, легко установить для

$$\Phi = \frac{dS}{dz} = \mathbf{t}''(z) - \int dx f''(x) \ln(z - x), \quad (60)$$

что

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Phi(z \pm i0) = \pm \begin{cases} 0, & z > x^+, \\ 1 - f'(z), & x^- < z < x^+, \\ 2, & z < x^-. \end{cases} \quad (61)$$

Однако дифференциал

$$d\Phi = \mathbf{t}'''(z) dz + dz \int \frac{dx f''(x)}{z - x} \quad (62)$$

уже однозначен на двойном накрытии разрезанной z -плоскости и имеет периоды $\oint d\Phi \sim 4\pi i\mathbb{Z}$, так что дифференциал dS определен по модулю $4\pi idz$, и его периодам $\oint dS$ можно придать смысл благодаря тому, что $\oint dz = 0$. Таким образом, экспонента $e^{\Phi/2}$ уже однозначна на двойном накрытии и равна единице на разрезе.

4. При рассмотрении асимптотики (57) в дальнейшем всегда будет выбираться ветвь, которая вещественна вдоль вещественной оси, т.е. асимптотика будет браться при вещественных $x \rightarrow +\infty$. В частности, именно таким образом следует понимать все вычеты – как коэффициенты разложения, вообще говоря, многозначного дифференциала при $x \rightarrow +\infty$.

5. Дифференцируя формулу (56) по переменной x или интегрируя по частям, ее можно привести буквально к виду, возникающему в контексте матричных моделей. Однако в рамках теории Виттена–Зайберга следует искать решение с другими аналитическими свойствами: резольвента матричной модели $G \sim dS/dz$ не имеет полюсов в точках ветвления, где $dz = 0$ (см., например, [17] и ссылки на литературу в данной работе), что не является верным для (57).

Асимптотически из формулы (57) получаем

$$\begin{aligned}
 S(z) & \underset{z \rightarrow \infty}{=} -2z(\ln z - 1) + \sum_{k>0} t_k z^k + \\
 & + \ln z \int dx x f''(x) - a^D - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k z^k} \int dx f''(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} = \\
 & = -2z(\ln z - 1) + \sum_{k>0} t_k z^k + 2a \ln z - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k z^k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k}, \quad (63)
 \end{aligned}$$

где, следуя (50) и с учетом соглашения $\text{res} \big|_{\infty} \frac{dz}{z} = 1$,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{1}{2(k+1)} \int dx f''(x) x^{k+1}, \quad k > 0, \quad (64)$$

а также согласно (55)

$$a^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}. \quad (65)$$

Коэффициент при члене $z(\ln z - 1)$ фиксируется благодаря условию

$$\int_{\mathbf{I}} dx f''(x) = f'(x^+) - f'(x^-) = 2, \quad (66)$$

где точки $x^{\pm}$ (в случае одного разреза) могут быть определены как два решения уравнения

$$f(x^{\pm}) = |x^{\pm} - a|. \quad (67)$$

Используя вариационное уравнение (56), для функционала (50) можно также написать двойное интегральное представление (ср. с [18])

$$\mathcal{F} = aa^D + \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) + \Sigma_0, \quad (68)$$

выражающее его в терминах пертурбативного ядра (51) и экстремальной профильной функции $f(x)$, являющейся решением уравнения (56). Зависящая от всех времен константа Σ_0 возникает в формуле (68) вследствие условия (66) и оказывается равной постоянной части первой первообразной функции (57).

4. БЕЗДИСПЕРСИОННАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ

В случае одного разреза двойное накрытие z -плоскости $y^2 = (z - x^+)(z - x^-)$ можно всегда представить в виде

$$z = v + \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad (69)$$

где $x^{\pm} = v \pm 2\Lambda$, и

$$y^2 = (z - v)^2 - 4\Lambda^2. \quad (70)$$

На двойном накрытии (69), которое в случае одного разреза представляет собой просто $\mathbb{P}^1$ с двумя отмеченными точками $P_{\pm}$, где $z(P_{\pm}) = \infty$, $w^{\pm 1}(P_{\pm}) = \infty$, формула (57) задает функцию с логарифмическим разрезом и асимптотическим поведением (63), нечетную относительно инволюции $w \leftrightarrow 1/w$ кривой (69). В терминах униформирующей переменной w можно написать глобально

$$S = -2 \left(v + \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) \right) \ln w - 2\Lambda(\ln \Lambda - 1) \left(w - \frac{1}{w} \right) + \sum_{k>0} t_k \Omega_k(w) + 2a \ln w, \quad (71)$$

где

$$\Omega_k(w) = z_+^k - z_-^k, \quad k > 0, \quad (72)$$

представляют собой полиномы Лорана, нечетные относительно инволюции $w \leftrightarrow 1/w$. Первый член в формуле (71) возникает при преобразовании Лежандра от дифференциала Виттена–Зайберга $d\Sigma \sim z dw/w$.

Канонические времена цепочки Тоды определяются коэффициентами при сингулярных членах в формуле (63)

$$t_0 = \text{res}|_{P_+} dS = -\text{res}|_{P_-} dS = 2a \quad (73)$$

и

$$t_k = \frac{1}{k} \text{res}|_{P_+} z^{-k} dS = -\frac{1}{k} \text{res}|_{P_-} z^{-k} dS, \quad k > 0. \quad (74)$$

Из разложения (63) также немедленно следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{1}{2} \text{res}|_{P_+} z^k dS = -\frac{1}{2} \text{res}|_{P_-} z^k dS, \quad k > 0. \quad (75)$$

Формулы (73)–(75) вместе с (65) отождествляют производящую функцию (50) с логарифмом квазиклассической тау-функции, оказывающейся в рассматриваемом случае единственного разреза тау-функцией *бездисперсионной* иерархии цепочки Тоды.

Условие согласованности для формул (75) обеспечивается симметричностью вторых производных

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_k} = \frac{1}{2} \text{res}|_{P_+} (z^k d\Omega_n), \quad (76)$$

где производные (63) по временам,

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{\partial S}{\partial a} \Big|_{z \rightarrow P_{\pm}} = \pm \left(2 \ln z - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} - 2 \sum_{n>0} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a \partial t_n} \frac{1}{nz^n} \right), \\ \Omega_k &= \frac{\partial S}{\partial t_k} \Big|_{z \rightarrow P_{\pm}} = \pm \left(z^k - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a \partial t_k} - 2 \sum_{n>0} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_k \partial t_n} \frac{1}{nz^n} \right), \quad k > 0, \end{aligned} \quad (77)$$

образуют базис мероморфных функций с согласованными полюсами в точках $P_{\pm}$, где $z(P_{\pm}) = \infty$. Все производные по временам вычисляются при постоянном z .

Разложения (77) гамильтоновых функций (72) выражают вторые производные $\mathcal{F}$ в терминах коэффициентов уравнения кривой (69), например

$$\begin{aligned}\Omega_0 &=_{z \rightarrow \infty} 2 \ln z - 2 \ln \Lambda - \frac{2v}{z} - \frac{2\Lambda^2 + v^2}{z^2} + \dots, \\ \Omega_1 &=_{z \rightarrow \infty} z - v - \frac{2\Lambda^2}{z} - \frac{2v\Lambda^2}{z^2} + \dots, \\ \Omega_2 &=_{z \rightarrow \infty} z^2 - (v^2 + 2\Lambda^2) - \frac{4v\Lambda^2}{z} - \frac{2\Lambda^2(\Lambda^2 + 2v^2)}{z^2} + \dots.\end{aligned}\quad (78)$$

Сравнение коэффициентов в формулах (78), в частности, приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} = \ln \Lambda^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a \partial t_1} = v \quad (79)$$

и уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} = \Lambda^2 = e^{\partial^2 \mathcal{F} / \partial a^2}, \quad (80)$$

которое превращается в длинноволновой предел уравнения цепочки Тоды после взятия дополнительной производной по a

$$\frac{\partial^2 a^D}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial a} e^{\partial a^D / \partial a} \quad (81)$$

для тодовской координаты $a^D = \partial \mathcal{F} / \partial a$. Подставляя разложения (78) в (76), можно найти выражения для так называемых контактных членов [19] в $U(1)$ -случае, которые являются полиномами единственной переменной v , с коэффициентами, зависящими от Λ .

Теперь можно найти зависимость коэффициентов кривой (69) от параметров деформации $\mathbf{t}$ микроскопической теории, потребовав $dS = 0$ в точках ветвления, в которых $dz = 0$. Это условие предохраняет от появления дополнительных сингулярностей в точках ветвления при вариации dS по модулям кривой. Уравнение на точки ветвления

$$\frac{dz}{d \ln w} = \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) = 0 \quad (82)$$

приводит к значениям $w = \pm 1$, при которых

$$\left. \frac{dS}{d \ln w} \right|_{w=\pm 1} = \sum_{k>0} t_k \left. \frac{d\Omega_k}{d \ln w} \right|_{w=\pm 1} + 2a - 2v \mp 4\Lambda \ln \Lambda = 0. \quad (83)$$

В случае, когда все $t_k = 0$ при $k > 1$, решение уравнений (83) немедленно дает

$$v = a, \quad \Lambda^2 = e^{t_1}, \quad (84)$$

и препотенциал имеет вид

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} a a^D + \frac{1}{2} \operatorname{res}_{|P_+}(z dS) - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} a^2 t_1 + e^{t_1}. \quad (85)$$

Добавив ненулевое t_2 , находим

$$v = a - \frac{1}{2t_2} \mathbf{L}(-4t_2^2 e^{t_1+2t_2 a}), \quad \ln \Lambda^2 = t_1 + 2t_2 a - \mathbf{L}(-4t_2^2 e^{t_1+2t_2 a}), \quad (86)$$

где функция Ламберта $\mathbf{L}(t)$ определяется разложением

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} t^n}{n!} = t - t^2 + \frac{3}{2} t^3 - \frac{8}{3} t^4 + \dots \quad (87)$$

и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathbf{L}(t) e^{\mathbf{L}(t)} = t. \quad (88)$$

Таким образом, для препотенциала с $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \left(a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} + \sum_{k>1} (1-k) t_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} - \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} a a^D + \frac{1}{4} \sum_{k>1} (1-k) t_k \operatorname{res} |_{P_+} (z^k dS) + \frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+} (z dS) - \frac{a^2}{2} = \\ &_{t_k=0, k>2} = \frac{1}{2} a a^D + \frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+} (z dS) - \frac{1}{4} t_2 \operatorname{res} |_{P_+} (z^2 dS) - \frac{a^2}{2}, \end{aligned} \quad (89)$$

откуда можно получить его инстантонное разложение (например, как разложение по инстантонному параметру q после сдвига $t_1 \rightarrow t_1 + \frac{1}{2} \ln q$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathbf{t}(a) + e^{\mathbf{t}''(a)} + t_2^2 e^{2\mathbf{t}''(a)} + \frac{8}{3} t_2^4 e^{3\mathbf{t}''(a)} + \frac{32}{3} t_2^6 e^{4\mathbf{t}''(a)} + \\ &+ \frac{160}{3} t_2^8 e^{5\mathbf{t}''(a)} + \frac{1536}{5} t_2^{10} e^{6\mathbf{t}''(a)} + \dots = \mathbf{t}(a) + S(a) + \frac{1}{4} S(a) S''(a) + \dots, \end{aligned} \quad (90)$$

где $S(a) = e^{\mathbf{t}''(a)}$. Разложение (90) буквально отвечает суммированию по связным древесным диаграммам в бозонной модели, представленным на рисунке.

Легко также вычислить явный вид экстремальной профильной функции для ненулевых t_1 , t_2 , который выражается формулой

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{x-v}{2\Lambda} \right) + t_2 \sqrt{4\Lambda^2 - (x-v)^2} \right), \quad v - 2\Lambda \leq x \leq v + 2\Lambda, \quad (91)$$

где $v = v(\mathbf{t})$ и $\Lambda = \Lambda(\mathbf{t})$ заданы в (86) и удовлетворяют соотношениям

$$v - a = 2t_2 \Lambda^2, \quad \ln \Lambda^2 = t_1 + 2t_2 v. \quad (92)$$

Формула (91) непосредственно следует из (62) и прямого следствия определения (71) при условиях (92), а именно выражения

$$\begin{aligned} \Phi(w; t_1, t_2, a) &= 2t_2 y - 2 \ln w + (t_1 + 2t_2 v - \ln \Lambda^2) \frac{z-v}{y} + 2 \frac{a-v+2t_2 \Lambda^2}{y} = \\ &= 2t_2 \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) - 2 \ln w, \end{aligned} \quad (93)$$

где последнее равенство получено с учетом (92).

Заметим, что формула (91) утверждает, что “закон арксинуса” Вершика–Керова [20] для предельной формы деформируется полукруговым распределением Вигнера.

Если же первые три времени t_1, t_2, t_3 отличны от нуля, вместо формулы (91) получаем

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{x-v}{2\Lambda} \right) + (t_2 + 3t_3v) \sqrt{4\Lambda^2 - (x-v)^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} t_3 (x-v) \sqrt{4\Lambda^2 - (x-v)^2} \right), \quad v - 2\Lambda \leq x \leq v + 2\Lambda, \quad (94)$$

где v и Λ удовлетворяют условиям

$$v - a = 2(t_2 + 3t_3v)\Lambda^2, \quad \ln \Lambda^2 = t_1 + 2t_2v + 3t_3(v^2 + 2\Lambda^2). \quad (95)$$

В общем случае для предельной формы возникает формула

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{x-v}{2\Lambda} \right) + \sum_{k>1} t_k Q_k(x) \sqrt{4\Lambda^2 - (x-v)^2} \right), \quad (96) \\ v - 2\Lambda \leq x \leq v + 2\Lambda,$$

где v и Λ удовлетворяют уравнениям типа годографа $v - a = P_v(v, \Lambda; \mathbf{t})$, $\ln \Lambda^2 = P_\Lambda(v, \Lambda; \mathbf{t})$ для некоторых полиномов P_v и P_Λ , разложение которых по временам $\mathbf{t}$ легко воспроизводится из приведенных выше формул общего решения.

5. РАСШИРЕННАЯ НЕАБЕЛЕВА ТЕОРИЯ

Случаю $U(N)$ -калибровочной теории отвечает решение с N разрезами $\{\mathbf{I}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, которое возникает после добавления к функционалу (50) N дополнительных условий с множителями Лагранжа:

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} + \sum_{i=1}^N a_i^D \left(a_i - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}_i} dx x f''(x) \right), \quad (97)$$

т.е. решение интегрального уравнения

$$\sum_{k>0} t_k x^k - \int d\tilde{x} f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})(\ln |x - \tilde{x}| - 1) = a_i^D, \quad x \in \mathbf{I}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (98)$$

Теперь это решение можно построить в терминах абелевых интегралов на двойном накрытии

$$y^2 = \prod_{i=1}^N (z - x_i^+)(z - x_i^-), \quad (99)$$

являющемся гиперэллиптической кривой рода $g = N - 1$. Определим, как ранее,

$$S(z) = \mathbf{t}'(z) - \int dx f''(x)(z - x)(\ln(z - x) - 1) - a^D, \quad (100)$$

где интеграл берется по всему носителю $\mathbf{I} = \bigcup_{i=1}^N \mathbf{I}_i$, $a^D = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j^D$, и рассмотрим ее дифференциал

$$\Phi(z) = \frac{dS}{dz} = \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} - \int dx f''(x) \ln(z-x), \quad (101)$$

на любом разрезе удовлетворяющий условию

$$\Phi(x+i0) + \Phi(x-i0) = 0, \quad x \in \mathbf{I}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (102)$$

и нормированный следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(x_N^+) &= 0, \\ \Phi(x_j^- \pm i0) &= \Phi(x_{j-1}^+ \pm i0) = \pm 2\pi i(N-j+1), \quad j = 2, 3, \dots, N, \\ \Phi(x_1^-) &= \pm 2\pi iN. \end{aligned} \quad (103)$$

5.1. Нулевые микроскопические времена. Рассмотрим сначала все $t_k = 0$ при $k \neq 1$ и определим $\Lambda^{2N} = e^{t_1}$. Теперь $\Phi = dS/dz$ является абелевым интегралом на кривой (99) с асимптотикой

$$\Phi \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \mp 2N \ln z \pm 2N \ln \Lambda + O(z^{-1}), \quad (104)$$

скачки которой удовлетворяют условию целочисленности (103), или $\oint d\Phi \sim 4\pi i\mathbb{Z}$. Это означает, что гиперэллиптическая кривая (99) является также алгебраической римановой поверхностью для функции $w = e^{-\Phi/2}$, удовлетворяющей квадратному уравнению

$$\Lambda^N \left(w + \frac{1}{w} \right) = P_N(z) = \prod_{i=1}^N (z - v_i), \quad (105)$$

так как для двух ветвей $w_+ = w$ и $w_- = 1/w$ можно немедленно обнаружить, что их произведение $w_+ \cdot w_-$ и сумма $w_+ + w_-$ являются полиномами по z заданных степеней (константа и полином степени N соответственно).

Эквивалентно можно сказать, что концы разрезов в формуле (99) ограничены N связями таким образом, что это уравнение может быть переписано в виде

$$y^2 = P_N(z)^2 - 4\Lambda^{2N}, \quad (106)$$

т.е. $\{x_i^{\pm}\}$ являются корнями уравнения $P_N(z) \mp 2\Lambda^N = 0$, и

$$y = \Lambda^N \left(w - \frac{1}{w} \right). \quad (107)$$

Производящий дифференциал (101), в данном случае имеющий вид

$$dS = -2 \ln w \, dz = -d(2z \ln w) + 2z \frac{dw}{w}, \quad (108)$$

является преобразованным по Лежандру дифференциалом Виттена–Зайберга $d\Sigma \sim z dw/w$ на кривой (105), (106). Его периоды

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} z \frac{dw}{w} \quad (109)$$

совпадают с интегралами Виттена–Зайберга, а единственные нетривиальные вычеты в бесконечностях дают

$$\begin{aligned} \operatorname{res} |_{P_+} (z^{-1} dS) &= -\operatorname{res} |_{P_-} (z^{-1} dS) = \ln \Lambda^{2N}, \\ \operatorname{res} |_{P_+} (dS) &= -\operatorname{res} |_{P_-} (dS) = 2 \sum_{j=1}^N v_j. \end{aligned} \quad (110)$$

Дифференциал (108) удовлетворяет условию

$$\delta dS \sim \frac{\delta w}{w} dz = \frac{\delta P(z)}{y} dz = \text{holomorphic}, \quad (111)$$

где мы использовали равенство $\sum_{j=1}^N v_j = 0$, а вариация выполняется при постоянных координате z и масштабном факторе Λ . Таким образом, интегрируемая система “на малом фазовом пространстве” решается относительно масштаба $\Lambda^{2N} = e^{t_1}$ и модулей v_j , $j = 1, 2, \dots, N$, вакуумов $U(N)$ -калибровочной теории, удовлетворяющих уравнению $\sum_{j=1}^N v_j = a$ и трансцендентным уравнениям на периоды Виттена–Зайберга (122) (см. ниже).

5.2. Ненулевые микроскопические времена. При “адиабатическом” включении старших времен (17) с $k > 1$ число разрезов в (98) остается неизменным, и дифференциал (101) может быть по-прежнему определен на гиперэллиптической кривой (99). Однако теперь роль бипольного дифференциала dw/w играет

$$\begin{aligned} d\Phi &= dz \left(\sum_{k>1} k(k-1)t_k z^{k-2} - \int \frac{dx f''(x)}{z-x} \right) = \\ &= \sum_{k>1} k(k-1)t_k d\Omega_{k-1} - 2N d\Omega_0 - 4\pi i \sum_{j=1}^{N-1} d\omega_j, \end{aligned} \quad (112)$$

где $d\omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, являются каноническими голоморфными дифференциалами, нормированными на A -циклы, окружающие первые $N-1$ разрезов. Дифференциалы $d\Omega_k$ в формуле (112) фиксируются своими асимптотиками при $z \rightarrow \infty$

$$d\Omega_k \underset{z \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} kz^{k-1}dz + O(z^{-2}), & k > 0, \\ \frac{dz}{z} + O(z^{-2}), & k = 0, \end{cases} \quad (113)$$

и нулевыми A -периодами

$$\oint_{A_i} d\Omega_k = 0, \quad k \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (114)$$

Ненулевые периоды самого дифференциала $d\Phi$ удовлетворяют условию

$$\oint_{A_j} d\Phi = -2\pi i \int_{\mathbf{I}_j} f''(x) dx = -2\pi i (f'(x_j^+) - f'(x_j^-)) = -4\pi i, \quad (115)$$

что говорит о том, что сам производящий дифференциал dS по-прежнему определен по модулю $4\pi i dz$. Единственным существенным отличием от предыдущего случая является то, что условие целочисленности периодов $\oint d\Phi \sim 4\pi i \mathbb{Z}$, которое было переформулировано для теории на “малом фазовом пространстве” алгебраическим образом (105), остается теперь трансцендентным уравнением, которое нельзя решить явно.

Тем не менее на кривой (99) любой нечетный относительно гиперэллиптической инволюции дифференциал может быть всегда записан в виде

$$d\Phi = \frac{s(z) dz}{y}, \quad (116)$$

где $s(z)$ является полиномом степени $N + K - 2$ при конечном числе ненулевых времен $t_1, \dots, t_K$ до K -го порядка. Старшие K коэффициентов этого полинома фиксируются ведущей асимптотикой $(t_2, \dots, t_K)$ и вычетом в бесконечности

$$\text{res}|_{P_{\pm}} d\Phi = \mp 2N, \quad (117)$$

в то время как остальные $N - 1$ коэффициентов определяются из (115). Эти условия полностью определяют дифференциал $d\Phi$ на кривой (99), которая продолжает зависеть от $2N$ (пока произвольных) точек ветвления $\{x_j^{\pm}\}$.

Сам производящий дифференциал dS может быть теперь определен в терминах абелева интеграла $\Phi(z)$:

$$dS = \Phi dz = dz \int_{z_0}^z d\Phi. \quad (118)$$

Зависимость от $2N + 1$ параметров (положение точек ветвления в (99) и z_0) ограничивается дополнительным к (115) условием обращения в нуль B -периодов

$$\oint_{B_j} d\Phi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (119)$$

Интегральное представление (101) предлагает естественную нормировку (103), т.е.

$$z_0 = x_N^+, \quad \Phi(z_0) = \Phi(x_N^+) = 0, \quad (120)$$

где x_N^+ является наибольшей из всех вещественных точек ветвления $\{x_j^{\pm}\}$. Эти условия приводят к следующему виду разложения $\Phi(z)$ вблизи точек ветвления:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \lim_{z \rightarrow x_j^{\pm}} \Phi(x_j^{\pm}) + \phi_j^{\pm} \sqrt{z - x_j^{\pm}} + \dots, \\ \phi_j^{\pm} &= \frac{2s(x_j^{\pm})}{\prod_k' \sqrt{(x_j^{\pm} - x_k^+)(x_j^{\pm} - x_k^-)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (121)$$

где константы $\Phi(x_j^\pm)$ определены формулами (103).

Остальные $N + 1$ свободных параметров поглощаются периодами

$$a_j = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}_j} dx x f''(x) = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{A_j} z d\Phi = \frac{1}{4\pi i} \oint_{A_j} dS, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (122)$$

вместе с вычетами

$$a = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{I}} dx x f''(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+} (z d\Phi) \quad (123)$$

и свободным членом, или масштабным фактором

$$t_1 = \operatorname{res} |_{P_+} (z^{-1} \Phi dz). \quad (124)$$

Напомним еще раз, что существенным отличием от теории с нулевыми временами является то, что при $t_k \neq 0$ экспонента e^Φ приобретает существенную особенность в точках $P_\pm$, и вследствие этого условия (115), (119) не могут быть разрешены алгебраическим образом. Форма разложения (121) гарантирует, что вариация производящего дифференциала при постоянном z по модулям кривой (99)

$$\begin{aligned} \delta(dS) &= \delta(\Phi dz) = \\ &= \frac{-s(x_j^\pm) \delta x_j^\pm}{\prod'_k \sqrt{(x_j^\pm - x_k^+)(x_j^\pm - x_k^-)}} \frac{dz}{\sqrt{z - x_j^\pm}} + \dots \simeq \text{holomorphic} \end{aligned} \quad (125)$$

действительно голоморфна.

Множители Лагранжа

$$a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \quad (126)$$

могут быть вычислены с помощью стандартного приема. Рассмотрим уравнения (98) при $i \neq j$ и зафиксируем переменные x на концах соответствующих разрезов. Тогда

$$a_i^D - a_j^D = \operatorname{Re} \int_{x_j^+}^{x_i^-} dS = \frac{1}{2} \oint_{B_{ij}} dS \quad (127)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} = \frac{1}{2} \oint_{B_i} dS, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (128)$$

Для производных препотенциала по временам можно выписать следующие формулы:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+} (z^k dS) = -\frac{1}{2(k+1)} \operatorname{res} |_{P_+} (z^{k+1} d\Phi). \quad (129)$$

6. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ И ЯВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из разложения (101) в случае $U(N)$ -расширенной калибровочной теории по-прежнему следует, что первые производные квазиклассической тау-функции $\mathcal{F}$ определяются формулами (64) и (75), в то время как для вторых производных возникает формула (76), или

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_m} = \frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+} (z^m d\Omega_n) = \frac{1}{2} \operatorname{res} |_{P_+ \otimes P_+} (z(P)^n z(P')^m W(P, P')), \quad (130)$$

в которой был введен бидифференциал $W(P, P') = d_P d_{P'} \ln E(P, P')$, где $E(P, P')$ – главная форма на комплексной кривой (см. определения в книге [21]). В обратных координатах $z = z(P)$ и $z' = z(P')$ около точки P^+ с $z(P^+) = \infty$ разложение бидифференциала имеет вид

$$W(z, z') = \frac{dz dz'}{(z - z')^2} + \dots = \sum_{k>0} \frac{dz}{z^{k+1}} d\Omega_k(z') + \dots \quad (131)$$

Бидифференциал $W(P, P')$ может быть связан формулой [21]

$$S_e(P, P') S_{-e}(P, P') = W(P, P') + d\omega_i(P) d\omega_j(P') \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \ln \theta_e(0 | T) \quad (132)$$

с ядром Сеге, которое для четной характеристики $e \equiv -e$ имеет явное выражение на гиперэллиптической кривой (99)

$$S_e(z, z') = \frac{U_e(z) + U_e(z')}{2\sqrt{U_e(z)U_e(z')}} \frac{\sqrt{dz dz'}}{z - z'} \quad (133)$$

с

$$U_e(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^N \frac{z - x_{e_j^+}}{z - x_{e_j^-}}}. \quad (134)$$

В данной формуле $x_{e_j^\pm}$ представляет собой разбиение точек ветвления уравнения (99) на две группы, отвечающее характеристике e . Например, на малом фазовом пространстве, где кривая (99) идентична кривой Виттена–Зайберга (105), существует выделенное разбиение $e = E$, отвечающее четной характеристике с

$$U_E(z) = \sqrt{\frac{P(z) - 2\Lambda^N}{P(z) + 2\Lambda^N}}. \quad (135)$$

Подставляя (132), (133) в формулу (130), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_m} &= \frac{1}{2} \operatorname{res}_{|P_+ \otimes P_+} (z(P)^m z(P')^n S_e(P, P')^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{res}_{|P_+} (z^n d\omega_i) \cdot \operatorname{res}_{|P_+} (z^m d\omega_j) \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \ln \theta_e(0 | T) = \\ &= P_{nm}^{(e)}(x_{e_j^\pm}) - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial t_n} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_j \partial t_m} \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \ln \theta_e(0 | T), \end{aligned} \quad (136)$$

где для “контактных полиномов” из (133) следует, что

$$P_{nm}^{(e)}(x_{e_j^\pm}) = \frac{1}{4} \operatorname{res}_{|P_+ \otimes P_+} \left(\frac{z^k z'^n}{(z - z')^2} \left(1 + \frac{U_e(z)}{2U_e(z')} + \frac{U_e(z')}{2U_e(z)} \right) dz dz' \right). \quad (137)$$

При вычислении в окрестности малого фазового пространства и подходящем выборе характеристики (135) вычеты (137) обращаются в нуль при $n, m < N$, и возникают в точности предсказанные в работе [19] формулы

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_m} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial a_i} \frac{\partial u_{m+1}}{\partial a_j} \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \ln \theta_E(0 | T), \quad n, m < N, \quad (138)$$

в которых

$$u_n = 2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_{n-1}} = \frac{1}{n} \operatorname{res} |_{P_+} \left(z^n \frac{P'_N dz}{y} \right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^N v_l^n = \frac{1}{n} \langle \operatorname{Tr} \Phi^n \rangle. \quad (139)$$

Уравнение (138) представляет собой частный случай обобщенных бездисперсионных уравнений Хироты для цепочки Тоды, выведенных в [18].

Отметим, что вывод ренормгруппового уравнения (138) в работе [1] практически идентичен проведенному ранее в работе [22] для другой версии расширенной теории Виттена–Зайберга, которая определялась производящим дифференциалом

$$d\tilde{S} = \sum_{k>0} T_k d\tilde{\Omega}_k = \sum_{k>0} T_k P(z)_+^{k/N} \frac{dw}{w} \quad (140)$$

непосредственно на кривой Виттена–Зайберга (105) (форма уравнения которой не менялась при введении старших потоков $\{T_k\}$, в отличие от квазиклассической иерархии, определяемой производящим дифференциалом (118)), а все производные вычислялись при постоянном w . Например, если $N = 1$ и только времена T_0, T_1 отличны от нуля с дифференциалами $d\tilde{\Omega}_1 = d\Omega_1 = (z - v) dw/w$, получим

$$\frac{\partial}{\partial T_1} (z - v) = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_1} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad (141)$$

а также

$$\frac{\partial d\tilde{S}}{\partial T_1} = d\Omega_1 + T_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial T_1} \left(w + \frac{1}{w} \right) \frac{dw}{w} = \left(1 + \frac{T_1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial T_1} \right) d\Omega_1, \quad (142)$$

что означает, в частности, что масштабный фактор $\Lambda \sim T_1$ линейно зависит от первого времени, в отличие от экспоненциальной зависимости в формуле (84). Действительно, вычисляя производные функции (71) при постоянном z , вместо формулы (141) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t_1} \left(w + \frac{1}{w} \right) + \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) \frac{\partial \ln w}{\partial t_1} = 0, \quad (143)$$

а значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t_1} &= \frac{\partial}{\partial t_1} \left(t_1 \Omega_1 + 2a \ln w - 2z \ln w - 2\Lambda (\ln \Lambda - 1) \left(w - \frac{1}{w} \right) \right) = \\ &= \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial t_1} (t_1 - 2 \ln \Lambda) \left(w - \frac{1}{w} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial \ln w}{\partial t_1} \left((t_1 - 2 \ln \Lambda) \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) + 2a - 2v \right), \end{aligned} \quad (144)$$

т.е. формулы (72), (77) непосредственно следуют из (84).

Выбор расширения (140) в работе [22] был обусловлен преимущественно техническими причинами: сохранялся вид кривой Виттена–Зайберга (105) и деформировался лишь дифференциал, более того, деформация сохраняла последний однозначным. Мы видим, тем не менее, что старый выбор расширенной иерархии не

является согласованным с микроскопической инстантонной теорией (17), (18), (20), поскольку выделенной координатой для квазиклассической иерархии должна быть координата z , возникающая из скалярного поля Φ векторного мультиплета $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории. При этом квазиклассическая иерархия расширенной теории определяется в еще большей степени неявно, с использованием в высшей степени трансцендентного условия $\oint d\Phi \sim 4\pi i\mathbb{Z}$ для абелева дифференциала второго (а не третьего) рода, и следует предпринять дополнительные усилия, чтобы извлечь явные результаты.

6.1. Инстантонное разложение в расширенной теории. Разложение по инстантонным вкладам $\mathcal{F} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$ в неабелевой теории начинается с пертурбативного препотенциала

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{j=1}^N \mathbf{t}(a_j) + \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j), \quad (145)$$

полностью записываемого в терминах функций (17) и (51). Этот вклад определяется вырожденным дифференциалом (116)

$$d\Phi_0 = \mathbf{t}'''(z) dz - 2 \frac{dP_N(z)}{P_N(z)} = \mathbf{t}'''(z) dz - 2 \sum_{j=1}^N \frac{dz}{z - v_j} \quad (146)$$

на рациональной кривой (которая не зависит от старших времен), а коэффициенты полинома $P_N(z)$ в формулах (105) и (146) совпадают в данном случае с пертурбативными значениями периодов Виттена–Зайберга

$$a_i = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_{|v_i} z d\Phi_0 = v_i. \quad (147)$$

Пертурбативный производящий дифференциал имеет вид $dS_0 = \Phi_0 dz$, где

$$\Phi_0 = \mathbf{t}''(z) - 2 \sum_{j=1}^N \ln(z - v_j), \quad (148)$$

и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS_0}{\partial a_j} &= 2 \frac{dz}{z - v_j}, & j &= 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial dS_0}{\partial t_k} &= k z^{k-1} dz, & k &> 0, \end{aligned} \quad (149)$$

что приводит к формуле

$$S_0(z) = \mathbf{t}'(z) - 2 \sum_{j=1}^N (z - v_j) (\ln(z - v_j) - 1). \quad (150)$$

Уравнения

$$a_j^D = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_j} = S_0(a_j) \quad (151)$$

полностью определяют препотенциал (145), поскольку на этом уровне нет никакой разницы между величинами v_j и a_j .

Более того, обращение в нуль B -периодов (119) дифференциала (146)

$$\int_{x_i^+}^{x_j^-} d\Phi_0 = 0, \quad (152)$$

где $x_j^\pm = a_j \pm \sqrt{qS_j} + O(q^2)$ представляют собой положения точек ветвления кривой (99) в окрестности пертурбативной рациональной кривой, немедленно дает величины этих отклонений

$$S_i \sim \frac{e^{t''(a_i)}}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (153)$$

где численный коэффициент легко устанавливается сравнением с кривой Виттена–Зайберга (106) на малом фазовом пространстве. Разложение по инстантонным вкладам, подобно случаю $U(1)$ -теории (90), может быть выполнено в терминах функций (153) и их производных. Например, в работе [1], пользуясь инстантонными разложениями уравнений (99), (116) и (129), мы проверили таким образом, что

$$\mathcal{F}_1 = \sum_l S_l \quad (154)$$

для калибровочной теории с группой $U(2)$ и ненулевыми временами t_1, t_2 .

6.2. Эллиптическая униформизация для $U(2)$ -теории. В случае $U(1)$ -теории задача была решена путем построения функции (71), которое было возможно благодаря существованию явной униформизации рациональной кривой (69) в терминах “глобального” спектрального параметра w . Такое вряд ли возможно для общей неабелевой теории с гиперэллиптической кривой (99) рода $g = N - 1$, но в ближайшем к рациональному случае при $N = 2$ кривая

$$y^2 = \prod_{i=1,2} (z - x_i^+) \equiv \prod_{i=1}^4 (z - x_i) \equiv R(z) \quad (155)$$

является эллиптической и поэтому может быть униформизована, скажем, с использованием функции Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \frac{R'(x_0)/4}{\wp(\xi) - R''(x_0)/24} = z_0 + \frac{\wp'(\xi_0)}{\wp(\xi) - \wp(\xi_0)} = \\ &= z_0 + \zeta(\xi - \xi_0) - \zeta(\xi + \xi_0) + 2\zeta(\xi_0), \\ \frac{dz}{d\xi} &= -\frac{\wp'(\xi_0)\wp'(\xi)}{(\wp(\xi) - \wp(\xi_0))^2} = y, \end{aligned} \quad (156)$$

где удобно выбрать

$$\begin{aligned} z_0 &= x_4, \\ R'(z_0) &= x_{43}x_{42}x_{41} = 4\wp'(\xi_0), \\ R''(z_0) &= 2(x_{41}x_{42} + x_{41}x_{43} + x_{42}x_{43}) = 24\wp(\xi_0). \end{aligned} \quad (157)$$

Абелев интеграл для $\Phi(z)$ теперь может быть вычислен в терминах эллиптических функций. Возьмем для простоты опять все $t_k = 0$ при $k > 2$. Тогда для дифференциала (116) имеем

$$d\Phi = \frac{2t_2 z^2 + s_1 z + s_0}{y} dz \underset{z \rightarrow \infty}{=} \pm \left(2t_2 dz - 4 \frac{dz}{z} - 2a \frac{dz}{z^2} + \dots \right), \quad (158)$$

и, как и было обещано ранее, эта асимптотика фиксирует коэффициенты

$$\begin{aligned} s_1 &= -4 - t_2 \sum_{i=1}^4 x_i, \\ s_0 &= -2a + 2 \sum_{i=1}^4 x_i - \frac{t_2}{4} \sum_{i=1}^4 x_i^2 + \frac{t_2}{2} \sum_{i < j} x_i x_j \end{aligned} \quad (159)$$

и в данном случае полностью определяет дифференциал (158) в терминах кривой (155). Для эллиптического интеграла (118) теперь можно написать

$$\Phi = \int_{z_0}^z d\Phi = 2t_2 (\zeta(\xi + \xi_0) + \zeta(\xi - \xi_0)) + \Phi_1 \ln \frac{\sigma(\xi_0 - \xi)}{\sigma(\xi_0 + \xi)} + \Phi_2 \xi. \quad (160)$$

Константы $\Phi_{1,2}$ легко восстанавливаются сравнением разложения

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -2t_2 (\wp(\xi - \xi_0) + \wp(\xi + \xi_0)) + \Phi_1 (\zeta(\xi - \xi_0) - \zeta(\xi + \xi_0)) + \Phi_2 \quad (161)$$

при $\xi \rightarrow \pm \xi_0$ с формулой (158) при условиях (156). Скачки многозначного абелева интеграла (160) на эллиптической кривой (155) целочисленны благодаря условиям (115) и (119), которые переписываются для данного случая в виде трансцендентных уравнений на параметры функций Вейерштрасса.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили основные свойства квазиклассической иерархии, лежащей в основе теории Виттена–Зайберга, которая была выведена в работе [1] непосредственно из микроскопического подхода, основанного на инстантонных вычислениях. Во многом прогресс был достигнут благодаря существованию “упрощенного” $U(1)$ -примера, который при наивном подходе представляется совершенно тривиальным с точки зрения теории Виттена–Зайберга. Однако даже в этом случае статсумма деформированной инстантонной теории становится нетривиальной функцией на большом фазовом пространстве, являясь тау-функцией бездисперсионной цепочки Тоды и обеспечивая прямую связь с теорией классов Громова–Виттена. Дуальный период Виттена–Зайберга (“масса монополя”) удовлетворяет уравнению длинноволнового предела цепочки Тоды как функция “массы W-бозона” и (логарифма) масштабного фактора. Гораздо менее явное квазиклассическое решение в неабелевом случае, тем не менее, строится с использованием стандартной техники на римановых поверхностях старших родов. Существенно, что включение старших времен деформирует кривую Виттена–Зайберга.

Одним из основных вопросов теперь является выход за пределы квазиклассического режима. Возможно ли хотя бы “упрощенную” $U(1)$ -задачу решить точно во всех порядках по струнной константе связи в более или менее явном виде? Необходимо также отметить, что матричные элементы в теории свободных фермионов (или бозонов) до сих пор рассматривались как формальные ряды по всем старшим временам, за исключением $t_1 \sim \ln \Lambda$. Знание их как точных функций хотя бы единственного параметра t_2 могло бы дать интересную информацию о физически различных “фазах” данной модели. Другим интересным и пока мало исследованным направлением для расширенной теории является ее экстраполяция по старшим потокам к значениям $t_k \sim \frac{1}{k} \sum_{A=1}^{N_f} m_A^{-k}$, гипотетически отвечающим добавлению N_f фундаментальных гипермультиплетов с соответствующими массами. Мы надеемся в будущем вернуться к обсуждению всех этих вопросов.

Благодарности. Автор благодарен А. Александрову, Г. Брадону, Б. Дубровину, И. Кричеву, А. Лосеву, В. Лосякову, А. Миронову, А. Морозову и в особенности Н. Некрасову и С. Харчеву за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана Федеральным агентством по атомной энергии, РФФИ (грант № 05-02-17451), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4401.2006.2), INTAS (грант № 05-100008-7865), проектом ANR-05-BLAN-0029-01, программой NWO-РФФИ (грант № 047.017.2004.015), Российско-итальянской программой РФФИ (грант № 06-01-92059-CE) и фондом “Династия”.

Список литературы

- [1] A. Marshakov, N. Nekrasov, *JHEP*, 2007, № 1, 104; [arXiv: hep-th/0612019](#).
- [2] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475; [arXiv: hep-th/9205110](#).
- [3] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; Erratum, **430** (1994), 485–486; [arXiv: hep-th/9407087](#).
- [4] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474; [arXiv: hep-th/9505035](#).
- [5] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864; [arXiv: hep-th/0206161](#).
- [6] A. S. Losev, A. Marshakov, N. Nekrasov, “Small instantons, little strings and free fermions”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan Memorial Volume, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Scientific, Singapore, 2005, 581–621; [arXiv: hep-th/0302191](#).
- [7] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles*, [arXiv: math.AG/0204305](#); *The equivariant Gromov–Witten theory of $\mathbb{P}^1$* , [arXiv: math.AG/0207233](#).
- [8] K. Ueno, K. Takasaki, *Adv. Stud. Pure Math.*, **4** (1984), 1–95.
- [9] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [10] Г. И. Олшанский, *Введение в алгебраическую комбинаторику*, <http://www.mccme.ru/ium/s04/algebra.html>.
- [11] N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 525–596; [arXiv: hep-th/0306238](#).
- [12] М. Toda, *Теория нелинейных решеток*, Мир, М., 1984.
- [13] M. Kontsevich, *Comm. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 181–240; [arXiv: hep-th/9201013](#).

- [14] A. Orlov, *Hypergeometric tau functions $\tau(\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$ as ∞ -soliton tau function in T variables*, [arXiv: nlin/0305001](#); E. Bettelheim, A. Abanov, P. Wiegmann, *J. Phys. A*, **40**:8 (2007), F193–F207; [arXiv: nlin.SI/0605006](#).
- [15] N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **531**:1–3 (1998), 323–344; [arXiv: hep-th/9609219](#); A. E. Lawrence, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **513**:1–2 (1998), 239–265; [arXiv: hep-th/9706025](#); H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **448**:3–4 (1999), 195–202; [arXiv: hep-th/9812078](#); *Nucl. Phys. B*, **558**:1–2 (1999), 371–390; [arXiv: hep-th/9902205](#).
- [16] T. Maeda, T. Nakatsu, K. Takasaki, T. Tamakoshi, *Nucl. Phys. B*, **715**:1–2 (2005), 275–303; [arXiv: hep-th/0412329](#).
- [17] А. В. Маршаков, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 163–228; [arXiv: hep-th/0601212](#).
- [18] I. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin, “The τ -function for analytic curves”, *Random Matrix Models and Their Applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 285–299; [arXiv: hep-th/0005259](#); A. Marshakov, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Comm. Math. Phys.*, **227**:1 (2002), 131–153; [arXiv: hep-th/0109048](#); I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, *Comm. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 1–44; [arXiv: hep-th/0309010](#).
- [19] A. S. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611; [arXiv: hep-th/9711108](#).
- [20] B. F. Logan, L. A. Shepp, *Adv. Math.*, **26**:2 (1977), 206–222; С. В. Керов, А. М. Вершик, *ДАН СССР*, **233**:6 (1977), 1024–1027; С. В. Керов, *Теория вероятн. и ее примен.*, **31**:3 (1986), 627–628; А. М. Вершик, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **172** (1989), 3–20.
- [21] J. D. Fay, *Theta-Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer, Berlin–New York, 1973.
- [22] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **527**:3 (1998), 690–716; [arXiv: hep-th/9802007](#).