Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Погребков, Коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах и интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 477–491

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:22:39

© 2008 г.

А. К. Погребков*

КОММУТАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Показано, что коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах порождают решения линеаризованных версий интегрируемых уравнений. В некотором классе интегральных операторов введена специальная процедура одевания, позволяющая вывести из такого коммутаторного тождества как само нелинейное интегрируемое уравнение, так и его пару Лакса. Таким образом, проблема построения новых интегрируемых уравнений сведена к проблеме построения коммутаторных тождеств на ассоциативных алгебрах.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное уравнение, пара Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы указали, что два произвольных элемента A и B произвольной ассоциативной алгебры удовлетворяют следующему коммутаторному тождеству:

$$[A^3, [A, B]] - \frac{3}{4}[A^2, [A^2, B]] - \frac{1}{4}[A, [A, [A, [A, B]]]] = 0. \quad (1.1)$$

Определим присоединенное действие степени элемента A на ассоциативной алгебре как

$$\text{ad}_n B = [A^n, B]. \quad (1.2)$$

Тогда тождество (1.1) можно записать как соотношение между присоединенными действиями:

$$\text{ad}_3 \text{ad}_1 - \frac{3}{4}(\text{ad}_2)^2 - \frac{1}{4}(\text{ad}_1)^4 = 0. \quad (1.3)$$

Тождество (1.1), будучи тривиальным следствием свойства ассоциативности, легко доказывает, что функция

$$B(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 A + t_2 A^2 + t_3 A^3} B e^{-t_1 A - t_2 A^2 - t_3 A^3} \quad (1.4)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: pogreb@mi.ras.ru

удовлетворяет линеаризованному уравнению Кадомцева–Петвиашвили (КП) [2] по переменным t_j , т.е.

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{3}{4} \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^4} = 0, \quad (1.5)$$

более точно, уравнению КРП. В работе [1] было отмечено, что аналогичные тождества существуют и для более высоких степеней. Действительно, легко видеть, что тождественно выполнены равенства

$$\begin{aligned} [A^n, \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{n-2}] = \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^n \frac{n! (1 - (-1)^m)}{m! (n-m)!} \underbrace{[A^2, \dots, [A^2, [A, \dots, A, B] \dots]]}_{n-m} \underbrace{\quad}_{2(m-1)}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

так что мы получаем высшие линеаризованные уравнения КП-иерархии,

$$\frac{\partial^{n-1} B(t)}{\partial t_1^{n-2} \partial t_n} = \frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^n \frac{n! (1 - (-1)^m)}{m! (n-m)!} \frac{\partial^{n+m-2} B(t)}{\partial t_1^{2(m-1)} \partial t_2^{n-m}}, \quad (1.7)$$

где теперь

$$B(t_1, t_2, t_n) = e^{t_1 A + t_2 A^2 + t_n A^n} B e^{-t_1 A - t_2 A^2 - t_n A^n}. \quad (1.8)$$

По построению очевидно, что все эти потоки находятся в инволюции.

В терминах определений (1.2) тождества (1.1) и (1.6) показывают, что присоединенное действие A^n (точнее, $\text{ad}_n(\text{ad}_1)^{n-2}$) задается через посредство присоединенных действий ad_1 и ad_2 низших степеней, которые в этом смысле порождают коммутативную алгебру присоединенных действий ad_n , $n = 1, 2, \dots$. Соотношение (1.1), отвечающее случаю $n = 3$ в (1.6), является низшим в этой иерархии. Действительно, в случае $n = 2$ мы имеем $\text{ad}_2 = \text{ad}_2$, а в случае $n = 1$ (коммутируя сначала уравнение (1.6) с A) мы получаем $\text{ad}_1 = \text{ad}_1$. Отметим также, что все тождества однородны по A и B , причем по B они линейны.

Равенство (1.4) было выведено в [1] в рамках резольвентного подхода [3]–[7] как представление, описывающее временную эволюцию (операторных) данных рассеяния. Легко понять, что с помощью описанной в работе [1] процедуры любое интегрируемое уравнение, более точно, уравнение, решаемое методом обратной задачи рассеяния (МОЗР), может быть сведено к некоторому коммутаторному тождеству. В разделе 2 приведены различные примеры таких коммутаторных тождеств и линеаризованных версий соответствующих интегрируемых уравнений. Однако основной целью настоящей работы является демонстрация того, что развитая в работах [1], [3]–[10] специальная версия процедуры одевания позволяет решить обратную задачу: вывести как **нелинейное** интегрируемое уравнение, так и его пару Лакса по любому заданному коммутаторному тождеству. Это построение проведено в разделе 3, где выписана явная реализация элементов A и B как интегральных операторов.

2. ПРИМЕРЫ КОММУТАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Пусть вновь A и B – произвольные элементы произвольной ассоциативной алгебры и элемент A обратим. Тогда непосредственное вычисление показывает, что справедливо тождество

$$[A^2, [A^2, [A^{-1}, B]]] - [A, [A, [A, [A, [A^{-1}, B]]]]] + 4[A, [A, [A, B]]] = 0. \quad (2.1)$$

Вводя теперь временную зависимость, скажем, в виде

$$B(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 A^{-1} + t_2 A + t_3 A^2} B e^{-t_1 A^{-1} - t_2 A - t_3 A^2}, \quad (2.2)$$

мы получаем, что эта функция $B(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^3 B(t)}{\partial t_3^2 \partial t_1} - \frac{\partial^5 B(t)}{\partial t_2^4 \partial t_1} + 4 \frac{\partial^3 B(t)}{\partial t_3^3} = 0, \quad (2.3)$$

которое является линеаризованной версией уравнения Бойти–Леона–Пемпинелли [8] (БЛП) (см. также [9], [10]).

Тождество (2.1) также принадлежит своей иерархии, которая в данном случае бесконечна в обоих направлениях. Общий вид этой иерархии довольно сложен, и мы его здесь опускаем, отметив только, что тождества для нечетных степеней проще, чем для четных. Например,

$$[A^3, [A^{-1}, B]] - [A, [A, [A, [A^{-1}, B]]]] + 3[A, [A, B]] = 0. \quad (2.4)$$

Тогда, положив по аналогии с (2.2)

$$B(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 A^{-1} + t_2 A + t_3 A^3} B e^{-t_1 A^{-1} - t_2 A - t_3 A^3}, \quad (2.5)$$

мы получаем, что в силу (2.4) эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_3 \partial t_1} - \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_2^3 \partial t_1} + 3 \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2} = 0, \quad (2.6)$$

являющемуся линеаризованной версией нелинейного уравнения, предложенного в [10].

В данном случае коммутативная алгебра коммутирующих потоков, заданных посредством ad_n , порождается двумя присоединенными элементами ad_1 и ad_{-1} . Для получения тождеств, выражающих, скажем, коммутатор с квадратом элемента через коммутатор с первой степенью элемента, необходимы как минимум три элемента $(A, B_1 \text{ и } B_2)$ ассоциативной алгебры. Положим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

и введем проекторы

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Тогда легко проверить, что выполняются тождества

$$\sigma_3 [(AI_1)^2, B] = [AI_1, [AI_1, B]], \quad (2.9)$$

$$\sigma_3 [(AI_2)^2, B] = -[AI_2, [AI_2, B]], \quad (2.10)$$

где $\sigma_3 = I_1 - I_2$ – стандартная матрица Паули. Более того, если A обратим, то

$$[AI_j, [A^{-1}I_j, B]] = B, \quad j = 1, 2. \quad (2.11)$$

Вводя теперь

$$B_j(t) = e^{I_j(t_1 A + t_2 A^2)} B e^{-I_j(t_1 A + t_2 A^2)}, \quad (2.12)$$

$$B'_j(t) = e^{I_j(t_1 A + t_{-1} A^{-1})} B e^{-I_j(t_1 A + t_{-1} A^{-1})}, \quad (2.13)$$

видим, что эти функции удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\sigma_3 \partial_{t_2} B_j(t) = (-1)^{j+1} \partial_{t_1}^2 B_j(t), \quad (2.14)$$

$$\partial_{t_1} \partial_{t_{-1}} B'_j(t) = B'_j(t), \quad (2.15)$$

т.е. линейризованным версиям нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Син-Гордон.

Очевидно, что соотношения (2.9) и (2.10) – это низшие члены соответствующих иерархий коммутирующих потоков, например,

$$\sigma_3^n [A^n I_1, B] = \underbrace{[AI_1, \dots [AI_1, B] \dots]}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Соотношения (2.9) и (2.10) могут быть использованы для построения более сложных тождеств. Пусть h – постоянная блочно-диагональная матрица,

$$h = \text{diag}\{h_1, h_2\} \equiv h_1 I_1 + h_2 I_2, \quad (2.17)$$

и B задано в (2.7). Тогда из (2.9) и (2.10) мы выводим матричные коммутаторные тождества

$$\sigma_3 [hA^2, B] = h_1 [AI_1, [AI_1, B]] - h_2 [AI_2, [AI_2, B]], \quad (2.18)$$

$$[A^3, B] + 3[A, [AI_1, [AI_2, B]]] - [A, [A, [A, B]]] = 0, \quad (2.19)$$

где

$$A = AI_1 + AI_2. \quad (2.20)$$

Поэтому если мы введем

$$B(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 AI_1 + t_2 AI_2 + t_3 hA^2} B e^{-t_1 AI_1 - t_2 AI_2 - t_3 hA^2}, \quad (2.21)$$

$$B'(t_1, t_2, t_3) = e^{t_1 AI_1 + t_2 AI_2 + t_3 A^3} B e^{-t_1 AI_1 - t_2 AI_2 - t_3 A^3}, \quad (2.22)$$

то в силу (2.18) имеет место уравнение

$$\sigma_3 \frac{\partial B(t)}{\partial t_3} = h_1 \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_1^2} - h_2 \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2}, \quad (2.23)$$

которое является линеаризованной версией уравнения Дэви–Стюартсона (ДС) [11]. В силу равенства (2.19) мы имеем уравнение

$$\frac{\partial B'(t)}{\partial t_3} - \frac{\partial^3 B'(t)}{\partial t_1^3} - \frac{\partial^3 B'(t)}{\partial t_2^3} = 0, \quad (2.24)$$

т.е. линеаризованную версию уравнения Веселова–Новикова (ВН) [12].

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ И ПАР ЛАКСА

3.1. Пространство операторов. Мы показали, что рассмотренные выше коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах порождают решения линеаризованных версий интегрируемых уравнений. Мы также обратили внимание на то, что эти (операторные) линеаризованные уравнения естественно возникают в рамках резольвентного подхода к МОЗР как уравнения на (операторные) данные рассеяния (см., например, [1] для (1.1)). В этом пункте мы вводим версию процедуры одевания, которая позволяет по данному коммутаторному тождеству восстановить само соответствующее нелинейное уравнение и его пару Лакса. Для этого нам понадобятся некоторые элементы резольвентного подхода (см. [3]–[7]). Мы работаем в пространстве линейных интегральных операторов $F(q)$, $G(q)$ и т.д. с ядрами $F(x, x'; q)$, $G(x, x'; q)$ и т.д. соответственно, где $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x'_1, x'_2)$, $q = (q_1, q_2)$ и все x_j , x'_j , q_j являются вещественными переменными. Мы полагаем, что все эти ядра принадлежат пространству S' обобщенных функций шести вещественных переменных. Поэтому существует “сдвинутое” преобразование Фурье

$$F(p; \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \int dx' e^{i(p+\mathbf{q}_{\mathbb{R}})x - i\mathbf{q}_{\mathbb{R}}x'} F(x, x'; \mathbf{q}_{\mathbb{S}}), \quad (3.1)$$

$$F(x, x'; \mathbf{q}_{\mathbb{S}}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int d\mathbf{q}_{\mathbb{R}} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\mathbb{R}})x + i\mathbf{q}_{\mathbb{R}}x'} F(p; \mathbf{q}), \quad (3.2)$$

где p и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\mathbb{R}} + i\mathbf{q}_{\mathbb{S}}$ являются соответственно вещественным и комплексным двумерными векторами. Вектор $q = \mathbf{q}_{\mathbb{S}}$ играет роль параметра; он не затрагивается композицией операторов вида

$$(FG)(x, x'; q) = \int dy F(x, y; q) G(y, x'; q), \quad (3.3)$$

заданной для пар операторов таких, что интеграл в правой части определен в смысле обобщенных функций. В $(p; \mathbf{q})$ -пространстве эта композиция принимает вид

$$(FG)(p; \mathbf{q}) = \int dp' F(p - p'; \mathbf{q} + p') G(p'; \mathbf{q}). \quad (3.4)$$

Дифференциальные операторы образуют специальный подкласс в классе таких операторов. Каждому дифференциальному оператору $\mathcal{L}(x, \partial_x)$ с ядром

$$\mathcal{L}(x, x') = \mathcal{L}(x, \partial_x) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \quad (3.5)$$

мы сопоставляем оператор $L(q)$ (мы называем его *расширением* дифференциального оператора $\mathcal{L}$) с ядром

$$L(x, x'; q) = e^{-q(x-x')} \mathcal{L}(x, x') \equiv \mathcal{L}(x, \partial_x + q) \delta(x - x'), \quad (3.6)$$

где $qx = q_1x_1 + q_2x_2$. Ядро $L(p; \mathbf{q})$ расширенного дифференциального оператора (определенное как преобразование Фурье (3.1)) зависит от переменных $\mathbf{q}$ полиномиально. В частности, если $D_j(q)$, $j = 1, 2$, означает расширение дифференциального оператора $i\partial_{x_j}$, т.е.

$$D_j(x, x'; q) = i(\partial_{x_j} + q_j) \delta(x - x'), \quad (3.7)$$

то в $(p, \mathbf{q})$ -пространстве ядро этого оператора равно

$$D_j(p; \mathbf{q}) = \mathbf{q}_j \delta(p). \quad (3.8)$$

То, что ядра дифференциальных операторов в $(p, \mathbf{q})$ -пространстве полиномиально зависят от переменных $\mathbf{q}$, наводит на мысль ввести операцию $\bar{\partial}$ -дифференцирования по этим переменным:

$$(\bar{\partial}_j F)(p; \mathbf{q}) = \frac{\partial F(p; \mathbf{q})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j}, \quad j = 1, 2. \quad (3.9)$$

Тогда в рассматриваемом множестве операторов дифференциальные операторы выделяются условием

$$\bar{\partial}_j L = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.10)$$

Отметим, что в случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами мы в силу (3.6) имеем

$$L(p; \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \delta(p), \quad (3.11)$$

где $l(\mathbf{q})$ – полиномиальная функция своих аргументов. Тогда, используя (3.4), для коммутатора дифференциального оператора L с произвольным оператором F из рассматриваемого класса мы получаем

$$[L, F](p; \mathbf{q}) = (l(p + \mathbf{q}) - l(\mathbf{q})) F(p; \mathbf{q}), \quad (3.12)$$

что справедливо также и в том случае, когда $l(\mathbf{q})$ в (3.11) – мероморфная функция.

Мы опускаем здесь дополнительные условия, позволяющие однозначно определить обратные операторы (если они существуют), а для дальнейших рассуждений отметим только, что оператор, обратный к D_j , определяется как (ср. с (3.8))

$$D_j^{-1}(p; \mathbf{q}) = \frac{\delta(p)}{\mathbf{q}_j}, \quad (3.13)$$

а его ядро в x -пространстве можно найти по формуле (3.2).

В п. 3.3 данная конструкция будет использована в случае одномерных вещественных переменных x , x' и q . Соответствующие упрощения предыдущих формул очевидны, и мы их здесь не приводим.

3.2. $(2 + 1)$ -Мерные интегрируемые уравнения. Теперь мы реализуем элементы ассоциативной алгебры как операторы $A(q)$, $B(q)$ и т.д. в смысле определений п. 3.1. Мы налагаем специальные условия на эту реализацию, которые позволяют вывести пары Лакса и нелинейные интегрируемые уравнения. Примеры, приведенные в разделах 1 и 2, показывают, что число порождающих элементов коммутаторных тождеств равно числу пространственных переменных ассоциированных линейных уравнений. Соответственно, мы выбираем ядра $A(x, x'; q)$ и $B(x, x'; q)$ зависящими от векторов x , x' той же размерности, что и число порождающих элементов. В этом разделе мы рассматриваем тождества (1.1), (1.6), (2.1), (2.4), (2.18) (при $h_1 h_2 \neq 0$) и (2.19), т.е. те тождества, которые порождены двумя присоединенными действиями степеней A (или его матричных функций, как в (2.18) и (2.19)). Поэтому здесь вещественные векторы x , x' (а тогда и q) двумерны. В дальнейшем мы предполагаем выполненными следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Временная зависимость вводится с помощью одного из соотношений (1.4), (1.8), (2.2), (2.6), (2.21) или (2.22), что дает операторы $B(t, q)$ с ядрами $B(x, x'; t, q)$, принадлежащими тому же пространству операторов.

Далее, учтя, что временные переменные, соответствующие двум порождающим элементам этих тождеств, обозначены t_1 и t_2 , мы налагаем следующее условие.

УСЛОВИЕ 2. Зависимость $B(t, q)$ от переменных t_1 и t_2 сводится к сдвигу пространственных переменных ядра, т.е.

$$B(x, x'; t_1, t_2, q) = B(x_1 + t_1, x_2 + t_2, x'_1 + t_1, x'_2 + t_2; q), \quad (3.14)$$

где зависимость от других переменных t_m опущена.

В терминах $(p, \mathbf{q})$ -ядер, определенных по формуле (3.1), это означает, что

$$B(p; t, \mathbf{q}) = e^{-it_1 p_1 - it_2 p_2} B(p; \mathbf{q}). \quad (3.15)$$

В дифференциальной форме мы имеем

$$\partial_{t_j} B(t, x, x'; q) = (\partial_{x_j} + \partial_{x'_j}) B(t, x, x'; q), \quad (3.16)$$

$$\partial_{t_j} B(t, p; \mathbf{q}) = -ip_j B(t, p; \mathbf{q}), \quad j = 1, 2, \quad (3.17)$$

что в силу (3.7) или (3.8) и (3.12) можно переписать как

$$i\partial_{t_j} B(t, q) = [D_j(q), B(t, q)]. \quad (3.18)$$

Для объяснения условия 2 отметим, что в [1] при исследовании в рамках МОЗР алгебраической схемы, развитой в [13]–[15], соотношение (3.14) было выведено как уравнение эволюции операторных спектральных данных.

УСЛОВИЕ 3. Если зависимость ядра $A(p; \mathbf{q})$ от $\mathbf{q}$ сводится только к линейной комбинации $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ с постоянными коэффициентами, то такой же является и зависимость от $\mathbf{q}$ ядра $B(p; \mathbf{q})$.

Формально это условие означает, что оператор B является функцией пространственных переменных и оператора A . Далее мы рассматриваем следствия этих условий при операторной реализации коммутаторных тождеств, перечисленных в разделах 1 и 2.

3.2.1. *Уравнение КПП*. Проиллюстрируем процедуру построения пары Лакса и нелинейного уравнения, используя в качестве примера тождество (1.1). Из (1.4) мы получаем, что

$$\frac{\partial B(t)}{\partial t_1} = [A, B(t)], \quad \frac{\partial B(t)}{\partial t_2} = [A^2, B(t)]. \quad (3.19)$$

Первое из этих равенств и равенство (3.18) показывают, что мы должны положить

$$A(p; \mathbf{q}) = -i\mathbf{q}_1 \delta(p), \quad \text{т.е.} \quad A = -iD_1. \quad (3.20)$$

Теперь из второго равенства в (3.19) следует, что в силу (3.12) и (3.17) ядро оператора $B(q)$ в $(p, \mathbf{q})$ -пространстве удовлетворяет уравнению

$$[ip_2 + (p_1 + \mathbf{q}_1)^2 - \mathbf{q}_1^2] B(p; \mathbf{q}) = 0. \quad (3.21)$$

С учетом (3.12) данное соотношение может быть записано как равенство

$$[L_0(q), B(q)] = 0, \quad (3.22)$$

где введен оператор L_0 с ядром

$$L_0(p; \mathbf{q}) = (i\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1^2) \delta(p). \quad (3.23)$$

Принимая во внимание определения (3.8), мы можем записать этот оператор как

$$L_0 = iD_2 + D_1^2. \quad (3.24)$$

В силу (3.5)–(3.7) этот оператор есть расширение дифференциального оператора

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_{x_2} - \partial_{x_1}^2, \quad (3.25)$$

который является дифференциальной частью (частью, соответствующей нулевому потенциалу) оператора Лакса, ассоциированного с уравнением КПП (см. [16], [17]),

$$\mathcal{L} = -\partial_{x_2} - \partial_{x_1}^2 - u(x). \quad (3.26)$$

Условие 3 означает, что ядро $B(p; \mathbf{q})$ не зависит от $\mathbf{q}_2$, так что в силу (3.21) оно может быть записано в виде

$$B(p; t, \mathbf{q}) = \delta(ip_2 + p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1)) b(p, t) \quad (3.27)$$

(мы опускаем здесь рассмотрение более сложных решений уравнения (3.21), которые даются производными $\partial/\partial \mathbf{q}_1$ от (3.27)), где мы воспользовались обозначением для δ -функции комплексного аргумента: $\delta(z) = \delta(z_{\Re})\delta(z_{\Im})$. В (3.27) функция $b(p, t)$ есть

$$b(p, t_1, t_2, t_3) = \exp\left(-ip_1 t_1 - ip_2 t_2 + it_3 \frac{p_1^4 - 3p_2^2}{4p_1}\right) b(p), \quad (3.28)$$

где зависимость от t_1 , t_2 и t_3 задана в соответствии с (2.2) и $b(p)$ не зависит от t (и $\mathbf{q}$).

Введем теперь оператор ν с ядром $\nu(p; \mathbf{q})$, зависящим от той линейной комбинации $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, которая была указана в условии 3. В данном случае вследствие (3.20) и (3.27) это означает, что $\nu(p; \mathbf{q}) = \nu(p; \mathbf{q}_1)$, а именно

$$\bar{\partial}_1 \nu = \nu B \quad (3.29)$$

(см. (3.9)). Для того чтобы определить оператор ν однозначно, мы нормируем его так, чтобы он был равен единичному оператору в точке сингулярности ядра $L_0(p; \mathbf{q})$ по переменной $\mathbf{q}_1$. Здесь в силу (3.20) это означает, что

$$\nu(p; \mathbf{q}_1) = \delta(p) + O(\mathbf{q}_1^{-1}), \quad \mathbf{q}_1 \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Тогда, учитывая (3.10), мы получаем из (3.22), что $[L_0, \nu]$ удовлетворяет равенству

$$\bar{\partial}_1 [L_0, \nu] = [L_0, \nu] B, \quad (3.31)$$

т.е. тому же уравнению (3.29). В силу (3.12) и (3.30) ядро $[L_0, \nu](p; \mathbf{q}_1)$ ведет себя на бесконечности, как некоторая константа (по $\mathbf{q}_1$). Обозначая эту асимптотику $-u(p, t)$ и предполагая однозначную разрешимость уравнения (3.29), мы получаем, что $[L_0, \nu] = u\nu$, т.е.

$$L\nu = \nu L_0, \quad (3.32)$$

где L – расширение (в смысле (3.6)) дифференциального оператора (3.26). Уравнение (3.32) означает, что ν – оператор одевания (преобразования). В [6] было показано, что при подстановке (3.27) в (3.29) мы получаем стандартное уравнение обратной задачи для решения Йоста [18], а второй оператор пары Лакса, равно как и дифференциальное уравнение для $u(x, t)$ (для Фурье-преобразования $u(p, t)$), следуют из (3.28) и (3.29). Мы не воспроизводим здесь эти детали.

3.2.2. Уравнение КП. Выше мы вывели уравнение КРП в предположении, что все времена в (1.4) вещественны. Выполняя подстановку $t_j \rightarrow -it_j$ в (1.4) и (1.6), мы вместо (3.19) получаем

$$i \frac{\partial B(t)}{\partial t_1} = [A, B(t)], \quad i \frac{\partial B(t)}{\partial t_2} = [A^2, B(t)] \quad (3.33)$$

и т.д. Поэтому теперь тем же способом, что и (3.20), мы получаем

$$A = D_1. \quad (3.34)$$

Из формул (3.12), (3.17) и второго равенства в (3.33) следует, что ядро оператора $B(q)$ в $(p, \mathbf{q})$ -пространстве в этом случае удовлетворяет уравнению

$$[p_2 - (p_1 + \mathbf{q}_1)^2 + \mathbf{q}_1^2] B(p; \mathbf{q}) = 0. \quad (3.35)$$

Это означает, что оператор $B(q)$ удовлетворяет тому же коммутаторному равенству (3.22), где теперь, однако,

$$L_0 = D_2 - D_1^2. \quad (3.36)$$

В смысле рассуждений пункта 3.1 этот оператор есть расширение дифференциального оператора

$$\mathcal{L}_0 = i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2, \quad (3.37)$$

т.е. дифференциальной части линейного оператора, ассоциированного с уравнением КПП (см. [16], [17]),

$$\mathcal{L} = i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x). \quad (3.38)$$

Теперь в силу условия 3 и по аналогии с (3.27) и (3.28) мы получаем

$$B(t, p; \mathbf{q}_1) = \delta(p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1))b(t, p), \quad (3.39)$$

где

$$b(t_1, t_2, t_3, p) = \exp\left(-ip_1 t_1 - ip_2 t_2 - it_3 \frac{p_1^4 + 3p_2^2}{4p_1}\right)b(p). \quad (3.40)$$

Мы снова можем определить оператор преобразования ν посредством (3.29) и (3.30). Но в данном случае аргумент δ -функции в правой части (3.39) пропорционален $\mathbf{q}_{1\Im} = q_1$, так что вместо $\bar{\partial}$ -задачи (3.29) мы получаем нелокальную задачу Римана–Гильберта, т.е. сталкиваемся с хорошо известным различием обратных задач для уравнений КПП и КП (ср. [18] с [19] и [20]). Здесь снова $L_0(p; \mathbf{q})$ имеет полиномиальное поведение на бесконечности, поэтому мы налагаем то же условие нормировки (3.30). Далее, используя (3.22), мы доказываем соотношение (3.32), где теперь L – расширение в смысле (3.6) дифференциального оператора (3.38). Ссылаясь на работу [5], можно вывести второе уравнение пары Лакса и доказать, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КПП, когда введена зависимость от трех времен t_1, t_2 и t_3 . Таким же образом мы можем использовать тождества (1.6) для вывода старших уравнений иерархии КП (см. [1]). По построению понятно, что они все имеют один и тот же ассоциированный линейный оператор $\mathcal{L}$.

3.2.3. Уравнение БЛП. Пусть теперь оператор $B(t)$ определен в (2.2), так что по формуле (2.1) он удовлетворяет уравнению (2.3). Тогда вместо (3.19) мы получаем

$$\frac{\partial B(t)}{\partial t_1} = [A, B(t)], \quad \frac{\partial B(t)}{\partial t_2} = [A^{-1}, B(t)]. \quad (3.41)$$

Используя условие 2 или одну из его дифференциальных форм (3.16)–(3.18), мы получаем, что оператор A тот же, что и в (3.20). Тогда по аналогии с выводом уравнения (3.21) мы в силу второго равенства в (3.41) и равенств (3.12) и (3.13) для $j = 2$ получаем, что здесь ядро оператора B удовлетворяет уравнению

$$\left(p_2 + \frac{1}{p_1 + \mathbf{q}_1} - \frac{1}{\mathbf{q}_1}\right)B(p; \mathbf{q}) = 0. \quad (3.42)$$

Тогда $B(q)$ снова удовлетворяет (3.22), где в силу (3.12) оператор L_0 равен

$$L_0 = D_2 + D_1^{-1}. \quad (3.43)$$

Условие 3 дает, что $B(p; \mathbf{q}) = B(p; \mathbf{q}_1)$, а соотношение (3.42) означает, что ядро $B(p; \mathbf{q})$ имеет вид (ср. с (3.27))

$$B(t, p; \mathbf{q}) = \delta\left(p_2 + \frac{1}{p_1 + \mathbf{q}_1} - \frac{1}{\mathbf{q}_1}\right)b(t, p). \quad (3.44)$$

Здесь $b(t, p)$ – функция p и t , равная

$$b(t_1, t_2, t_3, p) = \exp\left(-ip_1t_1 - ip_2t_2 - it_3p_1^2\sqrt{1 - \frac{4}{p_1p_2}}\right)b(p), \quad (3.45)$$

где зависимость от t_1 , t_2 и t_3 соответствует (2.2).

Ядро оператора L_0 равно $L_0(p; \mathbf{q}) = (\mathbf{q}_2 + 1/\mathbf{q}_1)\delta(p)$, так что, в отличие от случая уравнения КП, оно является лишь мероморфной функцией от $\mathbf{q}_1$. Соответственно, ядро $\nu(p; \mathbf{q}_1)$ оператора преобразования определяется как решение той же $\bar{\partial}$ -задачи (3.29), но теперь функция $L_0(p; \mathbf{q})$ сингулярна при $\mathbf{q}_1 = 0$, поэтому условие нормировки формулируется как

$$\nu(p; \mathbf{q}_1)|_{\mathbf{q}_1=0} = \delta(p), \quad (3.46)$$

причем мы ищем решение, ограниченное при $\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty$. Как следствие, $\bar{\partial}$ -уравнение на коммутатор $[L_0, \nu]$ имеет дополнительный неоднородный член (см. (3.31)). Тем не менее простые вычисления доказывают, что в этом случае уравнение (3.32) также справедливо, причем оператор L равен

$$L = D_2 + D_1^{-1} + D_1^{-1}\alpha + \beta, \quad (3.47)$$

где α и β являются операторами умножения, т.е. в x -пространстве они имеют ядро $\alpha(x, x'; q) = \alpha(x)\delta(x - x')$ и аналогичное ядро для β . Оператор (3.47) не является дифференциальным. Дифференциальный оператор дается произведением $\tilde{L} = D_1L$, которое в силу (3.6) представляет собой расширение оператора

$$\tilde{\mathcal{L}} = \partial_{x_1}\partial_{x_2} + 1 + \alpha_x + \partial_{x_1} \cdot \beta(x), \quad (3.48)$$

т.е. вспомогательного линейного оператора уравнения БЛП (см. [8]). В работе [9] указано, что исследование прямой и обратной задач для этого оператора фактически сводится к исследованию этих задач для оператора (3.47). В работе [10] доказано, что эволюция (по t_3) спектральных данных B приводит в силу (3.45) к нелинейному дифференциальному уравнению БЛП на α и β .

Показатель экспоненты в (3.45) не является чисто мнимым, следовательно, временная эволюция для уравнения БЛП неустойчива (см. [10]). В работе [10] было указано, что если зависимость от t_3 задана по формуле (2.5), то результирующее нелинейное дифференциальное уравнение на α и β не имеет этого дефекта. Мы опускаем дальнейшие детали и отметим только, что зависимости от t_1 и t_2 в (2.2) и (2.5) совпадают, так что в случае тождества (2.6) мы получаем в результате описанной выше процедуры тот же L -оператор (3.47).

3.2.4. *Уравнения ДС и ВН.* Рассмотрим теперь кратко следствия тождеств (2.18) и (2.19), где B – матрица, заданная в (2.7), а матрицы I_j определены в (2.8). Пусть B_1 и B_2 суть операторы, принадлежащие пространству из п. 3.1, с ядрами $B_j(x, x'; q)$ в x -пространстве (с ядрами $B_j(p; \mathbf{q})$ в $(p, \mathbf{q})$ -пространстве). Под действием эволюций (2.21) и (2.22) мы получаем операторы с ядрами $B(t, x, x'; q)$ и $B'(t, x, x'; q)$ соответственно. Рассмотрим равенство (2.18). Налагая на оператор $B(t, q)$ условие 2, получаем с учетом (3.17) и (2.8), что

$$i(AB_1)(p; \mathbf{q}) = p_1 B_1(p; \mathbf{q}), \quad -i(B_2 A)(p; \mathbf{q}) = p_1 B_2(p; \mathbf{q}), \quad (3.49)$$

$$-i(B_1 A)(p; \mathbf{q}) = p_2 B_1(p; \mathbf{q}), \quad i(AB_2)(p; \mathbf{q}) = p_2 B_2(p; \mathbf{q}). \quad (3.50)$$

Складывая попарно первые, а затем вторые уравнения в (3.49), (3.50), получаем $i[A, B_j](p; \mathbf{q}) = (p_1 + p_2)B_j(p; \mathbf{q})$, $j = 1, 2$, и в соответствии с формулой (3.12) здесь мы должны положить

$$A(p; \mathbf{q}) = -i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\delta(p), \quad (3.51)$$

что в силу (3.8) может быть записано в операторной форме как

$$A = -i(D_1 + D_2). \quad (3.52)$$

Теперь нам осталось удовлетворить, скажем, уравнения в (3.49), что дает условия $(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_2)B_1(p; \mathbf{q}) = 0$ и $(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_1)B_2(p; \mathbf{q}) = 0$. Чтобы удовлетворить эти равенства, достаточно выбрать ядро оператора B в виде

$$B(p; t, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_2)b_1(p, t) \\ \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_1)b_2(p, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

где мы использовали, что по условию 3 и формуле (3.51) ядро $B(t, p; \mathbf{q})$ не зависит от разности $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$. Зависимость оператора B от времени в случае, когда все три времени введены по формуле (2.21), дается посредством явного соотношения

$$B(p; t, \mathbf{q}) = e^{-it_1 p_1 - it_2 p_2 - t_3 \sigma_3 (h_1 p_1^2 - h_2 p_2^2)} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_2)b_1(p) \\ \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + p_1)b_2(p) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

так что во избежание неустойчивости следует заменить t_3 на it_3 .

Теперь мы должны построить нетривиальный оператор L_0 с постоянными коэффициентами, удовлетворяющий уравнению (3.22). Принимая во внимание δ -функции в (3.53) и внедиагональную матричную структуру оператора B , мы видим, что $L_0(p; \mathbf{q}) = \text{diag}\{P_1(\mathbf{q}), P_2(\mathbf{q})\}\delta(p)$, где $P_j(\mathbf{q})$ суть полиномы. При условии, что эти полиномы нетривиальны и имеют минимально возможную степень, мы легко находим

$$L_0 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -D_1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

В силу наших определений (3.5)–(3.8) этот оператор есть расширение оператора

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} & 0 \\ 0 & -\partial_{x_1} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

который является дифференциальной частью двумерной задачи Захарова–Шабата, т.е. известной вспомогательной линейной задачей для уравнения ДС [21].

Оператор преобразования ν с ядром $\nu(p; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$ определяется из $\bar{\partial}$ -задачи (3.29) с учетом нормировки на единичный матричный оператор (ср. с (3.30)) в точке сингулярности ядра $L_0(p; \mathbf{q})$, т.е. при $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$. Тогда мы можем доказать, что уравнение (3.31) выполняется в силу (3.22) и (3.55). Далее, принимая во внимание асимптотическое поведение ядра $[L_0, B](p; \mathbf{q})$ при $\mathbf{q} \rightarrow \infty$, мы выводим формулы (3.32), где теперь L – расширение линейного оператора задачи Захарова–Шабата. Рассмотрение тождества (2.19) проводится таким же образом, поскольку зависимости от t_1 и t_2 в (2.21) и (2.22) совпадают; в результате мы получаем уравнение ВН.

3.3. (1 + 1)-Мерные уравнения. Выше мы видели, что без потери общности оператор A всегда может быть выбран как линейная комбинация операторов D_1 и D_2 с постоянными (матричными) коэффициентами (см. (3.7), (3.8)). Для того чтобы получить интегрируемые уравнения в (1 + 1)-измерениях, можно произвести редукцию, налагая условие, что оператор B коммутирует с дополнительной линейной комбинацией D_1 и D_2 . Тогда, как следует из (3.12), функция $b(p)$ в (3.28), (3.40) и (3.45) пропорциональна $\delta(p_2)$, а функции $b_j(p)$ в (3.53) пропорциональны $\delta(p_1 + p_2)$. Легко проверить, что таким способом мы действительно приходим к соответствующим (1 + 1)-мерным нелинейным эволюционным уравнениям. С другой стороны, мы можем непосредственно применить описанную выше процедуру к тождествам (2.9)–(2.11) и соответствующим уравнениям (2.14), (2.15). Рассмотрим в качестве примера тождество (2.9). В нем имеется только один порождающий элемент коммутаторной алгебры – коммутатор с AI_1 . Соответственно, мы реализуем оператор B как интегральный оператор в одномерном пространстве: оператор с ядром $B(x_1, x'_1; q_1)$. Используя очевидные одномерные версии формул, приведенных в п. 3.1, мы налагаем здесь вместо условия 2 (см. (3.14)) условие

$$B(x_1, x'_1; t_1, q_1) = B(x_1 + t_1, x'_1 + t_1, ; q_1) \quad (3.57)$$

и по формуле (3.17) для $j = 1$ получаем

$$\partial_{t_1} B(p_1; t_1, \mathbf{q}_1) = -ip_1 B(p_1; t_1, \mathbf{q}_1). \quad (3.58)$$

С другой стороны, в силу (2.12) мы имеем $\partial_{t_1} B(t) = [AI_1, B(t)]$. Выберем A как дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, тогда в силу (3.11) для его ядра имеется представление $A(p_1, \mathbf{q}_1) = a(\mathbf{q}_1)\delta(p_1)$, где $a(\mathbf{q}_1)$ – полином. Используя равенства (2.7), (2.8) и свойство (3.12), мы получаем

$$(a(p_1 + \mathbf{q}_1) + ip_1)B_1(p_1, \mathbf{q}_1) = 0, \quad (a(\mathbf{q}_1) - ip_1)B_2(p_1, \mathbf{q}_1) = 0. \quad (3.59)$$

В данном случае у нас нет переменных p_2 и $\mathbf{q}_2$, поэтому множители в скобках должны быть равны нулю при одних и тех же значениях $\mathbf{q}_1$ и p_1 . Это условие определяет $a(\mathbf{q}_1)$ как полином первого порядка, равный $-2i\mathbf{q}_1$ (с точностью до сдвига на константу), т.е.

$$A(p_1; \mathbf{q}_1) = -2i\mathbf{q}_1\delta(p_1) \quad (3.60)$$

или в силу (3.8)

$$A = -2iD_1. \quad (3.61)$$

Тогда равенства (3.59) сводятся к $(p_1 + 2\mathbf{q}_1)B_j(p_1, \mathbf{q}_1) = 0$, и по формуле (2.7) мы для ядра оператора B имеем представление

$$B(t, p_1; \mathbf{q}_1) = \begin{pmatrix} 0 & b_1(t, p_1) \\ b_2(t, p_1) & 0 \end{pmatrix} \delta(p_1 + 2\mathbf{q}_1). \quad (3.62)$$

Как и ранее, легко доказать, что оператор L_0 , удовлетворяющий соотношению (3.22), задается с помощью формулы

$$L_0 = \sigma_3 D_1, \quad (3.63)$$

таким образом, мы пришли к дифференциальной части одномерной задачи Захарова–Шабата. Построение оператора преобразования ν и потенциала u можно провести так же, как и выше, используя $\bar{\partial}$ -задачу (3.29). Эта задача здесь, как и в случаях уравнений КШ и ДС, сводится к задаче Римана–Гильберта благодаря специфическому аргументу δ -функции в (3.62).

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной статье мы показали, что существование коммутаторных тождеств приводит к интегрируемым нелинейным эволюционным уравнениям. Предложенная схема восстановления таких уравнений вместе с их парами Лакса является общей и модельно-независимой, хотя рассмотренные примеры соответствовали лишь известным интегрируемым уравнениям. Поэтому возникает проблема описания всех коммутаторных тождеств на ассоциативных алгебрах. Другой открытой проблемой является существование коммутаторных тождеств с тремя генераторами. Следуя путем предложенной процедуры, естественно ожидать, что такие тождества ведут к $(3 + 1)$ -мерным интегрируемым уравнениям. Описанные в данной работе коммутаторные тождества выполняются на произвольных ассоциативных алгебрах, в то время как реализация операторов A и B , позволившая получить нелинейные эволюционные уравнения, является довольно специальной. Разумно предполагать, что те же тождества связаны и с некоторыми другими интегрируемыми системами при иных реализациях элементов ассоциативной алгебры.

Благодарности. Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00498 и № 06-01-92057-КЭ), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-672.2006.1), NWO–РФФИ (грант № 05-01-89006), программы РАН “Математические методы нелинейной динамики.”

Список литературы

- [1] A. K. Pogrebkov, “On time evolutions associated with the nonstationary Schrödinger equation”, *L. D. Faddeev’s Seminar on Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **201**, ed. M. Semenov-Tian-Shansky, 2000, 239–255; [arXiv: math-ph/9902014](https://arxiv.org/abs/math-ph/9902014).
- [2] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 753–756.

- [3] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 181–210.
- [4] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov, *Inverse Problems*, **8**:3 (1992), 331–364.
- [5] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4683–4718.
- [6] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Problems*, **17** (2001), 937–957.
- [7] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *J. Math. Phys.*, **44**:8 (2003), 3309–3340.
- [8] M. Boiti, J. Leon, F. Pempinelli, *Inverse Problems*, **3**:1 (1987), 37–49.
- [9] Т. И. Гарамш, А. К. Погребков, *ТМФ*, **102**:2 (1995), 163–182.
- [10] Т. И. Гарамш, А. К. Погребков, *ТМФ*, **109**:2 (1996), 163–174.
- [11] A. Davey, K. Stewartson, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **338**:1613 (1974), 101–110.
- [12] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **30** (1984), 588–591.
- [13] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems: Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci. Publishing, Singapore, 1983, 39–119.
- [14] A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12**:3 (1986), 171–179.
- [15] A. Yu. Orlov, “Vertex operator, $\bar{\partial}$ -problem, symmetries, variational identities, and Hamiltonian formalism for $(2+1)$ integrable systems”, *Proc. Int. Workshop “Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics”*, v. 1 (Kiev, 1987), eds. V. G. Bar’yakhtar, V. M. Chernousenko, N. S. Erokhin, A. G. Sitenko, V. E. Zakharov, World Scientific, Singapore, 1988, 116–134.
- [16] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8** (1974), 226–235.
- [17] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19** (1974), 753–757.
- [18] M. J. Ablowitz, D. Bar Yacoov, A. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **69**:2 (1983), 135–143.
- [19] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *Sov. Sci. Rev.*, **1** (1979), 133–148.
- [20] S. V. Manakov, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 420–427.
- [21] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, *Phys. Rev. Lett.*, **51**:1 (1983), 7–10.