Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. С. Ниров, А. В. Разумов, О $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебрах Ли петель, группах петель и уравнениях Тоды, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 451–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 02:11:25

© 2008 г.

Х. С. Ниров*, А. В. Разумов†

О $\mathbb{Z}$ -ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ ПЕТЕЛЬ, ГРУППАХ ПЕТЕЛЬ И УРАВНЕНИЯХ ТОДЫ

Рассмотрены уравнения Тоды, ассоциированные со скрученными группами петель. Такие уравнения определяются $\mathbb{Z}$ -градуировками соответствующих скрученных алгебр Ли петель. Обсуждается классификация уравнений Тоды, которые связаны со скрученными алгебрами Ли петель, снабженными интегрируемыми $\mathbb{Z}$ -градуировками.

Ключевые слова: уравнения Тоды, группы петель, $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры Ли петель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Тоды – это матричное дифференциальное уравнение специального вида, эквивалентное некоторому набору нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Оно ассоциировано с группой Ли и определяется $\mathbb{Z}$ -градуировкой соответствующей алгебры Ли [1]–[3]. Представляют определенный интерес обобщения тодовских систем, возникающие при включении высших градуировочных подпространств [4]–[7] и при переходе в пространства более высоких размерностей [8], [9]. Упомянем, кроме того, работы [10], [11], в которых аффинные тодовские системы рассматриваются как двухпетлевые калибровочные модели ВЗНВ с потенциальным членом.

Групповая и алгебраическая классификация уравнений Тоды, ассоциированных с конечномерными комплексными классическими группами Ли, была проведена в работах [12]–[14], где эти уравнения были записаны в удобной блок-матричной форме, порождаемой рассматриваемой $\mathbb{Z}$ -градуировкой.

Алгебро-групповые и дифференциально-геометрические свойства тодовских систем и их физический смысл существенно различаются в зависимости от того, с какой группой Ли – конечномерной или бесконечномерной – они ассоциированы. Поучительным примером являются два простейших частных случая тодовских систем – уравнения Лиувилля и $\sin$ -Гордон, глубокие различия между которыми хорошо изучены. В общем случае при работе с группами Ли петель имеют дело с

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: nirov@ms2.inr.ac.ru

†Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия

бесконечномерными многообразиями [15], что может приводить к дополнительным проблемам по сравнению с конечномерным случаем. Так, при использовании произвольной $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры Ли петель нужно иметь в виду возможные расходимости бесконечных рядов градуировочных компонент. Тщательный анализ групп петель комплексных простых групп Ли и соответствующих $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли петель был проведен в [16]. В частности, в этой работе было введено весьма полезное понятие интегрируемых $\mathbb{Z}$ -градуировок. Впоследствии в работе [17] на основе этого рассмотрения были явно описаны уравнения Тоды, ассоциированные с группами петель комплексных классических групп Ли. Здесь мы даем краткий обзор работ [16], [17], опуская доказательства и сосредотачиваясь в основном на логике исследования.

2. УРАВНЕНИЯ ТОДЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГРУППАМИ ЛИ ПЕТЕЛЬ

2.1. Общее определение уравнения Тоды. В настоящей работе $\mathcal{M}$ означает либо евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$, либо комплексную прямую $\mathbb{C}$. Мы обозначаем стандартные координаты на $\mathbb{R}^2$ через z^- и z^+ . Те же обозначения используются для стандартной комплексной координаты на $\mathbb{C}$ и комплексно сопряженной координаты: $z = z^-$ и $\bar{z} = z^+$ соответственно. Как обычно, $\partial_- = \partial/\partial z^-$ и $\partial_+ = \partial/\partial z^+$.

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется $\mathbb{Z}$ -градуированной, если задано представление $\mathfrak{G}$ в виде прямой суммы подпространств $\mathfrak{G}_k$ таких, что

$$[\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_l] \subset \mathfrak{G}_{k+l}$$

для любых $k, l \in \mathbb{Z}$. Это означает, что любой элемент ξ алгебры $\mathfrak{G}$ может быть единственным образом представлен как

$$\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k,$$

где $\xi_k \in \mathfrak{G}_k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. В случае, когда $\mathfrak{G}$ является бесконечномерной алгеброй Ли, мы полагаем, что она наделена структурой топологического векторного пространства и приведенный выше ряд сходится абсолютно.

Пусть дана группа Ли $\mathcal{G}$, и ее алгебра Ли $\mathfrak{G}$ наделена $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Предположим, что для некоторого положительного целого числа L градуировочные подпространства $\mathfrak{G}_{-k}$ и $\mathfrak{G}_{+k}$ тривиальны при всех $0 < k < L$. Согласно определению $\mathbb{Z}$ -градуировки ее градуировочное подпространство $\mathfrak{G}_0$, соответствующее нулевому градуировочному индексу, является подалгеброй $\mathfrak{G}$, и мы обозначаем через $\mathcal{G}_0$ связанную подгруппу Ли группы $\mathcal{G}$, соответствующую этой подалгебре.

Уравнение Тоды, ассоциированное с группой Ли $\mathcal{G}$, – это нелинейное матричное дифференциальное уравнение второго порядка для гладкого отображения Ξ из $\mathcal{M}$

в $\mathcal{G}_0$ следующего явного вида¹⁾:

$$\partial_+(\Xi^{-1}\partial_-\Xi) = [\mathcal{F}_-, \Xi^{-1}\mathcal{F}_+\Xi] \quad (1)$$

(см., в частности, книги [1], [3]). В этом уравнении $\mathcal{F}_-$ и $\mathcal{F}_+$ – некоторые фиксированные отображения из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{G}_{-L}$ и $\mathfrak{G}_{+L}$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\partial_+\mathcal{F}_- = 0, \quad \partial_-\mathcal{F}_+ = 0. \quad (2)$$

Если группа Ли $\mathcal{G}_0$ абелева, то говорят, что соответствующее уравнение Тоды *абелево*; в противном случае мы имеем дело с *неабелевым* уравнением Тоды. Напомним также, что в рамках дифференциально-геометрического подхода уравнение Тоды может быть получено из условия нулевой кривизны плоской связности на тривиальном главном расслоении $\mathcal{M} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$ путем наложения определенных градуировочных и калибровочных условий [3].

Авторы статьи [10] рассматривают уравнения вида (1), предполагая, что не существует L для которого подпространства $\mathfrak{G}_{-k}$ и $\mathfrak{G}_{+k}$ тривиальны при $0 < k < L$. На самом деле, такое предположение не приводит к новым уравнениям Тоды. Действительно, рассмотрим подалгебру $\mathfrak{G}'$ алгебры $\mathfrak{G}$, определенную как

$$\mathfrak{G}' = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_{kL}, \quad (3)$$

и соответствующую подгруппу $\mathcal{G}'$ группы $\mathcal{G}$. Разложение (3) определяет $\mathbb{Z}$ -градуировку $\mathfrak{G}'$ с градуировочными подпространствами $\mathfrak{G}'_k = \mathfrak{G}_{kL}$, $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что уравнение Тоды, ассоциированное с группой Ли $\mathcal{G}$ и с таким выбором положительного целого числа L , может быть рассмотрено как уравнение Тоды, ассоциированное с группой Ли $\mathcal{G}'$ и выбором $L = 1$.

Если задан изоморфизм F из $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли $\mathfrak{H}$, связывающий соответствующие градуировочные подпространства равенством $\mathfrak{H}_k = F(\mathfrak{G}_k)$, то говорят, что $\mathbb{Z}$ -градуировки $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ сопряжены посредством F . Действительно, имея $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли $\mathfrak{G}$, можно индуцировать $\mathbb{Z}$ -градуировку F -изоморфной алгебры Ли $\mathfrak{H}$, используя $\mathfrak{H}_k = F(\mathfrak{G}_k)$ в качестве градуировочных подпространств.

Ясно, что сопряженные $\mathbb{Z}$ -градуировки дают практически одни и те же уравнения Тоды. Поэтому для классификации уравнений Тоды, ассоциированных с группой Ли $\mathcal{G}$, нужно построить классификацию несопряженных $\mathbb{Z}$ -градуировок ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Для случая, когда $\mathfrak{G}$ является комплексной классической группой Ли, удобная классификация $\mathbb{Z}$ -градуировок была описана в работе [14] (см. также работы [12], [13]). В настоящей статье мы приводим обзор и обсуждение соответствующих результатов, полученных в статьях [16], [17] для случая, когда $\mathcal{G}$ является группой петель комплексной классической группы Ли.

¹⁾Для простоты мы считаем, что $\mathcal{G}$ является подгруппой группы, образованной обратимыми элементами некоторой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей. В этом случае $\mathfrak{G}$ может быть рассмотрена как подалгебра алгебры Ли, ассоциированной с $\mathcal{A}$. На самом деле, наше рассмотрение может быть обобщено на случай произвольной группы $\mathcal{G}$.

2.2. Алгебры Ли петель и группы петель. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная вещественная или комплексная алгебра Ли. *Алгебра Ли петель* алгебры $\mathfrak{g}$, обозначаемая через $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, обычно определяется как линейное пространство $C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$ -гладких отображений единичной окружности S^1 в $\mathfrak{g}$ с законом умножения алгебры Ли, задаваемым поточечно. В данной статье мы определяем $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ как линейное пространство $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$ -гладких 2π -периодических отображений вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{g}$ также с поточечным определением операции умножения в алгебре Ли. Можно показать, что эти две алгебры Ли изоморфны. Предположим, что $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ снабжена структурой пространства Фреше²⁾, так что операция умножения алгебры Ли является непрерывной (см., например, [16], [18], [19]). Мы называем такую алгебру Ли *алгеброй Ли–Фреше*.

Пусть теперь дана группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. *Группа петель* группы G , обозначаемая $\mathcal{L}(G)$, определяется либо как множество $C^\infty(S^1, G)$ -гладких отображений из S^1 в G , либо как множество $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, G)$ -гладких 2π -периодических отображений из $\mathbb{R}$ в G с законом группового умножения, определенным в обоих случаях поточечно. В настоящей работе мы принимаем второе определение. Предположим, что $\mathcal{L}(G)$ снабжена структурой многообразия Фреше, моделируемого на $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ таким образом, что она становится группой Ли (см., например, [16], [18], [19]). При этом алгебра Ли группы Ли $\mathcal{L}(G)$ естественно отождествляется с алгеброй Ли петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$.

Нетрудно обобщить данные выше определения на случай скрученных алгебр Ли петель и групп петель. Пусть A является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющим для некоторого положительного целого числа M условию $A^M = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. *Скрученная алгебра Ли петель* $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, образованная элементами ξ , которые удовлетворяют равенству $\xi(\sigma + 2\pi/M) = A(\xi(\sigma))$. Аналогично для заданного автоморфизма a группы Ли G , который удовлетворяет соотношению $a^M = \text{id}_G$, определим *скрученную группу петель* $\mathcal{L}_{a,M}(G)$ как подгруппу группы петель $\mathcal{L}(G)$, образованную элементами ρ такими, что $\rho(\sigma + 2\pi/M) = a(\rho(\sigma))$. Алгебра Ли скрученной группы петель $\mathcal{L}_{a,M}(G)$ естественно отождествляется со скрученной алгеброй Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$, где автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующий автоморфизму a группы Ли G , обозначен через A .

Понятно, что алгебра Ли петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ может рассматриваться как скрученная алгебра Ли петель $\mathcal{L}_{\text{id}_{\mathfrak{g}},M}(\mathfrak{g})$, где M является произвольным положительным целым числом. В свою очередь группа петель $\mathcal{L}(G)$ может рассматриваться как скрученная группа петель $\mathcal{L}_{\text{id}_G,M}(G)$, где M снова есть произвольное положительное целое число. В настоящей статье под алгебрами Ли петель и группами петель мы подразумеваем скрученные алгебры Ли петель и скрученные группы петель.

2.3. $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебр Ли петель и соответствующие уравнения Тоды. Сначала напомним метод, использованный в работе [14] для описания $\mathbb{Z}$ -градуировок алгебр Ли комплексных классических групп Ли. Такими группами мы называем группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$ и $Sp_n(\mathbb{C})$, алгебрами Ли которых являются $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ соответственно (см. п. 3.1).

²⁾ *Пространство Фреше* – это полное топологическое векторное пространство, топология которого индуцирована счетным семейством полунорм.

Начнем с немного более широкого класса алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{G}$ – конечномерная комплексная простая алгебра Ли, снабженная $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Определим линейный оператор Q , действующий на элемент $\xi \in \mathfrak{G}$ следующим образом:

$$Q\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\xi_k, \quad (4)$$

где ξ_k , $k \in \mathbb{Z}$, являются градуировочными компонентами ξ . Ясно, что

$$\mathfrak{G}_k = \{\xi \in \mathfrak{G} \mid Q\xi = k\xi\}.$$

Таким образом, оператор Q полностью определяет соответствующую $\mathbb{Z}$ -градуировку. Он называется градуировочным оператором, порождающим рассматриваемую $\mathbb{Z}$ -градуировку.

Можно легко показать, что Q является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Хорошо известно, что любое дифференцирование комплексной простой алгебры Ли является внутренним. Следовательно, существует единственный элемент $q \in \mathfrak{G}$ такой, что $Q\xi = [q, \xi]$. Это значит, что проблема классификации $\mathbb{Z}$ -градуировок $\mathfrak{G}$ в рассматриваемом случае сводится к проблеме классификации элементов $q \in \mathfrak{G}$, для которых оператор $\text{ad}(q)$ является полупростым и имеет только целочисленные собственные значения. Известно, что любой такой элемент принадлежит некоторой подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Поскольку все подалгебры Картана сопряжены посредством внутренних автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{G}$, то для того чтобы классифицировать $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры $\mathfrak{G}$ с точностью до сопряжений, можно считать, что элемент q принадлежит некоторой фиксированной подалгебре Картана.

Если $\mathfrak{G}$ является комплексной классической алгеброй Ли, то удобно работать с подалгеброй Картана, образованной диагональными матрицами. При этом проблема классификации $\mathbb{Z}$ -градуировок алгебры $\mathfrak{G}$ становится совсем простой, и ее результаты могут быть наглядно представлены с помощью блок-матричного разложения элементов $\mathfrak{G}$, которое оказывается очень удобным для описания тодовских систем, ассоциированных с комплексными классическими группами Ли [14].

Главный урок состоит в том, что полезно описывать $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры Ли $\mathfrak{G}$ посредством их градуировочных операторов, являющихся специальным случаем дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$. В случае бесконечномерных алгебр Ли–Фреше нужно иметь в виду, что в определение дифференцирования включено требование непрерывности. Если от этого требования отказаться, то представляется невозможным получить содержательные результаты относительно вида дифференцирований.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ является бесконечномерной группой Ли–Фреше, а $\mathfrak{G}$ – ее алгеброй Ли–Фреше. В случае общей $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры $\mathfrak{G}$ невозможно использовать соотношение (4) для определения линейного оператора в $\mathfrak{G}$, так как ряд в правой части этого соотношения может расходиться для некоторых ξ . Мы говорим, что рассматриваемая $\mathbb{Z}$ -градуировка порождается градуировочным оператором, если этот ряд сходится абсолютно для любого $\xi \in \mathfrak{G}$.

Для $\mathfrak{G} = \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ основным примером является стандартная $\mathbb{Z}$ -градуировка, порождаемая градуировочным оператором $Q = -id/ds$. Ее градуировочными подпространствами являются

$$\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_k = \{\xi \in \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g}) \mid \xi = e^{iks}x, x \in \mathfrak{g}, A(x) = e^{2\pi ik/M}x\}.$$

Предположим, что $\mathfrak{G}$ снабжена $\mathbb{Z}$ -градуировкой, которая порождается градуировочным оператором Q . Можно показать, что тогда

$$Q[\xi, \eta] = [Q\xi, \eta] + [\xi, Q\eta]$$

для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{G}$. Это означает, что если градуировочный оператор непрерывен, то он является дифференцированием $\mathfrak{G}$.

Ограничим далее рассмотрение случаем, когда $\mathfrak{G}$ является алгеброй Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ конечномерной комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ снабжена $\mathbb{Z}$ -градуировкой, порождаемой непрерывным градуировочным оператором Q , который является дифференцированием $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$. Дифференцирования $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ могут быть описаны явно [16], и это дает³⁾

$$Q\xi = -iX(\xi) + i[\eta, \xi], \quad (5)$$

где X – гладкое $(2\pi/M)$ -периодическое комплексное векторное поле на $\mathbb{R}$, а η – элемент $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$. Для того чтобы продвинуться дальше, желательно показать, что X является вещественным векторным полем. Это можно сделать, если ограничиться так называемыми интегрируемыми $\mathbb{Z}$ -градуировками [16].

Мы называем $\mathbb{Z}$ -градуировку алгебры Ли–Фреше $\mathfrak{G}$ *интегрируемой*, если отображение $\Phi: \mathbb{R} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, определенное соотношением

$$\Phi(\tau, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ik\tau} \xi_k,$$

является гладким. Здесь, как обычно, через ξ_k мы обозначаем градуировочные компоненты элемента ξ . Любая такая градуировка порождается непрерывным градуировочным оператором Q , действующим на элемент $\xi \in \mathfrak{G}$ следующим образом:

$$Q\xi = i \frac{d}{dt} \Big|_0 \Phi_\xi. \quad (6)$$

В этом соотношении t есть стандартная координата на $\mathbb{R}$, а гладкое отображение $\Phi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{G}$ определяется равенством $\Phi_\xi(\tau) = \Phi(\tau, \xi)$. Кроме того, для любого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$ отображение $\Phi_\tau: \xi \in \mathfrak{G} \mapsto \Phi(\tau, \xi)$ является автоморфизмом $\mathfrak{G}$, и все такие автоморфизмы образуют однопараметрическую подгруппу группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$.

Вернемся опять к алгебре Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ является конечномерной комплексной простой алгеброй Ли, и предположим, что она снабжена интегрируемой

³⁾Знаки в правой части уравнения (5) выбраны для удобства дальнейшего рассмотрения. Эта же причина объясняет и появление там мнимой единицы.

$\mathbb{Z}$ -градуировкой. Используя явный вид автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ [16] и равенство (6), можно убедиться, что в этом случае градуировочный оператор Q определен соотношением (5), где векторное поле X вещественно. Можно показать при этом, что векторное поле X либо является нулевым векторным полем, либо вообще не имеет нулей [16]. Если X есть нулевое векторное поле, то некоторые из градуировочных подпространств оказываются бесконечномерными. Ограничимся $\mathbb{Z}$ -градуировками с конечномерными градуировочными подпространствами. Тогда можно считать, что функция $X(s)$, где s – стандартная координата на $\mathbb{R}$, является положительной. Действительно, если $X(s)$ отрицательна, то можно сопрячь рассматриваемую $\mathbb{Z}$ -градуировку изоморфизмом, переводящим элемент $\xi \in \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ в элемент $\xi' \in \mathcal{L}_{A^{-1},M}(\mathfrak{g})$ такой, что $\xi'(\sigma) = \xi(-\sigma)$. Ясно, что это преобразование обращает знак векторного поля X .

Теперь, используя сопряжения изоморфизмами, попытаемся привести градуировочный оператор Q , задаваемый соотношением (5), к наиболее простому виду. Для этой цели рассмотрим отображение F из $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ в $C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$, определенное равенством

$$F\xi = \rho(f^{-1*}\xi)\rho^{-1},$$

где f – диффеоморфизм $\mathbb{R}$, а ρ – элемент $C^\infty(\mathbb{R}, G)$. Отображение F инъективно и может быть рассмотрено как изоморфизм из $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ в $F(\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g}))$. Можно показать, что

$$FQF^{-1}\xi = -iX'(\xi) + i[\rho\eta'\rho^{-1} + X'(\rho)\rho^{-1}, \xi],$$

где $X' = f_*X$ и $\eta' = f^{-1*}\eta$.

Выберем диффеоморфизм f так, чтобы выполнялось равенство $f_*X = d/ds$. Для этого достаточно определить его соотношением

$$f(\sigma) = \int_{(0,\sigma)} \frac{ds}{X(s)}.$$

Здесь важно, что векторное поле X не имеет нулей. Поскольку векторное поле X является $2\pi/M$ -периодичным, то

$$f\left(\sigma + \frac{2\pi}{M}\right) = f(\sigma) + \frac{2\pi}{M'},$$

где M' – положительное вещественное число такое, что

$$\frac{2\pi}{M'} = \int_{(0,2\pi/M)} \frac{ds}{X(s)}.$$

Это равенство означает, в частности, что

$$\eta'\left(\sigma + \frac{2\pi}{M'}\right) = A(\eta'(\sigma)). \quad (7)$$

Предположим теперь, что отображение ρ является решением уравнения

$$\rho^{-1} \frac{d\rho}{ds} = -\eta'. \quad (8)$$

Хорошо известно, что это уравнение всегда имеет решения, все его решения гладкие, и если ρ и ρ' суть два решения, то $\rho' = g\rho$ для некоторого $g \in G$. Из соотношения (7) следует, что если ρ является решением уравнения (8), то отображение ρ' , определенное равенством $\rho'(\sigma) = a^{-1}(\rho(\sigma + 2\pi/M'))$, тоже есть решение уравнения (8). Следовательно, для некоторого $g \in G$ имеем

$$\rho\left(\sigma + \frac{2\pi}{M'}\right) = a(g\rho(\sigma)).$$

Нетрудно убедиться в том, что для описанного выше выбора f и ρ отображение F отображает $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ изоморфно на алгебру Ли–Фреше $\mathfrak{G}$, образованную гладкими отображениями ξ из $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющими условию

$$\xi\left(\sigma + \frac{2\pi}{M'}\right) = A'(\xi(\sigma)),$$

где автоморфизм A' определяется как $A' = A \circ \text{Ad}(g)$. Градуировочный оператор FQF^{-1} , порождающий сопряженную градуировку алгебры $\mathfrak{G}$, есть просто $-id/ds$. Нетрудно показать [16], что M' является целым числом и что $A'^{M'} = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. Это значит, что $\mathfrak{G} = \mathcal{L}_{A',M'}(\mathfrak{g})$.

Итак, мы видим, что любая интегрируемая $\mathbb{Z}$ -градуировка алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ с конечномерными градуировочными подпространствами сопряжена посредством изоморфизма стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировке другой скрученной алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A',M'}(\mathfrak{g})$; при этом автоморфизмы A и A' различаются на внутренний автоморфизм $\mathfrak{g}$. Напомним, что мы рассматриваем случай, когда $\mathfrak{g}$ является конечномерной комплексной простой алгеброй Ли.

Пусть даны конечномерная комплексная простая группа Ли G , автоморфизм a группы G , удовлетворяющий соотношению $a^M = \text{id}_G$, и соответствующий автоморфизм A алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Для классификации уравнений Тоды, ассоциированных с $\mathcal{L}_{a,M}(G)$, необходимо построить классификацию (с точностью до сопряжений изоморфизмами) $\mathbb{Z}$ -градуировок $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$. Как мы показали выше, если ограничиться интегрируемыми $\mathbb{Z}$ -градуировками с конечномерными градуировочными подпространствами, то эта задача становится эквивалентной классификации самих групп петель $\mathcal{L}_{a,M}(G)$ или, что то же самое, классификации автоморфизмов конечного порядка группы G . Нетрудно убедиться [17], что последнюю классификацию достаточно провести также с точностью до сопряжений изоморфизмами. В действительности мы будем классифицировать автоморфизмы конечного порядка алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые могут быть подняты до автоморфизмов группы Ли G .

Важно понимать, что каждый автоморфизм A алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий соотношению $A^M = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, индуцирует $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{g}$ с градуировочными подпространствами⁴⁾

$$\mathfrak{g}_{[k]_M} = \{x \in \mathfrak{g} \mid A(x) = e^{2\pi i k/M} x\}, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

И наоборот, любая $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{g}$ определяет очевидным образом автоморфизм A алгебры $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий соотношению $A^M = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{g}$

⁴⁾Мы обозначаем через $[k]_M$ элемент кольца $\mathbb{Z}_M$, отвечающий целому числу k .

называется градуировкой внутреннего или внешнего типа, если ассоциированный с ней автоморфизм A алгебры $\mathfrak{g}$ является автоморфизмом внутреннего или внешнего типа соответственно.

Градуировочные подпространства стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ могут быть описаны в терминах соответствующей $\mathbb{Z}_M$ -градуировки $\mathfrak{g}$ как

$$\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_k = \{\xi \in \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g}) \mid \xi = e^{iks}x, x \in \mathfrak{g}_{[k]_M}\}.$$

Для стандартной градуировки положительное целое число L , входящее в определение уравнения Тоды, удовлетворяет неравенству $L \leq M$, и равенство $L = M$ имеет место тогда и только тогда, когда $A = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, при этом положительное целое число M является произвольным. Нетривиальными градуировочными подпространствами являются $\mathcal{L}_{\text{id}_{\mathfrak{g}},M}(\mathfrak{g})_{kM}$ при $k \in \mathbb{Z}$, и мы имеем

$$\mathcal{L}_{\text{id}_{\mathfrak{g}},M}(\mathfrak{g})_{kM} = \{\xi \in \mathcal{L}_{\text{id}_{\mathfrak{g}},M}(\mathfrak{g}) \mid \xi = e^{ikMs}x, x \in \mathfrak{g}\}.$$

Ясно также, что для стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировки подалгебра $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_0$ изоморфна $\mathfrak{g}_{[0]_M}$, а группа Ли $\mathcal{L}_{a,M}(G)_0$ изоморфна связной подгруппе Ли G_0 группы G , соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}_{[0]_M}$. Следовательно, отображение Ξ в действительности является отображением из $\mathcal{M}$ в G_0 ; обозначим его γ , чтобы это соответствовало обозначениям, введенным в более ранних публикациях (см., например, книгу [3]). Отображения $\mathcal{F}_-$ и $\mathcal{F}_+$ задаются соотношениями

$$\mathcal{F}_-(p) = e^{-iLs}c_-(p), \quad \mathcal{F}_+(p) = e^{iLs}c_+(p), \quad p \in \mathcal{M},$$

где c_- и c_+ являются отображениями из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{g}_{-[L]_M}$ и $\mathfrak{g}_{+[L]_M}$ соответственно. Таким образом, уравнение Тоды (1) может быть записано в виде

$$\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = [c_-, \gamma^{-1}c_+\gamma], \quad (9)$$

где γ является гладким отображением из $\mathcal{M}$ в G_0 , а отображения c_- и c_+ суть фиксированные гладкие отображения из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{g}_{-[L]_M}$ и $\mathfrak{g}_{+[L]_M}$ соответственно. Условия (2) означают, что

$$\partial_+c_- = 0, \quad \partial_-c_+ = 0. \quad (10)$$

Подводя промежуточный итог, можно сказать, что уравнение Тоды, ассоциированное с группой петель простой комплексной группы Ли, алгебра Ли которой наделена интегрируемой $\mathbb{Z}$ -градуировкой с конечномерными градуировочными подпространствами, эквивалентно уравнению вида (9).

Здесь имеет смысл отдельно рассмотреть простейший случай, когда A есть $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ и M является произвольным положительным целым числом. В этом случае $L = M$. Отображение γ является отображением из $\mathcal{M}$ во всю группу G , а c_+ и c_- суть отображения из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{g}$. Положив для этого частного случая $\gamma = \Gamma$, $c_+ = C_+$ и $c_- = C_-$, запишем уравнение Тоды (9) в виде

$$\partial_+(\Gamma^{-1}\partial_-\Gamma) = [C_-, \Gamma^{-1}C_+\Gamma], \quad (11)$$

а условие (10) – в виде

$$\partial_+ C_- = 0, \quad \partial_- C_+ = 0. \quad (12)$$

Заметим, что этот пример демонстрирует принципиальное различие между уравнениями Тоды, ассоциированными с конечномерными группами Ли и группами петель.

Можно рассматривать уравнения типа (9) с более общей точки зрения. Пусть G есть произвольная конечномерная группа Ли, и a является произвольным автоморфизмом G конечного порядка. Соответствующий автоморфизм A алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G порождает $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{g}$. Предположим, что для некоторого положительного целого числа $L \leq M$ градуировочные подпространства $\mathfrak{g}_{+[k]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[k]_M}$ тривиальны при $0 < k < L$. Выберем некоторые фиксированные отображения c_+ и c_- из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{g}_{+[L]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[L]_M}$ соответственно, удовлетворяющие соотношениям (10). Тогда уравнение (9) эквивалентно уравнению Тоды, ассоциированному с группой петель $\mathcal{L}_{a,M}(G)$, алгебра Ли $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ которой наделена стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировкой.

Отметим, что авторы статьи [11] тоже предлагают использовать уравнение (9) в качестве удобной формы уравнения Тоды, ассоциированного с группой петель. Они не предполагают, что градуировочные подпространства $\mathfrak{g}_{+[k]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[k]_M}$ тривиальны для $0 < k < L$. На самом деле, их допущение не приводит к новым уравнениям Тоды.

Действительно, допустим, что мы не предполагаем тривиальность градуировочных подпространств $\mathfrak{g}_{+[k]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[k]_M}$ при $0 < k < L$. Как и в п. 2.1, рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{G}' = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_{kL}$$

алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ как $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли с градуировочными подпространствами $\mathfrak{G}'_k = \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_{kL}$. Уравнение Тоды, ассоциированное с группой Ли $\mathcal{L}_{a,M}(G)$ и сделанным выше выбором положительного целого числа L , может быть рассмотрено как уравнение Тоды, ассоциированное с группой Ли $\mathcal{G}'$, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{G}'$, и с выбором $L = 1$. Покажем теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{G}'$ изоморфна некоторой алгебре Ли петель.

Пусть M' является наименьшим положительным целым числом, для которого $M'[L]_M = [0]_M$. Другими словами, M' является порядком элемента $[L]_M$, рассматриваемого как элемент аддитивной группы кольца $\mathbb{Z}_M$. Рассмотрим следующую подалгебру $\mathfrak{g}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{k=0}^{M'-1} \mathfrak{g}_{k[L]_M}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}'$ может рассматриваться как $\mathbb{Z}_{M'}$ -градуированная алгебра Ли с градуировочными подпространствами $\mathfrak{g}'_{[k]_{M'}} = \mathfrak{g}_{k[L]_M}$. Обозначим соответствующий автоморфизм $\mathfrak{g}'$ через A' .

Каждый элемент $\xi \in \mathfrak{G}'$ может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда

$$\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikLs} x_k,$$

где $x_k \in \mathfrak{g}_{k[L]_M}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что ряд

$$\xi' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iks} x_k$$

сходится абсолютно, и ξ' может рассматриваться как элемент алгебры $\mathcal{L}_{A',M'}(\mathfrak{g})$. Легко проверить, что отображение, переводящее ξ в ξ' , является изоморфизмом из $\mathfrak{G}'$ в $\mathcal{L}_{A',M'}(\mathfrak{g})$.

Итак, если мы не считаем, что градуировочные подпространства $\mathfrak{g}_{+[k]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[k]_M}$ тривиальны для $0 < k < L$, то возникающее уравнение Тоды, ассоциированное с группой петель $\mathcal{L}_{A,M}(G)$, можно трактовать как уравнение Тоды, ассоциированное с некоторой другой группой петель $\mathcal{L}_{A',M'}(G')$, для которого $L = 1$. При этом G' есть группа Ли, соответствующая подалгебре $\mathfrak{g}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В дальнейшем будет конкретизирован явный вид уравнений Тоды, вытекающих из (9), для случая комплексных классических групп Ли G . Ранее было отмечено, что это описание должно использовать классификацию с точностью до сопряжений автоморфизмов конечного порядка рассматриваемых алгебр Ли. Не прибегая к технике корневого разложения, как, например, в [20]–[22], здесь мы проводим такую классификацию в терминах удобных блок-матричных представлений.

3. $\mathbb{Z}_M$ -ГРАДУИРОВКИ КОМПЛЕКСНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

3.1. Комплексные классические группы и алгебры Ли. В данном пункте мы определяем комплексные классические группы Ли и обсуждаем их основные свойства. Дополнительную информацию об этих группах можно найти, например, в работах [17], [20], [22].

Сначала поясним используемые обозначения. Через I_n мы обозначаем единичную диагональную матрицу размера $n \times n$, а через J_n – единичную симметричную косо-диагональную $(n \times n)$ -матрицу. Для четного n определим также кососимметричную косо-диагональную матрицу размера $n \times n$:

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & J_{n/2} \\ -J_{n/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Когда это не приводит к противоречиям, мы пишем вместо I_n , J_n и K_n просто I , J и K соответственно.

Кроме того, примем следующее соглашение. Если m и B являются $(n \times n)$ -матрицами, то ${}^B m = B^{-1} {}^t m B$, где ${}^t m$ – матрица, транспонированная к m . Заметим, что ${}^J m$ получается транспонированием m по отношению к ее косой диагонали.

Комплексная общая линейная группа $GL_n(\mathbb{C})$ образована всеми невырожденными комплексными $(n \times n)$ -матрицами с матричным произведением в качестве группового закона. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$ образована всеми комплексными $(n \times n)$ -матрицами с матричным коммутатором в качестве закона умножения алгебры Ли. Группа Ли $GL_n(\mathbb{C})$ и алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ не являются простыми. Подгруппа

$SL_n(\mathbb{C})$ группы $GL_n(\mathbb{C})$, образованная матрицами с определителем, равным единице, называется комплексной специальной линейной группой. Группа Ли $SL_n(\mathbb{C})$ связна и проста. Ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ также проста.

Пусть B является комплексной невырожденной $(n \times n)$ -матрицей. Элементы g группы $GL_n(\mathbb{C})$, выделяемые условием ${}^B g = g^{-1}$, образуют подгруппу Ли группы $GL_n(\mathbb{C})$, которая обозначается через $GL_n^B(\mathbb{C})$. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n^B(\mathbb{C})$ группы $GL_n^B(\mathbb{C})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, образованная комплексными $(n \times n)$ -матрицами x , удовлетворяющими условию ${}^B x = -x$.

Для любой симметричной невырожденной $(n \times n)$ -матрицы B группа Ли $GL_n^B(\mathbb{C})$ изоморфна группе Ли $GL_n^J(\mathbb{C})$. Группа $GL_n^J(\mathbb{C})$ называется комплексной ортогональной группой и обозначается $O_n(\mathbb{C})$. Для элемента $g \in O_n(\mathbb{C})$ из равенства ${}^J g = g^{-1}$ получаем, что либо $\det g = 1$, либо $\det g = -1$. Элементы $O_n(\mathbb{C})$ с определителем, равным единице, образуют связную подгруппу Ли группы $O_n(\mathbb{C})$, называемую комплексной специальной ортогональной группой и обозначаемую $SO_n(\mathbb{C})$. Эта подгруппа является связной компонентой единицы $O_n(\mathbb{C})$. Алгебра Ли группы $SO_n(\mathbb{C})$ обозначается $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$. Ясно, что алгебра Ли группы $O_n(\mathbb{C})$ совпадает с алгеброй Ли группы $SO_n(\mathbb{C})$. Группа Ли $SO_n(\mathbb{C})$ и алгебра Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ являются простыми. Специальная ортогональная группа Ли и ее алгебра Ли обладают как внутренними, так и внешними автоморфизмами, причем последние существуют только для четных n .

Для четного n возьмем кососимметричную невырожденную $(n \times n)$ -матрицу B . Тогда группа Ли $GL_n^B(\mathbb{C})$ изоморфна группе Ли $GL_n^K(\mathbb{C})$, которая называется комплексной симплектической группой и обозначается $Sp_n(\mathbb{C})$. Группа Ли $Sp_n(\mathbb{C})$ связна и проста. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ тоже проста. Напомним, что симплектическая группа и ее алгебра Ли имеют только внутренние автоморфизмы.

3.2. $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внутреннего типа комплексных общих линейных алгебр Ли. В этом пункте мы рассматриваем $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внутреннего типа комплексных общих линейных алгебр Ли. Мы называем такие градуировки градуировками $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа I. Имеется два других типа $\mathbb{Z}_M$ -градуировок, порождаемых внешними автоморфизмами комплексных общих линейных алгебр Ли. Они будут рассмотрены в п. 3.4.

Градуировки типа I. Пусть задан внутренний автоморфизм a группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющий соотношению $a^M = \text{id}_{GL_n(\mathbb{C})}$. Обозначим соответствующий внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ через A . Этот автоморфизм удовлетворяет соотношению $A^M = \text{id}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})}$. Другими словами, A является автоморфизмом $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ конечного порядка. Так как мы интересуемся автоморфизмами $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ с точностью до сопряжений, то можно предположить, что рассматриваемый автоморфизм A задан соотношением

$$A(x) = h x h^{-1}, \quad (13)$$

где h – элемент подгруппы $D_n(\mathbb{C})$ группы $GL_n(\mathbb{C})$, образованной всеми комплексными невырожденными диагональными матрицами (см., например, [17]). Ясно, что при умножении h на произвольное ненулевое комплексное число получается элемент

подгруппы $D_n(\mathbb{C})$, который порождает тот же автоморфизм $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, что и исходный элемент.

Равенство $A^M = \text{id}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})}$ дает $h^M x h^{-M} = x$ для любого $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Следовательно, $h^M = \nu I$, где ν – ненулевое комплексное число. Умножая h на подходящее комплексное число, можно добиться того, что он будет удовлетворять соотношению $h^M = I$. Это значит, что диагональные элементы матрицы h будут иметь вид $e^{2\pi i m/M}$, где m – целое число. Мы будем считать, что $0 < m \leq M$. Используя внутренние автоморфизмы алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, синхронно переставляющие строки и столбцы матрицы h , соберем вместе совпадающие диагональные матричные элементы и придем к следующему блок-диагональному виду элемента h :

$$h = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & & \\ & \mu_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_p I_{n_p} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha/M}$, положительные целые числа m_α образуют убывающую последовательность, $M \geq m_1 > m_2 > \dots > m_p > 0$, и положительные целые числа n_α удовлетворяют равенству $\sum_{\alpha=1}^p n_\alpha = n$. Предполагается, что целое число p больше 1. Случай $p = 1$ соответствует $A = \text{id}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})}$, что приводит к уравнению (11), где Γ – отображение из $\mathcal{M}$ в $GL_n(\mathbb{C})$, а C_- и C_+ – отображения из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющие условиям (12).

Рассмотрим теперь соответствующую $\mathbb{Z}$ -градуировку. Представим общий элемент x алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ в блок-матричном виде, который подсказывается структурой h :

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $x_{\alpha\beta}$ есть $(n_\alpha \times n_\beta)$ -матрица, $\alpha, \beta = 1, \dots, p$. Легко найти, что

$$(h x h^{-1})_{\alpha\beta} = e^{2\pi i(m_\alpha - m_\beta)/M} x_{\alpha\beta}.$$

Поэтому если для фиксированных α и β только блок $x_{\alpha\beta}$ элемента x отличен от нуля, то x принадлежит градуировочному подпространству $[m_\alpha - m_\beta]_M$. Удобно ввести целые числа k_α , $\alpha = 1, \dots, p-1$, определенные как $k_\alpha = m_\alpha - m_{\alpha+1}$. По определению для каждого α целое число k_α положительно и $\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha = m_1 - m_p < M$. Ясно, что для $\alpha < \beta$ имеем $[m_\alpha - m_\beta]_M = [\sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} k_\gamma]_M$, а для $\alpha > \beta$ имеем $[m_\alpha - m_\beta]_M = -[\sum_{\gamma=\beta}^{\alpha-1} k_\gamma]_M = [M - \sum_{\gamma=\beta}^{\alpha-1} k_\gamma]_M$. Эти соотношения позволяют описать градуировочную структуру $\mathbb{Z}_M$ -градуировки, порождаемой автоморфизмом A , с помощью рис. 1. Здесь элементы кольца $\mathbb{Z}_M$ – это градуировочные индексы соответствующих блоков в блок-матричном представлении (15) общего элемента $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Заметим, в частности, что подалгебра $\mathfrak{g}_{[0]_M}$ образована всеми блок-диагональными

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} [0]_M & [k_1]_M & [k_1 + k_2]_M & \dots & [\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha]_M \\ \hline -[k_1]_M & [0]_M & [k_2]_M & \dots & [\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha]_M \\ \hline -[k_1 + k_2]_M & -[k_2]_M & [0]_M & \dots & [\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha]_M \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline -[\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha]_M & -[\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha]_M & -[\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha]_M & \dots & [0]_M \end{array} \right)$$

Рис. 1. Каноническая структура $\mathbb{Z}_M$ -градуировки.

матрицами и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{n_p}(\mathbb{C})$. Группа G_0 также образована блок-диагональными матрицами и, следовательно, изоморфна группе Ли $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{n_p}(\mathbb{C})$. Такая удобная структура алгебры $\mathfrak{g}_{[0]_M}$ и группы G_0 получена благодаря выбранному упорядочению диагональных матричных элементов h . Можно сказать, что числа μ_α , взятые как точки на единичной окружности в комплексной плоскости, упорядочены по часовой стрелке.

Ясно, что с точностью до сопряжений $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ внутреннего типа может быть задана выбором $p \leq n$ положительных целых чисел n_α , удовлетворяющих равенству $\sum_{\alpha=1}^p n_\alpha = n$, и $p-1$ положительных целых чисел k_α , удовлетворяющих неравенству $\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha < M$. Соответствующий автоморфизм $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ определяется соотношением (13), где h задается равенством (14). При этом $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha / M}$ и

$$m_\alpha = \sum_{\beta=\alpha}^{p-1} k_\beta + m_p, \quad \alpha = 1, \dots, p-1, \quad (16)$$

где m_p – произвольное положительное целое число, для которого справедливо неравенство $\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha < M$. Различные варианты выбора m_p дают один и тот же автоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

3.3. $\mathbb{Z}_M$ -градуировки комплексных ортогональных и симплектических алгебр Ли. С точностью до сопряжений все $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внутреннего и внешнего типа комплексных ортогональных и симплектических алгебр Ли порождаются автоморфизмами, которые задаются соотношением (13)⁵⁾, где h принадлежит либо группе Ли $O_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$, либо группе Ли $Sp_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$. На самом деле, $O_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C}) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$, и удобно предположить, что $h \in O_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$. Для любого элемента $x \in \mathfrak{gl}_n^B(\mathbb{C})$ имеем $h^M x h^{-M} = x$, следовательно, $h^M = \nu I$ для некоторого комплексного числа ν . Из этого равенства следует, что $({}^B h)^M = \nu I$, и

⁵⁾Строго говоря, для алгебры Ли $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ существуют внешние автоморфизмы, которые не описываются соотношением (13). Однако такие автоморфизмы не могут быть подняты до автоморфизмов группы Ли $SO_8(\mathbb{C})$ и являются для наших целей несущественными.

поэтому $({}^B h)^M h^M = \nu^2 I$. С другой стороны, используя равенство ${}^B h h = I$, можно получить, что $({}^B h)^M h^M = ({}^B h h)^M = I$. Отсюда видно, что $\nu^2 = 1$. Другими словами, $\nu = \pm 1$. В обоих случаях диагональные матричные элементы h равны по модулю единице.

Для того чтобы прийти к канонической структуре $\mathbb{Z}_M$ -градуировки, необходимо привести h к виду (14), где числа μ_α как точки на единичной окружности в комплексной плоскости упорядочены по часовой стрелке. Оказывается, что в некоторых случаях этого невозможно добиться автоморфизмами рассматриваемой алгебры Ли. В этих случаях некоторые из диагональных матричных элементов равны 1, а некоторые из них равны -1 , и оказывается невозможным собрать такие элементы вместе, оставляя h в $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$. Может показаться, что похожее препятствие для достижения требуемого упорядочения матричных элементов h возникает и тогда, когда некоторые диагональные матричные элементы равны 1, даже если там нет матричных элементов, равных -1 . Однако в таком случае можно умножить h на -1 , тем самым решая проблему. В результате мы получаем два типа $\mathbb{Z}_M$ -градуировок комплексных ортогональных и симплектических алгебр Ли.

Градуировки типа I. Начнем со случая, когда оказывается возможным провести желаемое упорядочение чисел μ_α , оставаясь внутри $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$. Как и для $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ может быть задана посредством выбора $p \leq n$ положительных целых чисел n_α , удовлетворяющих равенству $\sum_{\alpha=1}^p n_\alpha = n$, и $p-1$ положительных целых чисел k_α , удовлетворяющих неравенству $\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha < M$. При этом очевидно, что эти числа уже не являются столь же произвольными, как в общем линейном случае. Они удовлетворяют дополнительным ограничениям, вытекающим из соответствующих соотношений, задающих группу и алгебру Ли. Конкретно говоря, числа n_α удовлетворяют равенствам

$$n_{p-\alpha+1} = n_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

а для чисел k_α имеем

$$k_{p-\alpha} = k_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p-1.$$

Пусть $M - \sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha$ является четным положительным целым числом. Тогда автоморфизм алгебры $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, порождающий рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, определяется соотношением (13), где h задается равенством (14) с $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha / M}$. Целое число m_p фиксируется равенством

$$m_p = \frac{1}{2} \left(M - \sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha \right),$$

а целые числа m_α , $\alpha = 1, \dots, p-1$, задаются соотношением (16).

Пусть теперь $M - \sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha + 1$ является четным положительным целым числом. Тогда автоморфизм $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, порождающий рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, определяется соотношением (13), где h задается равенством (14) с $\mu_\alpha =$

$e^{2\pi i(m_\alpha+1/2)/M}$. Целое число m_p фиксируется теперь равенством

$$m_p = \frac{1}{2} \left(M - \sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha + 1 \right),$$

а целые числа m_α , $\alpha = 1, \dots, p-1$, снова задаются соотношением (16).

В обоих случаях структура рассматриваемой $\mathbb{Z}_M$ -градуировки описывается рис. 1. Однако теперь мы сталкиваемся с необходимостью наложить соответствующие ограничения на блоки представления (15). Это означает, в частности, что алгебра Ли $\mathfrak{gl}_{[0]M}$ образована блок-диагональными матрицами. Эта алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{n_s}(\mathbb{C})$ при $p = 2s$ (четном p) и изоморфна $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{n_{s-1}}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_{n_s}^{B_s}(\mathbb{C})$ при $p = 2s-1$ (нечетном p). При этом либо $B_s = J_{n_s}$, либо $B_s = K_{n_s}$ в зависимости от того, какая именно алгебра Ли рассматривается. Ясно, что в симплектическом случае для нечетного p целое число n_s должно быть четным. Группа Ли G_0 изоморфна либо $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{n_s}(\mathbb{C})$ при $p = 2s$, либо $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{n_{s-1}}(\mathbb{C}) \times GL_{n_s}^{B_s}(\mathbb{C})$ при $p = 2s-1$.

Градуировки типа II. Этот тип соответствует случаю, когда некоторые из диагональных матричных элементов элемента h , порождающего рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, равны 1, а некоторые из них равны -1 . Заметим, что такое возможно, только если числа M и p четны.

Переставляя подходящим образом строки и столбцы матриц, представляющих элементы рассматриваемой алгебры Ли, переместим все диагональные матричные элементы h , равные 1, в начало диагонали. Это преобразование может быть осуществлено таким образом, что рассматриваемая алгебра Ли изоморфно отобразится на алгебру Ли $\mathfrak{gl}_n^B(\mathbb{C})$ с

$$B = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 \\ 0 & J_{n-n_1} \end{pmatrix}$$

в ортогональном случае и с

$$B = \begin{pmatrix} K_{n_1} & 0 \\ 0 & K_{n-n_1} \end{pmatrix}$$

в симплектическом случае. При этом n_1 есть число диагональных матричных элементов h , равных 1. Затем автоморфизмами алгебры $\mathfrak{gl}_n^B(\mathbb{C})$ упорядочим остающиеся диагональные матричные элементы h на единичной окружности в комплексной плоскости по часовой стрелке. В результате этих преобразований мы приходим к $\mathbb{Z}_M$ -градуировкам, которые определяются набором $p \leq n$ положительных целых чисел n_α таких, что $\sum_{\alpha=1}^p n_\alpha = n$ и, кроме того,

$$n_{p-\alpha+2} = n_\alpha, \quad \alpha = 2, \dots, p,$$

и набором $p-1$ положительных целых чисел k_α таких, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha + k_1 = M, \quad k_{p-\alpha+1} = k_\alpha, \quad \alpha = 2, \dots, p-1.$$

Автоморфизм, порождающий рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, определяется соотношением (13), где h задается равенством (14) с $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha / M}$. При этом $m_p = k_1$, а целые числа m_α , $\alpha = 1, \dots, p-1$, задаются соотношением (16).

Структура рассматриваемой $\mathbb{Z}_M$ -градуировки изображена на рис. 1. При $p = 2s - 2$ алгебра Ли $\mathfrak{g}_{[0]_M}$ изоморфна $\mathfrak{gl}_{n_1}^{B_1}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_{n_2}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{n_{s-1}}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_{n_s}^{B_s}(\mathbb{C})$. Здесь либо $B_1 = J_{n_1}$, $B_s = J_{n_s}$, либо $B_1 = K_{n_1}$, $B_s = K_{n_s}$ в зависимости от того, какой тип алгебр Ли рассматривается. Ясно, что в симплектическом случае целые числа n_1 и n_s должны быть четными. Группа Ли G_0 изоморфна $GL_{n_1}^{B_1}(\mathbb{C}) \times GL_{n_2}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{n_{s-1}}(\mathbb{C}) \times GL_{n_s}^{B_s}(\mathbb{C})$.

3.4. $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внешнего типа комплексных общих линейных алгебр Ли. Рассмотрение таких градуировок основано на том, что произвольный внешний автоморфизм A алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ сопряжен с автоморфизмом, который определен соотношением

$$A(x) = -h \, {}^J x \, h^{-1},$$

где h является элементом $GL_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$ таким, что ${}^J h h = I$. При этом без потери общности можно предположить, что $\det h = 1$. Как и в ортогональном и симплектическом случаях, $h^M = \nu I$, где $\nu = \pm 1$. Кроме того, можно убедиться в том, что $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внешнего типа алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ существуют только для четных M . Обозначим $M/2$ через N .

В простейшем случае $h = I$, и существуют только два нетривиальных градуировочных подпространства $\mathfrak{g}_{[0]_{2N}}$ и $\mathfrak{g}_{[N]_{2N}}$, элементы которых выделяются условиями ${}^J x = -x$ и ${}^J x = x$ соответственно. В этом случае группа Ли G_0 совпадает с $SO_n(\mathbb{C})$, и мы приходим к уравнению Тоды (11), где Γ есть отображение из $\mathcal{M}$ в $SO_n(\mathbb{C})$, а C_+ и C_- являются отображениями из $\mathcal{M}$ в пространство комплексных $(n \times n)$ -матриц x , удовлетворяющих равенству ${}^J x = x$.

Для анализа общего случая используют следующие простые соображения. Пусть B есть произвольная невырожденная матрица. Для любого $h \in GL_n(\mathbb{C})$ отображение $A: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, определенное равенством

$$A(x) = -h \, {}^B x \, h^{-1}, \quad (17)$$

является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Посредством внутреннего автоморфизма $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, порожденного элементом $g \in GL_n(\mathbb{C})$, автоморфизм A сопряжен с автоморфизмом того же вида, но с заменой $h \rightarrow ghg^{-1}$, $B \rightarrow {}^t(g^{-1})Bg^{-1}$. Заметим также, что при любом $g \in GL_n(\mathbb{C})$ замена $h \rightarrow hg$, $B \rightarrow Bg$ не меняет автоморфизм A .

Так как $h^{2N} = \nu I$, где $\nu = \pm 1$, диагональные матричные элементы h по модулю равны единице. Если $\nu = 1$, удобно представить каждый из них либо как $e^{2\pi i m/(2N)}$, либо как $-e^{2\pi i m/(2N)}$, где m – целое число, удовлетворяющее условию $0 < m \leq N$. При $\nu = -1$ мы используем либо представление $e^{2\pi i(m+1/2)/(2N)}$, либо представление $-e^{2\pi i(m+1/2)/(2N)}$, где снова m есть целое число, удовлетворяющее условию $0 < m \leq N$. Умножая матрицы h и B справа на подходящую матрицу, мы исключаем второй вариант представления. Затем, используя внутренние автоморфизмы алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, мы упорядочиваем диагональные элементы матрицы h удобным

для наших целей образом. Имеется два различных случая, соответствующих двум дополнительным типам $\mathbb{Z}_M$ -градуировок $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Градуировки типа II. Предположим, что ни один из диагональных матричных элементов h не равен 1. Тогда удастся привести h к виду (14), где $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha / (2N)}$ при $\nu = 1$ или $\mu_\alpha = e^{2\pi i (m_\alpha + 1/2) / (2N)}$ при $\nu = -1$. В обоих случаях целые числа m_α удовлетворяют неравенствам $0 < m_1 < \dots < m_p \leq N$ и соотношениям

$$m_{p-\alpha+1} = N - m_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Автоморфизм A , порождающий рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, дается теперь уравнением (17), где $B = K_n$. Вводя целые числа $k_\alpha = m_\alpha - m_{\alpha+1}$, легко заметить, что рассматриваемая $\mathbb{Z}_{2N}$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ определяется теми же данными, что и $\mathbb{Z}_N$ -градуировка типа I соответствующей ортогональной или симплектической алгебры Ли.

Градуировки типа III. Пусть некоторые диагональные матричные элементы h равны 1. Тогда $\nu = 1$, и h приводится к виду (14), где $\mu_\alpha = e^{2\pi i m_\alpha / (2N)}$ с m_α , удовлетворяющими неравенствам $0 < m_1 < \dots < m_p \leq N$ и соотношениям

$$m_{p-\alpha+2} = N - m_\alpha, \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

Автоморфизм A , порождающий рассматриваемую $\mathbb{Z}_M$ -градуировку, задается теперь соотношением (17), где⁶⁾

$$B = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 \\ 0 & K_{n-n_1} \end{pmatrix}.$$

При этом n_1 есть количество диагональных матричных элементов h , равных 1. Вводя целые числа $k_\alpha = m_\alpha - m_{\alpha+1}$, можно заметить, что рассматриваемая $\mathbb{Z}_{2N}$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ определяется теми же данными, что и $\mathbb{Z}_N$ -градуировка типа II соответствующей ортогональной или симплектической алгебры Ли.

Наконец, можно показать [17], что $\mathbb{Z}_{2N}$ -градуировки алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типов II и III могут быть описаны схемой, изображенной на рис. 2. В этой схеме пары элементов кольца $\mathbb{Z}_{2N}$ суть допустимые градуировочные индексы соответствующих блоков в блок-матричном представлении (15) общего элемента $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Две возможности различаются дополнительными ограничениями, налагаемыми на блоки. А именно, если градуировочный индекс k лежит в пределах $0 \leq k < N$, то $x_{\alpha\beta} = -(Bx)_{\alpha\beta}$ для $\alpha \leq \beta$ и $x_{\alpha\beta} = (Bx)_{\alpha\beta}$ для $\alpha > \beta$, тогда как если k находится в пределах $N \leq k < 2N$, то $x_{\alpha\beta} = (Bx)_{\alpha\beta}$ при $\alpha \leq \beta$ и $x_{\alpha\beta} = -(Bx)_{\alpha\beta}$ при $\alpha > \beta$.

4. ЯВНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ТОДЫ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРУППАМИ ПЕТЕЛЬ КОМПЛЕКСНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ

В данном разделе мы описываем явный вид уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель комплексных классических групп Ли. На самом деле, мы описываем явный вид уравнения Тоды (9), которое эквивалентно исходному уравнению

⁶⁾Заметим, что в этом случае $n - n_1$ с необходимостью является четным числом.

$[0]_{2N}$	$[k_1]_{2N}$	$[k_1 + k_2]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha]_{2N}$
$[N]_{2N}$	$[k_1 + N]_{2N}$	$[k_1 + k_2 + N]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha + N]_{2N}$
$-[k_1]_{2N}$	$[0]_{2N}$	$[k_2]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha]_{2N}$
$-[k_1 + N]_{2N}$	$[N]_{2N}$	$[k_2 + N]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha + N]_{2N}$
$-[k_1 + k_2]_{2N}$	$-[k_2]_{2N}$	$[0]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha]_{2N}$
$-[k_1 + k_2 + N]_{2N}$	$-[k_2 + N]_{2N}$	$[N]_{2N}$	$\dots$	$[\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha + N]_{2N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$-\left[\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha\right]_{2N}$	$-\left[\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha\right]_{2N}$	$-\left[\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha\right]_{2N}$	$\dots$	$[0]_{2N}$
$-\left[\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha + N\right]_{2N}$	$-\left[\sum_{\alpha=2}^{p-1} k_\alpha + N\right]_{2N}$	$-\left[\sum_{\alpha=3}^{p-1} k_\alpha + N\right]_{2N}$	$\dots$	$[N]_{2N}$

Рис. 2. Структура внешней $\mathbb{Z}_{2N}$ -градуировки $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Тоды (1) для случая интегрируемых $\mathbb{Z}$ -градуировок с конечномерными градуировочными подпространствами.

Пусть G есть комплексная классическая группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Выберем какую-нибудь $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{g}$. Как было показано выше, с точностью до сопряжений любая $\mathbb{Z}_M$ -градуировка комплексной классической алгебры Ли имеет структуру, изображенную либо на рис. 1, либо на рис. 2. Во всех случаях алгебра Ли $\mathfrak{g}_{[0]_M}$ и группа Ли G_0 образованы блок-диагональными матрицами, и можно параметризовать отображение γ как

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & \\ & \Gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_p \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где для каждого $\alpha = 1, \dots, p$ отображение Γ_α является отображением из $\mathcal{M}$ в группу Ли $GL_{n_\alpha}(\mathbb{C})$. Отображения Γ_α , вообще говоря, не являются независимыми. Они удовлетворяют определенным ограничениям, налагаемым структурой рассматриваемой группы Ли.

Пусть L есть положительное целое число такое, что градуировочные подпространства $\mathfrak{g}_{+[k]_M}$ и $\mathfrak{g}_{-[k]_M}$ тривиальны при $0 < k < L$. Ясно, что если $x \in \mathfrak{g}_{+[L]_M}$, то только блоки $x_{\alpha, \alpha+1}$, $\alpha = 1, \dots, p-1$, и x_{p1} в блок-матричном представлении (15) могут быть отличны от нуля. Следовательно, отображение c_+ имеет структуру, изображенную на рис. 3, где для каждого $\alpha = 1, \dots, p-1$ отображение $C_{+\alpha}$ есть отображение из $\mathcal{M}$ в пространство комплексных $(n_\alpha \times n_{\alpha+1})$ -матриц, а C_{+0} есть отображение из $\mathcal{M}$ в пространство комплексных $(n_p \times n_1)$ -матриц. При этом считается,

$$\begin{pmatrix} 0 & C_{+1} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & C_{+(p-1)} \\ C_{+0} & & & 0 & \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Каноническая структура отображения c_+ .

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & C_{-0} \\ C_{-1} & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & C_{-(p-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Каноническая структура отображения c_- .

что если какие-то блоки среди $x_{\alpha, \alpha+1}$, $\alpha = 1, \dots, p-1$, и x_{p1} в общем блок-матричном представлении (15) имеют градуировочный индекс, отличный от $+ [L]_M$, то соответствующие блоки в блок-матричном представлении c_+ есть нулевые матрицы.

На основании аналогичных рассуждений можно понять, что отображение c_- имеет структуру, изображенную на рис. 4, где для каждого $\alpha = 1, \dots, p-1$ отображение $C_{-\alpha}$ есть отображение из $\mathcal{M}$ в пространство комплексных $(n_{\alpha+1} \times n_\alpha)$ -матриц, а C_{-0} – отображение из $\mathcal{M}$ в пространство комплексных $(n_1 \times n_p)$ -матриц. При этом предполагается, что если какие-нибудь из блоков $x_{\alpha+1, \alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p-1$, и x_{1p} в общем блок-матричном представлении (15) имеют градуировочный индекс, отличный от $- [L]_M$, то соответствующие блоки в блок-матричном представлении c_- являются нулевыми матрицами.

Условия (10) означают, что

$$\partial_+ C_{-\alpha} = 0, \quad \partial_- C_{+\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, \dots, p-1. \quad (19)$$

Кроме того, матрицы $C_{+\alpha}$ и $C_{-\alpha}$ должны удовлетворять некоторым ограничениям, следующим из структуры алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предположим теперь, что G есть группа Ли $GL_n(\mathbb{C})$, и мы используем $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа I. Нетрудно показать, что тогда уравнение Тоды (9) для отображения γ эквивалентно следующей системе уравнений для отображений Γ_α :

$$\begin{aligned} \partial_+(\Gamma_1^{-1} \partial_- \Gamma_1) &= -\Gamma_1^{-1} C_{+1} \Gamma_2 C_{-1} + C_{-0} \Gamma_p^{-1} C_{+0} \Gamma_1, \\ \partial_+(\Gamma_2^{-1} \partial_- \Gamma_2) &= -\Gamma_2^{-1} C_{+2} \Gamma_3 C_{-2} + C_{-1} \Gamma_1^{-1} C_{+1} \Gamma_2, \\ &\vdots \\ \partial_+(\Gamma_{p-1}^{-1} \partial_- \Gamma_{p-1}) &= -\Gamma_{p-1}^{-1} C_{+(p-1)} \Gamma_p C_{-(p-1)} + C_{-(p-2)} \Gamma_{p-2}^{-1} C_{+(p-2)} \Gamma_{p-1}, \\ \partial_+(\Gamma_p^{-1} \partial_- \Gamma_p) &= -\Gamma_p^{-1} C_{+0} \Gamma_1 C_{-0} + C_{-(p-1)} \Gamma_{p-1}^{-1} C_{+(p-1)} \Gamma_p. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения Тоды, ассоциированные с группой петель группы Ли $SL_n(\mathbb{C})$, в случае $\mathbb{Z}_M$ -градуировок внутреннего типа имеют в действительности тот же вид (20), что и уравнения Тоды, ассоциированные с группой петель группы $GL_n(\mathbb{C})$. При этом отображения Γ_α должны удовлетворять условию $\prod_{\alpha=1}^p \det \Gamma_\alpha = 1$. Если имеется решение уравнения Тоды, ассоциированного с группой петель группы $GL_n(\mathbb{C})$, то можно легко получить решение уравнения Тоды, ассоциированного с соответствующей

группой петель группы $SL_n(\mathbb{C})$. Каждое решение уравнения Тоды, ассоциированного с группой петель группы $SL_n(\mathbb{C})$, может быть получено из решения уравнения Тоды, ассоциированного с соответствующей группой петель группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$.

Пусть теперь G есть либо группа Ли $SO_n(\mathbb{C})$, либо группа Ли $Sp_n(\mathbb{C})$, и мы используем $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ типа I. Тогда мы получаем два различных случая. Для $p = 2s$ уравнение Тоды (9) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\partial_+(\Gamma_1^{-1}\partial_-\Gamma_1) &= -\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2C_{-1} + C_{-0}{}^J\Gamma_1C_{+0}\Gamma_1, \\ \partial_+(\Gamma_2^{-1}\partial_-\Gamma_2) &= -\Gamma_2^{-1}C_{+2}\Gamma_3C_{-2} + C_{-1}\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2, \\ &\vdots \\ \partial_+(\Gamma_{s-1}^{-1}\partial_-\Gamma_{s-1}) &= -\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_sC_{-(s-1)} + C_{-(s-2)}\Gamma_{s-2}^{-1}C_{+(s-2)}\Gamma_{s-1}, \\ \partial_+(\Gamma_s^{-1}\partial_-\Gamma_s) &= -\Gamma_s^{-1}C_{+s}{}^J(\Gamma_s^{-1})C_{-s} + C_{-(s-1)}\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_s,\end{aligned}\tag{21}$$

где $C_{+0} = -{}^JC_{+0}$, $C_{-0} = -{}^JC_{-0}$ и $C_{+s} = -{}^JC_{+s}$, $C_{-s} = -{}^JC_{-s}$ для ортогонального случая, тогда как $C_{+0} = {}^JC_{+0}$, $C_{-0} = {}^JC_{-0}$ и $C_{+s} = {}^JC_{+s}$, $C_{-s} = {}^JC_{-s}$ для симплектического случая. Необходимо отметить, что $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа II при $p = 2s$ также дает уравнения (21). Однако в этом случае дополнительно к условиям ${}^JC_{+0} = -C_{+0}$ и ${}^JC_{-0} = -C_{-0}$ имеются условия ${}^JC_{+s} = C_{+s}$ и ${}^JC_{-s} = C_{-s}$.

Возвращаясь к $\mathbb{Z}_M$ -градуировкам $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ типа I, можно видеть, что при $p = 2s - 1$ уравнение Тоды (9) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\partial_+(\Gamma_1^{-1}\partial_-\Gamma_1) &= -\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2C_{-1} + C_{-0}{}^J\Gamma_1C_{+0}\Gamma_1, \\ \partial_+(\Gamma_2^{-1}\partial_-\Gamma_2) &= -\Gamma_2^{-1}C_{+2}\Gamma_3C_{-2} + C_{-1}\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2, \\ &\vdots \\ \partial_+(\Gamma_{s-1}^{-1}\partial_-\Gamma_{s-1}) &= -\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_sC_{-(s-1)} + C_{-(s-2)}\Gamma_{s-2}^{-1}C_{+(s-2)}\Gamma_{s-1}, \\ \partial_+(\Gamma_s^{-1}\partial_-\Gamma_s) &= -B_s(C_{-(s-1)}\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_s) + C_{-(s-1)}\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_s.\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь $B_s\Gamma_s = \Gamma_s^{-1}$ с $B_s = J$ в ортогональном случае и $B_s = K$ в симплектическом случае. Находим также, что в ортогональном случае $C_{+0} = -{}^JC_{+0}$ и $C_{-0} = -{}^JC_{-0}$, тогда как в симплектическом случае получаем $C_{+0} = {}^JC_{+0}$ и $C_{-0} = {}^JC_{-0}$. Используя $\mathbb{Z}_M$ -градуировку $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа II при $p = 2s - 1$, также приходим к уравнениям (22) с $B_s = K$ и условиями $C_{+0} = -{}^JC_{+0}$, $C_{-0} = -{}^JC_{-0}$. При этом $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа III для $p = 2s - 1$ дает уравнения, эквивалентные уравнениям (22) с $B_s = J$ и $C_{+0} = {}^JC_{+0}$, $C_{-0} = {}^JC_{-0}$.

Наконец, если использовать $\mathbb{Z}_M$ -градуировки $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ типа II, то видно, что уравнение Тоды (9) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\partial_+(\Gamma_1^{-1}\partial_-\Gamma_1) &= -\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2C_{-1} + B_1(\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2C_{-1}), \\ \partial_+(\Gamma_2^{-1}\partial_-\Gamma_2) &= -\Gamma_2^{-1}C_{+2}\Gamma_3C_{-2} + C_{-1}\Gamma_1^{-1}C_{+1}\Gamma_2, \\ &\vdots \\ \partial_+(\Gamma_{s-1}^{-1}\partial_-\Gamma_{s-1}) &= -\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_sC_{-(s-1)} + C_{-(s-2)}\Gamma_{s-2}^{-1}C_{+(s-2)}\Gamma_{s-1}, \\ \partial_+(\Gamma_s^{-1}\partial_-\Gamma_s) &= -B_s(C_{-(s-1)}\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_s) + C_{-(s-1)}\Gamma_{s-1}^{-1}C_{+(s-1)}\Gamma_s.\end{aligned}\tag{23}$$

Здесь $B_1\Gamma_1 = \Gamma_1^{-1}$, $B_s\Gamma_s = \Gamma_s^{-1}$ с $B_1 = J$, $B_s = J$ в ортогональном случае и $B_1 = K$, $B_s = K$ симплектическом случае. При этом $\mathbb{Z}_M$ -градуировка $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ типа III при $p = 2s - 2$ дает уравнения (23) с $B_1 = J$, $B_s = K$.

Следует отметить, что для каждого типа тодовских систем, рассмотренных выше, если для некоторого α оказывается, что $C_{+\alpha} = 0$ или $C_{-\alpha} = 0$, то рассматриваемая система уравнений становится тодовской системой, ассоциированной с соответствующей конечномерной группой Ли (см., например, работы [13], [14]). Следовательно, для того чтобы уравнения действительно были ассоциированы с некоторой группой петель, необходимо предположить, что все отображения $C_{+\alpha}$ и $C_{-\alpha}$ нетривиальны. Это возможно, только если $k_\alpha = L$ для каждого $\alpha = 1, \dots, p-1$ и $M = pL$. Без всякой потери общности можно считать, что $L = 1$.

Уравнения (21)–(23) могут быть получены из уравнений (20) при помощи некоторой процедуры складывания, описанной в приложении. Эта процедура также помогает понять, что возможны только описанные здесь классы тодовских уравнений, ассоциированных с рассматриваемыми группами петель.

5. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ: НЕАБЕЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ $\sinh$ -ГОРДОН И $\sin$ -ГОРДОН

Определяя отображения Γ_α , $C_{+\alpha}$ и $C_{-\alpha}$ для всех целочисленных значений индекса α с условиями периодичности $\Gamma_{\alpha+p} = \Gamma_\alpha$, $C_{-(\alpha+p)} = C_{-\alpha}$ и $C_{+(\alpha+p)} = C_{+\alpha}$, можно рассматривать систему (20) как бесконечную периодическую систему

$$\partial_+(\Gamma_\alpha^{-1}\partial_-\Gamma_\alpha) = -\Gamma_\alpha^{-1}C_{+\alpha}\Gamma_{\alpha+1}C_{-\alpha} + C_{-(\alpha-1)}\Gamma_{\alpha-1}^{-1}C_{+(\alpha-1)}\Gamma_\alpha.$$

В частности, при $n = rp$, $n_\alpha = r$, $C_{-\alpha} = C_{+\alpha} = I_r$ приходим к уравнениям [23], [24]

$$\partial_+(\Gamma_\alpha^{-1}\partial_-\Gamma_\alpha) = -\Gamma_\alpha^{-1}\Gamma_{\alpha+1} + \Gamma_{\alpha-1}^{-1}\Gamma_\alpha.$$

Полагая $p = 2$, находим простейший набор уравнений Тоды:

$$\partial_+(\Gamma_1^{-1}\partial_-\Gamma_1) = -\Gamma_1^{-1}\Gamma_2 + \Gamma_2^{-1}\Gamma_1, \quad \partial_+(\Gamma_2^{-1}\partial_-\Gamma_2) = -\Gamma_2^{-1}\Gamma_1 + \Gamma_1^{-1}\Gamma_2,$$

где Γ_1 и Γ_2 есть $(r \times r)$ -матрицы. Эти уравнения инвариантны по отношению к преобразованиям $\Gamma_1 \rightarrow {}^t(\Gamma_2^{-1})$, $\Gamma_2 \rightarrow {}^t(\Gamma_1^{-1})$, где верхний индекс t означает обычное транспонирование. Эта инвариантность говорит о возможности редукции к случаю $\Gamma_1 = {}^t(\Gamma_2^{-1}) = \Gamma$. При этом рассматриваемые уравнения сводятся к уравнению

$$\partial_+(\Gamma^{-1}\partial_-\Gamma) = -({}^t\Gamma\Gamma)^{-1} + {}^t\Gamma\Gamma. \quad (24)$$

С точки зрения возможных физических приложений интересно рассмотреть вещественные формы уравнений Тоды (9). Предположим, что заданы инволютивный антиголоморфный автоморфизм σ группы G и его компаньон для алгебры Ли, а также инволютивный антилинейный автоморфизм Σ алгебры $\mathfrak{g}$, согласованный с $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Последнее означает, что если $x \in \mathfrak{g}_{[k]_M}$, то $\Sigma(x) \in \mathfrak{g}_{[k]_M}$. Предположим также, что $\Sigma(c_+) = c_+$ и $\Sigma(c_-) = c_-$. В этом случае если γ является

решением уравнения Тоды (9), то $\sigma \circ \gamma$ тоже является решением этого уравнения⁷⁾, и непротиворечивая редукция к случаю $\sigma \circ \gamma = \gamma$ возможна.

Можно построить две неэквивалентные вещественные формы уравнения Тоды (24). Первая из них основана на некомпактной вещественной форме, задаваемой вещественными матрицами. Тогда $\sigma(\Gamma) = \Gamma^* = \Gamma$. Для $r = 1$, полагая $\Gamma = e^F$, получаем уравнение $\sinh$ -Гордон

$$\partial_+ \partial_- F = 2 \sinh F.$$

Другая форма уравнения Тоды основана на компактной вещественной форме, задаваемой унитарными матрицами. Тогда $\sigma(\Gamma) = (\Gamma^\dagger)^{-1} = \Gamma$, и уравнение Тоды (24) удобно записать в виде

$$\partial_+ (\Gamma^{-1} \partial_- \Gamma) = -({}^t \Gamma \Gamma)^\dagger + {}^t \Gamma \Gamma.$$

При $r = 1$, полагая $\Gamma = e^{iF}$, приходим к уравнению $\sin$ -Гордон

$$\partial_+ \partial_- F = 2 \sin F.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, существуют четыре неэквивалентных класса уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель комплексных классических групп Ли, если их алгебры Ли наделены интегрируемыми $\mathbb{Z}$ -градуировками с конечномерными градуировочными подпространствами. Первый класс представлен уравнениями (20). Это основной класс петлевых уравнений Тоды, в котором нет никаких ограничений на отображения Γ_α и $C_{\pm\alpha}$.

Напротив, три других класса петлевых уравнений Тоды, представленных здесь уравнениями (21)–(23), получаются из уравнений (20) при наложении некоторых ограничений на отображения Γ_α и $C_{\pm\alpha}$. Эти ограничения следуют из соотношений, определяющих рассматриваемую группу или алгебру, а также из типа градуировки. Интересно, например, что все эти три класса петлевых уравнений Тоды возникают также в общем линейном случае для градуировок внешнего типа, хотя при этом изначально нет никаких групповых и алгебраических условий.

Результаты классификации можно пояснить некоторой графической процедурой складывания (см. приложение).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Графическое представление петлевых уравнений Тоды

Здесь мы описываем графическое представление уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель. Это представление может оказаться полезным для простого объяснения того факта, что на самом деле возникают только четыре неэквивалентных класса петлевых уравнений Тоды.

⁷⁾При этом мы полагаем, что $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$.

Мы используем следующие правила отождествления, проиллюстрированные рис. 5. Каждое отображение Γ_α , входящее в соотношение (18), изображается маленьким кружком на окружности, а отображение $C_{\pm\alpha}$ – дугой между двумя такими кружками, уже отождествленными с Γ_α и $\Gamma_{\alpha+1}$. Нумерация по индексу α идет вдоль окружности в направлении против часовой стрелки. Вся тодовская система соответствует окружности с p прикрепленными маленькими кружками.

Рис. 5. Правила отождествления и общий линейный случай для $\mathbb{Z}_M$ -градуировок внутреннего типа: уравнения Тоды (20).

Для групп петель общих линейных групп Ли, когда используются $\mathbb{Z}_M$ -градуировки внутреннего типа, нет никаких дополнительных ограничений на отображения γ , c_+ и c_- , кроме их канонических форм, заданных соотношением (18) и рис. 3, 4. В этом случае мы останавливаемся на рис. 5, изображающем уравнения Тоды (20).

Существенно другая ситуация возникает для других классических групп Ли при использовании внутренних и внешних $\mathbb{Z}_M$ -градуировок и для общей линейной группы при использовании $\mathbb{Z}_M$ -градуировок внешнего типа.

Учет влияния условий, определяющих группу и алгебру Ли, на отображения γ и c_+ , c_- , соответственно, приводит к необходимости сложить размеченную окружность вдоль ее диаметра, помеченного пунктирной линией на рис. 6–8. Тодовская система согласована со своим графическим представлением, если каждый объект на окружности, отождествленный с Γ_α и $C_{\pm\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p$, находит своего компаньона на другой стороне окружности при таком складывании.

Ясно, что возможны только три принципиально различных ситуации: две для четного p (рис. 6, 7), и одна для нечетного p , (рис. 8а). Дополнительно обведенными кружками изображаются те, которые складываются сами с собой. Рис. 8б описывает другой вариант складывания. Он соответствует уравнениям Тоды, которые могут быть получены из уравнений (22) подстановками $\Gamma_\alpha \rightarrow B_s(\Gamma_{s-\alpha+1}^{-1})$, $C_{\pm\alpha} \rightarrow {}^J C_{\pm(s-\alpha)}$, дополненными заменой $B_s \rightarrow B_1$.

Наконец, интересно провести сравнение со случаем тодовских систем, ассоциированных с конечномерными группами Ли [13], [14]. Рассматривая аналогичное графическое представление на прямой и учитывая, при этом нет никакой периодич-

Рис. 6. Число $p = 2s$.
Уравнения Тоды (21), где
 ${}^J C_{\pm 0} = \varepsilon C_{\pm 0}$ и ${}^J C_{\pm s} = \varepsilon C_{\pm s}$.

Рис. 7. Число $p = 2s - 2$.
Уравнения Тоды (23), где
 ${}^{B_1} \Gamma_1 = \Gamma_1^{-1}$ и ${}^{B_s} \Gamma_s = \Gamma_s^{-1}$.

Рис. 8. Число $p = 2s - 1$. Уравнения Тоды (22), где ${}^{B_s} \Gamma_s = \Gamma_s^{-1}$ и
 ${}^J C_{\pm 0} = \varepsilon C_{\pm 0}$, и эквивалентные уравнения Тоды с ${}^{B_1} \Gamma_1 = \Gamma_1^{-1}$ и ${}^J C_{\pm s} = \varepsilon C_{\pm s}$.
Здесь ε есть либо $+$, либо $-$.

ности по индексам, можно видеть, что в дополнение к общему линейному случаю возникают только два различных класса тодовских систем (один для четного p и один для нечетного p), ассоциированных с ортогональной и симплектической группами Ли.

Благодарности. Настоящая работа была частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00234).

Список литературы

- [1] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, Наука, М., 1985.
- [2] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, *Comm. Anal. Geom.*, **2** (1994), 461–511; [arXiv: hep-th/9311167](#).
- [3] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, *Lie Algebras, Geometry, and Toda-type Systems*, Cambridge Lecture Notes in Phys., **8**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] A. N. Leznov, “The internal symmetry group and methods of field theory for integrating exactly soluble dynamic systems”, *Group Theoretical Methods in Physics*, Proc. Zvenigorod seminar (Zvenigorod, 1982), Harwood, New York, 1985, 443–457.
- [5] J.-L. Gervais, M. V. Saveliev, *Nucl. Phys. B*, **453**:1–2 (1995), 449–476; [arXiv: hep-th/9505047](#).
- [6] L. A. Ferreira, J.-L. Gervais, J. Sánchez Guillén, M. V. Saveliev, *Nucl. Phys. B*, **470**:1–2 (1996), 236–288; [arXiv: hep-th/9512105](#).
- [7] A. G. Bueno, L. A. Ferreira, A. V. Razumov, *Nucl. Phys. B*, **626**:3 (2002), 463–499; [arXiv: hep-th/0105078](#).
- [8] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, “On some class of multidimensional nonlinear integrable systems”, *Proc. II Int. A. D. Sakharov Conf. on Physics* (Moscow, 1996), eds. I. M. Dremin, A. M. Semikhatov, World Scientific, Singapore, 1997, 547–551; [arXiv: hep-th/9607017](#).
- [9] А. В. Разумов, М. В. Савельев, *ТМФ*, **112**:2 (1997), 254–282; [arXiv: hep-th/9609031](#).
- [10] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. Sánchez Guillén, *Nucl. Phys. B*, **449**:3 (1995), 631–679; [arXiv: hep-th/9412127](#).
- [11] C. R. Fernández-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood, J. L. Miramontes, *Nucl. Phys. B*, **484**:3 (1997), 609–630; [arXiv: hep-th/9606032](#).
- [12] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, *Nucl. Phys. B*, **494**:3 (1997), 657–686; [arXiv: hep-th/9612081](#).
- [13] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, A. B. Zuevsky, “Non-abelian Toda equations associated with classical Lie groups”, *Symmetries and Integrable Systems*, ed. A. N. Sissakian, JINR, Dubna, 1999, 190–203; [arXiv: math-ph/9909008](#).
- [14] Kh. S. Nirov, A. V. Razumov, “On classification of non-abelian Toda systems”, *Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics*, ed. V. A. Petrov, IHEP, Protvino, 2002, 213–221; [arXiv: nlin.SI/0305023](#).
- [15] Э. Пресли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [16] Kh. S. Nirov, A. V. Razumov, *Comm. Math. Phys.*, **267**:3 (2006), 587–610; [arXiv: math-ph/0504038](#).
- [17] Kh. S. Nirov, A. V. Razumov, *Nucl. Phys. B*, **782**:3 (2007), 241–275; [arXiv: math-ph/0612054](#).
- [18] R. Hamilton, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7**:1 (1982), 65–222.
- [19] J. Milnor, “Remarks on infinite-dimensional Lie groups”, *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B. S. DeWitt, R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1007–1057.
- [20] А. Л. Онищик, Е. Б. Винберг, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
- [21] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [22] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, *Группы Ли и алгебры Ли 3*, Итоги науки и техн., Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990.
- [23] И. М. Кричевер, Приложение к статье: Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 72–77.
- [24] A. V. Mikhailov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.