Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Руджинарс, Классическая гиперболическая динамика Аски–Вильсона без связанных состояний, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 492–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 03:47:17

© 2008 г.

С. Н. М. Руджинарс*

КЛАССИЧЕСКАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА АСКИ–ВИЛЬСОНА БЕЗ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Построено явное отображение действие–угол для классической гиперболической динамики Аски–Вильсона (также известной как релятивистская BC_1 -система Калоджеро–Мозера), ограничивая четыре константы взаимодействия таким образом, чтобы не возникало связанных состояний. Свойства этого отображения являются точными классическими аналогами свойств, ранее полученных для преобразования квантовых собственных функций. Наша конструкция не использует ни теорию рассеяния, ни матрицу Лакса, вместо этого она основана на некотором тождестве самодуальности.

Ключевые слова: гиперболическая динамика Аски–Вильсона, классическая релятивистская BC_1 -система Калоджеро–Мозера, отображение действие–угол, тождество самодуальности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические нерелятивистские (инвариантные относительно группы Галилея) и релятивистские (инвариантные относительно группы Пуанкаре) N -частичные системы Калоджеро–Мозера были явно решены уже давно (см., например, [1], [2] и ссылки в этих работах). При $N > 2$ существование подходящей матрицы Лакса имеет существенное значение для формулировки решения. В двухчастичном случае, однако, можно исключить движение центра масс и получить редуцированный гамильтониан на двумерном фазовом пространстве, для которого решение уравнений Гамильтона можно вывести без обращения к матрице Лакса.

Как хорошо известно, содержащую взаимодействие часть указанного симметричного в пространстве-времени N -частичного гамильтониана можно записать в терминах системы корней A_{N-1} . Нерелятивистские системы имеют аналоги для всех других систем корней, и хорошо известны их формулировки с использованием матриц Лакса [3]–[5]. Наоборот, весьма мало известно о матрицах Лакса для релятивистских аналогов. Действительно, подходящая матрица Лакса известна, по-видимому, только для случая A_{N-1} и его C_l - и BC_l -редукций [6]–[8]. В частности, для тригонометрических и гиперболических BC_N -систем матрица Лакса не известна даже

*Department of Applied Mathematics, University of Leeds, Leeds, UK.
E-mail: siru@maths.leeds.ac.uk

для простейшего случая $N = 1$, с четырьмя константами взаимодействия. Точнее, в BC_1 -случае не известно матрицы, являющейся реальным кандидатом на получение явного решения уравнений Гамильтона, в духе (2×2) -матрицы Лакса A_1 , использованной в работе [8], а затем в более теоретико-групповых формулировках (см., например, [9] и приведенную там библиографию).

С другой стороны, совершенно ясно, как тригонометрические и гиперболические BC_1 -системы должны квантоваться, чтобы получалось физически удовлетворительное явное решение квантовой динамики. Для тригонометрического режима это квантование включает многочлены Аски–Вильсона, которые были введены более двух десятилетий назад исходя, разумеется, из совершенно другой точки зрения [10]. Для гиперболического режима решение зависит от существования “релятивистского” обобщения “нерелятивистской” гипергеометрической функции ${}_2F_1$. Многочлены Аски–Вильсона получаются дискретизацией этой R -функции [11] таким же образом, как многочлены Якоби получаются из функции ${}_2F_1$ (дальнейшие сведения об R -функции и о связанном с ней преобразовании гильбертова пространства см. в [12]).

В отсутствие BC_1 -матрицы Лакса можно, тем не менее, получить важные указания о классической гиперболической BC_1 -динамике в рамках двух различных возможностей. Во-первых, имеется информация из классической A_1 -динамики, все наиболее характерные черты которой можно получить без привлечения матрицы Лакса (как это показано ниже). Во-вторых, поскольку квантовая гиперболическая BC_1 -динамика также достаточно хорошо понята, мы приходим к естественным предположениям касательно состояния дел на классическом уровне.

Классическая A_1 -динамика определяется гамильтонианом

$$H_A(x, p) = 2c(2p)W_A(x), \quad (1.1)$$

$$W_A(x) = \left(1 + \frac{\sin^2 \tau}{s^2(2x)}\right)^{1/2}, \quad \tau \in (0, \pi), \quad (1.2)$$

на фазовом пространстве

$$\langle \Omega, \omega \rangle, \quad \Omega = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, \quad \omega = dx \wedge dp. \quad (1.3)$$

Здесь и далее использованы сокращения $c(z) = \operatorname{ch} z$, $s(z) = \operatorname{sh} z$. В разделе 2 мы изучаем этот гамильтониан *ab initio*, следуя стратегии, допускающей обобщение на BC_1 -случай.

Более конкретно, мы построим отображение действие–угол, из которого характеристические гамильтоновы потоки получаются как простые следствия. Это отображение тесно связано с волновыми отображениями из теории рассеяния, но в нашей конструкции это не используется. Более того, как уже упоминалось, не используется и матрица Лакса.

BC_1 -гамильтониан имеет вид

$$H_B(\gamma; x, p) = 2c(2p)W_B(\gamma; x) + V_b(\gamma; x), \quad (1.4)$$

$$W_B(\gamma; x) = [V(\gamma; x)V(\gamma; -x)]^{1/2}, \quad (1.5)$$

$$V(\gamma; x) = -\frac{\prod_{\mu=0}^3 c(x - i\gamma_\mu)}{s^2(x)c^2(x)}, \quad (1.6)$$

$$V_b(\gamma; x) = -V(\gamma; x) - V(\gamma; -x) - 2c(2i\hat{\gamma}_0), \quad \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu. \quad (1.7)$$

Ясно, что

$$V(\gamma; x)V(\gamma; -x) = \frac{\prod_{\mu=0}^3 [s^2(x) + c^2(i\gamma_\mu)]}{s^4(x)c^4(x)} > 0 \quad \forall (\gamma, x) \in \mathbb{R}^4 \times (0, \infty). \quad (1.8)$$

Считая квадратный корень в (1.5) положительным, получаем, что $H_B(\gamma; x, p)$ – вещественно-аналитическая вещественнозначная функция на Ω при всех $\gamma \in \mathbb{R}^4$, являющаяся 2π -периодической по $\gamma_0, \dots, \gamma_3$.

Описанная схема составляет естественное “деквантование” нашей формулировки гиперболического квантового BC_1 -гамильтониана H (3.11) в работе [13] (см. также формулы (3.15) и (3.17) в указанной работе при $a_+ = \pi$, $a_- = 0$, $h = i\gamma$). Запись в терминах γ позволяет немедленно заключить, что гамильтониан является S_4 -симметричным (инвариантным при перестановках $\gamma_0, \dots, \gamma_3$). Не очевидно, но верно, что он еще и D_4 -симметричен (инвариантен относительно четного числа смены знаков). Действительно, очевидно, что $W_B(x)$ даже B_4 -симметричен (инвариантен относительно произвольных смен знаков), но D_4 -симметрия члена $V_b(x)$ не является явной исходя из его определения (1.7). Однако эта симметрия проявляется при альтернативном представлении¹⁾

$$V_b(\gamma; x) = 2 \left(\frac{p_c(\gamma)}{s^2(x)} - \frac{p_s(\gamma)}{c^2(x)} \right), \quad (1.9)$$

$$p_c(\gamma) = \prod_{\mu=0}^3 c(i\gamma_\mu), \quad p_s(\gamma) = \prod_{\mu=0}^3 s(i\gamma_\mu). \quad (1.10)$$

Более физический, но асимметричный выбор параметров достигается в терминах четырех констант взаимодействия, определяемых как

$$c_0 = \gamma_0 + \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \gamma_1, \quad c_2 = \gamma_2 + \frac{\pi}{2}, \quad c_3 = \gamma_3. \quad (1.11)$$

В этих терминах получаем

$$p_c = \sin c_0 \cos c_1 \sin c_2 \cos c_3, \quad p_s = \cos c_0 \sin c_1 \cos c_2 \sin c_3. \quad (1.12)$$

Из этих формул и из (1.8), в частности, ясно, что A_1 -гамильтониан H_A (1.1) возникает как специализация BC_1 -гамильтониана H_B (1.4) на случай

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}, 0, 0 \right). \quad (1.13)$$

¹⁾Совпадение с (1.7) легко проверить, сравнивая асимптотики при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$ и главные части в полюсах.

В разделе 3 мы исследуем BC_1 -случай в духе подхода, примененного к A_1 -случаю в разделе 2, ограничиваясь частным случаем, когда γ варьируется по B_4 -инвариантному многограннику²⁾ $P = (-\pi/2, \pi/2)^4$. В точности как на квантовом уровне, A_1 -самодуальность, возникающая в разделе 2, имеет BC_1 -обобщение, которое включает самосопряженную инволюцию

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При определении дуальных параметров как $\hat{\kappa} = J\kappa$, $\kappa = \gamma$, с наши основные результаты применимы к γ в ограниченном многограннике $P_r = \{\kappa \in P \mid \hat{\kappa} \in P\}$ (как будет показано, ограничение обеспечивает отсутствие связанных состояний). Обозначая D_4 -группу Вейля через W , легко проверить, что

$$JWJ = W. \quad (1.14)$$

Таким образом, P_r является не только J -инвариантным, но и D_4 -инвариантным.

В разделе 2 мы используем $(x \leftrightarrow y)$ -симметрию функции $M(x, y)$ (2.7) для построения A_1 -отображения действие–угол. В том же духе наша ключевая отправная точка в разделе 3 представляет собой более общее тождество

$$M(\gamma; x, y) = M(\hat{\gamma}; y, x) \quad \forall (\gamma, x, y) \in \mathbb{C}^6, \quad (1.15)$$

где

$$M(\gamma; x, y) = s^2(2x) \left[\left(c(2y) - \frac{V_b(\gamma; x)}{2} \right)^2 - V(\gamma; x)V(\gamma; -x) \right]. \quad (1.16)$$

В отличие от A_1 -случая, однако, симметричное тождество (1.15) далеко не очевидно. Поскольку его доказательство достаточно сложно, мы поместили его в приложение.

Имеются весомые свидетельства, что наши классические BC_1 -результаты можно с успехом использовать на квантовом уровне (в действительности этим и определяется основная мотивировка получения результатов, приведенных в данной статье). Точнее, в случае равных периодов $a_+ = a_-$ (ср. [12]) представляется вполне вероятным, что R -функция допускает альтернативное элементарное представление, в котором классические многообразия точек поворота играют определенную роль. В этих рамках их самодуальность, следующая из (1.15), играет ключевую роль. Мы намереемся вернуться к этому вопросу в будущем.

В завершение введения упомянем связанную с данным контекстом работу [14]: из-за свойства дуальности отображения действие–угол (как это детализируется в нашем основном результате в теореме 2) гамильтонианы

$$X = 2c(2x), \quad Y = H_B(\gamma; x, p) \quad (1.17)$$

образуют классическую пару Леонара в терминологии работы [14]. Мы признательны авторам работы [14] за ознакомление нас с их работой и за полезные обсуждения.

²⁾Заметим, что (1.13) дает параметры на границе P .

2. ВОЗВРАЩЕНИЕ К A_1 -СЛУЧАЮ

Из (1.2) ясно, что³⁾

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\sin \tau}{2x} + O(x), & x \rightarrow +0, \\ W(x) &= 1 + O(e^{-4x}), & x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кроме того, поскольку $W(x)$ убывает на $(0, \infty)$, сразу получаем, что каждая начальная точка $(x, p) \in \Omega$ является состоянием рассеяния, причем асимптотическая импульсная переменная $\hat{p}(x, p) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ удовлетворяет уравнению

$$2c(2\hat{p}) = H(x, p). \quad (2.2)$$

Несложно решить уравнения Гамильтона в замкнутом виде. Действительно, имеем

$$\dot{x} = \{x, H\} = 4s(2p)W(x), \quad (2.3)$$

так что

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 8W(x)(c(2p)\{s(2p), W(x)\} + s(2p)\{W(x), c(2p)\}) = \\ &= -16W(x) \frac{d}{dx} W(x) = -8 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 \tau}{s^2(2x)} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поэтому получаем то же уравнение Ньютона, что и для нерелятивистского гамильтониана (в этой связи см. также [15], [16])

$$H_{\text{nr}}(x, p) = p^2 + 4 \frac{\sin^2 \tau}{s^2(2x)}. \quad (2.5)$$

Разумеется, его легко решить явно, и тогда $p(t)$ следует из закона сохранения энергии:

$$c(2p(t)) = \frac{c(2\hat{p})}{W(x(t))}. \quad (2.6)$$

Однако A_1 -динамику можно рассматривать существенно более ясным способом, который обобщается на BC_1 -случай, где прямое решение уравнений Гамильтона представляется невыполнимым. Ключевой момент такого рассмотрения состоит в том, что существует явное отображение действие–угол с замечательным свойством самодуальности. Это свойство возникает (при произвольных N) с широким использованием подходящей матрицы Лакса (ср. [8]), но в рассматриваемом здесь редуцированном двухчастичном случае его можно вывести и непосредственно.

Перейдем к построению отображения действие–угол таким способом, для которого обобщение на BC_1 -случай окажется возможным для каждого из шагов, которые мы предпринимаем. Первый шаг в A_1 -случае почти тривиален. Он состоит в наблюдении, что функция

$$M(x, y) = s^2(2x)(c^2(2y) - W^2(x)), \quad x, y \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

³⁾В данном разделе мы опускаем нижний индекс A .

инвариантна относительно перестановки $x \leftrightarrow y$. Действительно, это следует из подстановки (1.2) и затем переписывания M в виде

$$M(x, y) = s^2(2x)s^2(2y) - \sin^2 \tau, \quad (2.8)$$

что делает симметрию явной.

В качестве второго шага введем отображение

$$\mathcal{D}: \Omega \rightarrow \Omega, \quad (x, p) \mapsto (y, q) \quad (2.9)$$

следующим образом. Сначала определим $y(x, p) > 0$ равенством

$$c(2y) = c(2p)W(x), \quad (2.10)$$

а далее определим $q(x, p) \in \mathbb{R}$ с помощью

$$s(2q) = \frac{s(2p)s(2x)}{s(2y)} \frac{W(x)}{W(y)}. \quad (2.11)$$

Третьим шагом является следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Отображение $\mathcal{D}$ является вещественно-аналитическим диффеоморфизмом на Ω с обратным отображением $\mathcal{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\mathcal{D}^2(x, p) = (z, r)$, сначала покажем, что $z = x$ и $r = p$. По определению $z > 0$ дается формулой

$$c(2z) = c(2q)W(y), \quad (2.12)$$

где $y(x, p)$ и $q(x, p)$ определены в (2.10) и (2.11). Теперь рассмотрим тождество

$$M(x, y(x, p)) = M(y(x, p), x), \quad (2.13)$$

которое следует из симметрии функции (2.7). Ввиду (2.10) это тождество можно переписать как

$$s^2(2x)W^2(x)s^2(2p) = s^2(2y)W^2(y) \left(\frac{c^2(2x)}{W^2(y)} - 1 \right). \quad (2.14)$$

Сравнивая (2.14) с квадратом равенства (2.11), видим, что

$$\frac{c^2(2x)}{W^2(y)} - 1 = s^2(2q), \quad (2.15)$$

так что $c(2q) = c(2x)/W(y)$. Из (2.12) тогда получаем $z = x$. Поскольку r определяется как

$$s(2r) = \frac{s(2q)s(2y)}{s(2z)} \frac{W(y)}{W(z)}, \quad (2.16)$$

нам остается только подставить $z = x$ и сравнить с (2.11), для того чтобы убедиться, что $r = p$.

Таким образом, отображение $\mathcal{D}$ является биекцией на Ω с обратным отображением $\mathcal{D}$. Из его определения ясно, что оно вещественно-аналитично. Поскольку оно имеет вещественно-аналитическое обратное отображение, получаем утверждение леммы.

Из инволютивности отображения $\mathcal{D}$ следует, в частности, что

$$c(2x) = c(2q)W(y). \quad (2.17)$$

Это соотношение является ключевым в доказательстве следующей леммы, которая составляет четвертый шаг.

ЛЕММА 2. *Отображение $\mathcal{D}$ является антисимплектическим, т.е.*

$$\mathcal{D}^*(\omega) = -\omega, \quad \omega = dx \wedge dp. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, имеем

$$\{c(2y(x, p)), c(2q(x, p))\} = 4s(2y)s(2q)\{y, q\}. \quad (2.19)$$

С другой стороны, соотношение (2.17) дает

$$\begin{aligned} \{c(2y), c(2q)\} &= \left\{ c(2y), \frac{c(2x)}{W(y)} \right\} = \frac{\{c(2y), c(2x)\}}{W(y)} = \frac{\{c(2p)W(x), c(2x)\}}{W(y)} = \\ &= -4s(2p)s(2x) \frac{W(x)}{W(y)} = -4s(2y)s(2q), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где мы использовали (2.11). Сравнивая (2.19) и (2.20), получаем

$$\{y, q\} = -1, \quad (2.21)$$

откуда следует утверждение леммы.

Сравнивая (2.2) и (2.10), из лемм 1, 2 видим, что функции

$$\hat{p}(x, p) = \frac{1}{2} \operatorname{Arch}(c(2p)W(x)), \quad (2.22)$$

$$\hat{x}(x, p) = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \left(\frac{s(2p)s(2x)}{s(2\hat{p}(x, p))} \frac{W(x)}{W(\hat{p}(x, p))} \right) \quad (2.23)$$

можно рассматривать как переменные действие–угол для H -потока. Более подробно можно переформулировать леммы 1, 2 следующим образом. Введем новое фазовое пространство (действие–угол) $\langle \hat{\Omega}, \hat{\omega} \rangle$ с помощью

$$\hat{\Omega} = \{(\hat{x}, \hat{p}) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{p} > 0\}, \quad \hat{\omega} = d\hat{x} \wedge d\hat{p}, \quad (2.24)$$

и определим

$$\Phi: \Omega \rightarrow \hat{\Omega}, \quad (x, p) \mapsto (\hat{x}(x, p), \hat{p}(x, p)). \quad (2.25)$$

Тогда имеем следующий ключевой результат, который составляет пятый шаг.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение Φ , определяемое формулами (2.22)–(2.25), является вещественно-аналитическим каноническим преобразованием на $\hat{\Omega}$ с обратным отображением*

$$\mathcal{E} = I^{-1} \circ \Phi \circ I^{-1}, \quad (2.26)$$

где I – отображение отождествления

$$I: \Omega \rightarrow \widehat{\Omega}, \quad (x, p) \mapsto (p, x). \quad (2.27)$$

Более того, имеем соотношение

$$\operatorname{th} 2\hat{p} \operatorname{th} 2\hat{x} = \operatorname{th} 2x \operatorname{th} 2p. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Phi = I \circ \mathcal{D}, \quad (2.29)$$

и I является антисимплектическим. Таким образом, первое утверждение следует из лемм 1 и 2.

Для доказательства соотношения (2.28) используем равенства

$$c(2\hat{p}) = c(2p)W(x), \quad c(2x) = c(2\hat{x})W(\hat{p}), \quad (2.30)$$

что дает

$$\frac{W(x)}{W(\hat{p})} = \frac{c(2\hat{p})c(2\hat{x})}{c(2x)c(2p)}. \quad (2.31)$$

Теперь (2.23) можно записать как

$$s(2\hat{x})s(2\hat{p})W(\hat{p}) = s(2p)s(2x)W(x). \quad (2.32)$$

Поэтому (2.28) можно получить путем комбинирования (2.31) и (2.32).

В качестве шестого и последнего шага получаем решение

$$(x(t), p(t)) = e^{tH}(x, p) \quad (2.33)$$

уравнений Гамильтона и его асимптотику на больших временах. Это немедленное следствие теоремы 1. Действительно, в координатах действие–угол H -поток имеет вид

$$\hat{x} \mapsto \hat{x} + 4ts(2\hat{p}), \quad \hat{p} \mapsto \hat{p}. \quad (2.34)$$

Согласно второму равенству (2.30) получаем, что

$$c(2x(t)) = c(2\hat{x} + 8ts(2\hat{p}))W(\hat{p}), \quad (2.35)$$

и тогда $p(t)$ дается формулой (2.6).

Асимптотику легко вывести из этих явных формул. Она имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &\sim \hat{x} + 4ts(2\hat{p}) + \frac{1}{2} \ln W(\hat{p}), & p(t) &\sim \hat{p}, & t &\rightarrow \infty, \\ x(t) &\sim -\hat{x} - 4ts(2\hat{p}) + \frac{1}{2} \ln W(\hat{p}), & p(t) &\sim -\hat{p}, & t &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, рассеяние отклоняется от упругого отражения в начале координат на сдвиг

$$\delta(\hat{p}) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sin^2 \tau}{s^2(2\hat{p})} \right). \quad (2.37)$$

3. РЕШЕНИЕ BC_1 -СИСТЕМЫ ПРИ $\gamma \in P_r$

В данном разделе мы получим достаточно полные результаты, аналогичные приведенным для A_1 -случая, однако мы будем требовать при этом, чтобы вектор параметров γ принадлежал ограниченному многограннику P_r . Ради более широкого взгляда на BC_1 -случай и, в частности, для качественного понимания того, как возникают ограничения на γ , начнем с различных наблюдений, относящихся к более общим γ .

Рассмотрим сначала $\gamma \in \mathbb{R}^4$. Так как все величины 2π -периодичны по $\gamma_0, \dots, \gamma_3$, можно считать, что $\gamma \in [-\pi, \pi)^4$. Тогда из (1.8) и (1.9) получаем

$$x^2 W(x) = |p_c| + o(1), \quad x^2 V_b(x) = 2p_c + o(1), \quad x \rightarrow +0, \quad (3.1)$$

$$W(x) = 1 + O(e^{-2x}), \quad V_b(x) = O(e^{-2x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Из (3.1) уже можно вывести ключевое следствие ограничения $\gamma \in P$. Действительно, из $\gamma \in P$ следует, что $p_c > 0$, так что в силу (3.1) и закона сохранения энергии H -поток является полным на фазовом пространстве $\langle \Omega, \omega \rangle$ (ср. (1.3)). При $\gamma \notin P$ это, вообще говоря, неверно. Простой пример дается “свободным” случаем $\gamma_f = (-\pi/2, 0, -\pi/2, 0)$, где

$$H(\gamma_f; x, p) = 2c(2p) \quad (3.3)$$

(ср. (1.11), (1.12)).

Выбирая отныне $\gamma \in P$, из (3.2) видим, что для больших x H -поток напоминает свободное движение, порожденное гамильтонианом (3.3). Поэтому можно ожидать, что точки в Ω , для которых $H(x, p) > 2$, будут состояниями рассеяния, причем равенство

$$2c(2\hat{p}) = H(\gamma; x, p), \quad \gamma \in P, \quad (3.4)$$

дает естественную параметризацию асимптотической энергии. Поэтому рассмотрим ограниченное фазовое пространство

$$\Omega_r(\gamma) = \{(x, p) \in \Omega \mid H(\gamma; x, p) > 2\}. \quad (3.5)$$

Фиксируя $x > 0$, легко получаем из (1.4) и (1.8), что $\Omega_r(\gamma)$ содержит все точки вида (x, p) с достаточно большим $|p|$ (действительно, H – возрастающая функция $|p|$, которая расходится при $|p| \rightarrow \infty$).

Конкретнее можно охарактеризовать $\Omega_r(\gamma)$ в терминах значений функции

$$H(\gamma; x, 0) = 2W(\gamma; x) + V_b(\gamma; x). \quad (3.6)$$

Она расходится при $x \rightarrow +0$ и имеет предел 2 при $x \rightarrow \infty$, поэтому существует такое $m(\gamma) \leq \infty$, что

$$H(\gamma; x, 0) > 2, \quad x \in (0, m(\gamma)), \quad (3.7)$$

$$\lim_{x \uparrow m(\gamma)} H(\gamma; x, 0) = 2. \quad (3.8)$$

Таким образом, имеем

$$\{(x, p) \in \Omega \mid x < m(\gamma)\} \subset \Omega_r(\gamma). \quad (3.9)$$

Прямое получение $m(\gamma)$ из (3.6) представляется неосуществимым. Ниже мы покажем, что

$$m(\gamma) = \infty \quad \forall \gamma \in P_r \quad (3.10)$$

(так что $\Omega_r(\gamma)$ равно Ω при $\gamma \in P_r$), но для это нам потребуется некоторое отступление. Понятно, что

$$H(0; x, 0) = 2 \operatorname{cth}^2 x + \frac{2}{s^2(x)} > 2 \quad \forall x > 0, \quad (3.11)$$

а потому с очевидностью имеем $m(0) = \infty$ и $\Omega_r(0) = \Omega$. Но из этих равенств не следует даже, что они выполнены также для γ вблизи 0.

С другой стороны, выбирая $\gamma_b = \frac{\pi}{2}(1, 1, 1, 1)$ на границе P , получаем

$$H(\gamma_b; x, 0) = 2 \operatorname{th}^2 x - \frac{2}{c^2(x)} < 2 \quad \forall x > 0. \quad (3.12)$$

Таким образом, из непрерывности по γ следует, что когда $\gamma \in P$ сходится к γ_b , мы имеем $m(\gamma) \rightarrow +0$.

Более подробные сведения о $m(\gamma)$ можно вывести путем уточнения асимптотики (3.2). Действительно, из (1.9) легко получаем

$$V_b(\gamma; x) = 8[p_c(\gamma) - p_s(\gamma)]e^{-2x} + O(e^{-4x}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

а из (1.8) находим

$$V(\gamma; x)V(\gamma; -x) = 1 + [4\Sigma_1(\gamma) + 8]e^{-2x} + O(e^{-4x}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.14)$$

где Σ_1 задается равенствами (II.6) и (II.3). Таким образом, получаем

$$H(\gamma; x, 0) = 2 + 8 \left[\frac{\Sigma_1(\gamma)}{2} + 1 + p_c(\gamma) - p_s(\gamma) \right] e^{-2x} + O(e^{-4x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Теперь из тождеств (II.13), (II.14) следует, что постоянная в квадратных скобках в (3.15) равна $2p_c(\hat{\gamma})$. Таким образом, окончательно получаем

$$H(\gamma; x, 0) = 2 + 16p_c(\hat{\gamma})e^{-2x} + O(e^{-4x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Очевидно, из (3.16) следует, что

$$p_c(\hat{\gamma}) < 0 \Rightarrow m(\gamma) < \infty, \quad \Omega_r(\gamma) \neq \Omega. \quad (3.17)$$

Кроме того, имеем

$$\gamma \in P_r \Rightarrow p_c(\hat{\gamma}) > 0 \quad (3.18)$$

– неравенство, которое совместно с (3.10), но из которого не следует, что $m(\gamma) = \infty$.

При $\gamma \in P \setminus P_r$ легко проверить, что одно из $\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_3$ имеет модуль, лежащий в $[\pi/2, \pi)$, а остальные три $\hat{\gamma}_\mu$ имеют модуль в $[0, \pi/2)$. Поэтому заключаем, что

$$\gamma \in P \setminus P_r \Rightarrow p_c(\hat{\gamma}) \leq 0, \quad (3.19)$$

причем равенство наступает только в том случае, когда γ лежит на границе P_r .

Конечно, когда H принимает значения меньше 2, возникает непустая область $\Omega_{bs}(\gamma)$ связанных состояний, поскольку все точки в

$$\Omega_2(\gamma) = \{(x, p) \in \Omega \mid H(\gamma; x, p) < 2\} \quad (3.20)$$

являются связанными состояниями. Очевидное ожидание состоит в том, что нет никаких других связанных состояний, т.е.

$$\Omega_{bs}(\gamma) = \Omega_2(\gamma) \quad (?), \quad (3.21)$$

но мы не будем пытаться показать это. Наложим теперь ограничение

$$\gamma \in P_r. \quad (3.22)$$

Важное следствие результатов, полученных с применением ограничения (3.22), состоит в том, что не только выполнено (3.10), но и все состояния в Ω являются состояниями рассеяния (такое ожидание естественно, но условие $m(\gamma) = \infty$ само по себе не влечет отсутствия связанных состояний, ср. замечание ниже теоремы 2). Это согласуется с ситуацией в квантовом случае (ср. [12]).

После этих вводных наблюдений мы готовы к повторению шагов для A_1 -случая из раздела 2. Первый шаг представляет собой тождество (1.15), которое доказано в приложении. Второй шаг состоит в BC_1 -версии отображения (2.9). При этом y определяется посредством

$$c(2y) = c(2p)W(\gamma; x) + \frac{V_b(\gamma; x)}{2}, \quad (3.23)$$

а q – посредством

$$s(2q) = \frac{s(2p)s(2x)}{s(2y)} \frac{W(\gamma; x)}{W(\hat{\gamma}; y)}. \quad (3.24)$$

Но в отличие от A_1 -случая (ср. (2.10) и (1.2)), не представляется очевидным, что $\mathcal{D}$ есть отображение Ω в Ω , поскольку правая часть (3.23) не превышает явным образом единицы для всех $(x, p) \in \Omega$. Эквивалентным образом, не ясно, что $\Omega_r(\gamma)$ из (3.5) равняется Ω . Но это равенство устанавливается в следующей лемме, которая является аналогом леммы 1.

ЛЕММА 3. *Для γ , ограниченных условием (3.22), выполнено*

$$\Omega_r(\gamma) = \Omega. \quad (3.25)$$

Отображение $\mathcal{D}(\gamma)$ является вещественно-аналитическим диффеоморфизмом на Ω с обратным отображением $\mathcal{D}(\hat{\gamma})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При ограничении на $\Omega_r(\gamma)$ соотношение (3.23) приводит к условию $y(x, p) > 0$, так что $\mathcal{D}(\gamma)$ отображает $\Omega_r(\gamma)$ в Ω . Вычисляя тождество (1.15) при $y = y(x, p)$, можно с помощью (3.23) переписать его в виде

$$s^2(2x)W^2(\gamma; x)s^2(2p) = s^2(2y)W^2(\hat{\gamma}; y) \left(\left(\frac{c(2x) - V_b(\hat{\gamma}; y)/2}{W(\hat{\gamma}; y)} \right)^2 - 1 \right). \quad (3.26)$$

Сравнивая полученное равенство с (3.24), получаем

$$s^2(2q) = \left(\frac{c(2x) - V_b(\hat{\gamma}; y)/2}{W(\hat{\gamma}; y)} \right)^2 - 1, \quad (3.27)$$

что сводится к соотношению

$$c(2x) = c(2q)W(\hat{\gamma}; y) + \frac{V_b(\hat{\gamma}; y)}{2}. \quad (3.28)$$

Поскольку $x > 0$, отсюда видно, что не только $\mathcal{D}(\hat{\gamma})$ отображает $\mathcal{D}(\gamma)\Omega_r(\gamma)$ в Ω , но и

$$\mathcal{D}(\hat{\gamma}) \circ \mathcal{D}(\gamma)(x, p) = (x, r) \quad \forall (x, p) \in \Omega_r(\gamma). \quad (3.29)$$

Тогда r определяется равенством

$$s(2r) = \frac{s(2q)s(2y)}{s(2x)} \frac{W(\hat{\gamma}; y)}{W(\gamma; x)}, \quad (3.30)$$

сравнивая которое с (3.24), мы заключаем, что $r = p$. Поэтому

$$\mathcal{D}(\hat{\gamma}) \circ \mathcal{D}(\gamma) = \text{id}_{\Omega_r(\gamma)}, \quad (3.31)$$

и, кроме того, заменяя γ на $\hat{\gamma}$, видим, что

$$\mathcal{D}(\gamma) \circ \mathcal{D}(\hat{\gamma}) = \text{id}_{\Omega_r(\hat{\gamma})}. \quad (3.32)$$

Докажем теперь (3.25). Для этого нам надо только показать, что $(x, 0)$ принадлежит $\Omega_r(\gamma)$ при всех $x > 0$. Мы уже видели, что это верно для малых x и для больших x (ср. (3.7), (3.16) и (3.18)). Предположим теперь, что $H(\gamma; x_0, 0) \leq 2$ для некоторого $x_0 > 0$. Тогда существует $x_m > x_0$, где $H(\gamma; x_m, 0)$ имеет локальный максимум, больший 2. Поэтому существуют $x_1, x_2 > 0$, удовлетворяющие условиям

$$x_1 = x_m - \epsilon_1, \quad x_2 = x_m + \epsilon_2, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \quad H(\gamma; x_1, 0) = H(\gamma; x_2, 0) > 2. \quad (3.33)$$

Поэтому точки $(x_j, 0)$, $j = 1, 2$, лежат в $\Omega_r(\gamma)$ и имеют один и тот же образ $(y, 0)$ под действием $\mathcal{D}(\gamma)$ (ср. (3.23), (3.24)). Ввиду (3.31) это приводит к противоречию.

Таким образом, $\mathcal{D}(\gamma)$ – биекция на Ω с обратным отображением $\mathcal{D}(\hat{\gamma})$. Очевидно, $\mathcal{D}(\gamma)$ и $\mathcal{D}(\hat{\gamma})$ – вещественно-аналитические отображения, откуда и следует утверждение леммы.

Из леммы 3 выводится ключевое соотношение (3.28). Теперь мы готовы к доказательству аналога леммы 2.

ЛЕММА 4. *Отображение $\mathcal{D}(\gamma)$ является антисимплектическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что равенство (2.19) снова выполнено. Однако здесь надо использовать (3.28), чтобы получить

$$\begin{aligned} \{c(2y), c(2q)\} &= \left\{ c(2y), \left(\frac{c(2x) - V_b(\hat{\gamma}; y)/2}{W(\hat{\gamma}; y)} \right) \right\} = \frac{\{c(2y), c(2x)\}}{W(\hat{\gamma}; y)} = \\ &= \frac{\{c(2p)W(\gamma; x) + V_b(\gamma; x)/2, c(2x)\}}{W(\hat{\gamma}; y)} = \\ &= -4s(2p)s(2x) \frac{W(\gamma; x)}{W(\hat{\gamma}; y)} = -4s(2y)s(2q), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где мы воспользовались также равенством (3.24). Поэтому мы снова получаем (2.21).

Из лемм 3, 4 следует, что функции

$$\hat{p}(\gamma; x, p) = \frac{1}{2} \operatorname{Arch} \left(c(2p)W(\gamma; x) + \frac{V_b(\gamma; x)}{2} \right), \quad (3.35)$$

$$\hat{x}(\gamma; x, p) = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \left(\frac{s(2p)s(2x)}{s(2\hat{p}(\gamma; x, p))} \frac{W(\gamma; x)}{W(J\gamma; \hat{p}(\gamma; x, p))} \right) \quad (3.36)$$

являются переменными действие–угол. Более конкретно, определяя $\langle \hat{\Omega}, \hat{\omega} \rangle$ согласно (2.24) и далее определяя отображение

$$\Phi(\gamma): \Omega \rightarrow \hat{\Omega}, \quad (x, p) \mapsto (\hat{x}(\gamma; x, p), \hat{p}(\gamma; x, p)), \quad (3.37)$$

получаем следующую теорему, которую мы рассматриваем в качестве главного результата этой работы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\gamma \in P_r$. Тогда отображение $\Phi(\gamma)$, определяемое формулами (3.35)–(3.37), является вещественно-аналитическим каноническим преобразованием на $\hat{\Omega}$ с обратным отображением*

$$\mathcal{E}(\gamma) = I^{-1} \circ \Phi(\hat{\gamma}) \circ I^{-1}, \quad (3.38)$$

где I – отображение отождествления, определенное в (2.27). Более того, выполнены неравенства

$$H(\gamma; x, 0) > 2, \quad \frac{d}{dx} H(\gamma; x, 0) < 0 \quad \forall x \in (0, \infty). \quad (3.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из соотношения

$$\Phi(y) = I \circ \mathcal{D}(\gamma) \quad (3.40)$$

и из лемм 3, 4. Нижняя граница для H следует из (3.25) (ср. (3.5)).

Остается доказать второе неравенство (3.39). Нам надо только показать, что производная не имеет нулей на интервале $(0, \infty)$. (Напомним, что $H(\gamma; x, 0) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +0$.) Для этого рассмотрим x - и p -частные производные функции $c(2\hat{p}(x, p))$

при $p = 0$. Ясно, что последняя обращается в нуль (см. (3.35)). Поскольку $s(2\hat{p})$ положительна на Ω , отсюда следует, что

$$\partial_2 \hat{p}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in (0, \infty). \quad (3.41)$$

Далее, $\Phi(\gamma)$ – диффеоморфизм, поэтому градиент $\hat{p}(x, p)$ не может обращаться в нуль на Ω . Следовательно, мы должны иметь

$$\partial_1 \hat{p}(x, 0) \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty). \quad (3.42)$$

Поэтому $\partial_1 c(2\hat{p}(x, 0))$ не имеет нулей на $(0, \infty)$, и доказательство завершено.

Мы изолировали неравенства (3.39), поскольку их доказательство непосредственно из определений функций W и V_b представляется неосуществимым (ср. (1.5)–(1.10)). (Наоборот, их A_1 -аналоги немедленно следуют из (1.1), (1.2).) В этой связи заметим, что при $\gamma \in P \setminus P_r$ и $p_c(\hat{\gamma}) < 0$ из (3.16), (3.17) следует, что оба неравенства ложны. Действительно, ясно, что в этом случае существует по крайней мере один локальный минимум < 2 , и все точки, для которых $H(\gamma; x, p) < 2$, являются связанными состояниями. Отметим еще, что существование локального максимума $H(\gamma; x_m, 0) > 2$ означало бы, что все точки (x, p) с $x < x_m$ и $H(\gamma; x, p) < H(\gamma; x_m, 0)$ являются связанными состояниями, поскольку они должны оставаться слева от линии $x = x_m$ во все моменты времени. Мы полагаем, что при любом $\gamma \in P$ локальных максимумов не существует.

Возвращаясь к нашему допущению (3.22), можно завершить описание BC_1 -случая, как и в A_1 -случае. Действительно, H -поток действие–угол снова задается формулами (2.34), так что явное решение гамильтоновых уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} c(2x(t)) &= c(2\hat{x} + 8ts(2\hat{p}))W(\hat{\gamma}; \hat{p}) + \frac{V_b(\hat{\gamma}; \hat{p})}{2}, \\ c(2p(t)) &= \frac{c(2\hat{p}) - V_b(\gamma; x(t))/2}{W(\gamma; x(t))}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Отсюда сразу получаем асимптотику на больших временах (2.36), когда $W(\hat{p}) \rightarrow W(\hat{\gamma}; \hat{p})$. Рассеяние поэтому дается сдвигом

$$\delta(\gamma; \hat{p}) = \ln W(J\gamma; \hat{p}). \quad (3.44)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство ключевого тождества (1.15)

Используя (1.8) и (1.9), перепишем функцию M в виде

$$M(\gamma; x, y) = s^2(2x)c^2(2y) - 8c(2y)[p_c c^2(x) - p_s s^2(x)] + \rho(x), \quad (\text{П.1})$$

где

$$\rho(x) = \frac{s^2(2x)}{s^4(x)c^4(x)} \left([p_c c^2(x) - p_s s^2(x)]^2 - \prod_{\mu} [c^2(x) + t_{\mu}] \right), \quad (\text{П.2})$$

$$t_\mu = s^2(i\gamma_\mu). \quad (\text{П.3})$$

Будем двигаться вперед с целью получения более информативной формулы для ρ . Сначала запишем

$$\rho = \frac{4}{v(v-1)}Q(v), \quad v = c^2(x), \quad (\text{П.4})$$

где

$$Q(v) = [(p_c - p_s)v + p_s]^2 - \prod_\mu (v + t_\mu). \quad (\text{П.5})$$

Многочлен четвертой степени $Q(v)$ обращается в нуль при $v = 0$ и $v = 1$, так что ρ – многочлен второй степени по v .

Чтобы вычислить ρ более подробно, положим

$$\Sigma_1(\gamma) = \sum_\mu t_\mu, \quad \Sigma_2(\gamma) = \sum_{\mu_1 < \mu_2} t_{\mu_1} t_{\mu_2}, \quad \Sigma_3(\gamma) = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \mu_3} t_{\mu_1} t_{\mu_2} t_{\mu_3}. \quad (\text{П.6})$$

Тогда имеем

$$Q = v(-v^3 - v^2\Sigma_1 - v(\Sigma_2 - (p_c - p_s)^2) - \Sigma_3 + 2p_s(p_c - p_s)). \quad (\text{П.7})$$

Из $Q(1) = 0$ получаем

$$\Sigma_3 - 2p_s(p_c - p_s) = (p_c - p_s)^2 - 1 - \Sigma_1 - \Sigma_2, \quad (\text{П.8})$$

так что

$$Q = v(v-1)(-v^2 - v(1 + \Sigma_1) + \sigma), \quad (\text{П.9})$$

где мы положили

$$\sigma(\gamma) = (p_c - p_s)^2 - 1 - \Sigma_1 - \Sigma_2. \quad (\text{П.10})$$

В итоге ρ редуцируется к

$$\rho = 4(-c^4(x) - c^2(x)(1 + \Sigma_1) + \sigma). \quad (\text{П.11})$$

Поэтому можно переписать (П.1) в виде

$$\begin{aligned} M(\gamma; x, y) &= s^2(2x)c^2(2y) - 8[2c^2(y) - 1][(p_c - p_s)c^2(x) + p_s] - \\ &\quad - 4c^4(x) - 4c^2(x) - 4c^2(x)\Sigma_1 + 4\sigma = \\ &= s^2(2x)s^2(2y) - 16(p_c - p_s)c^2(y)c^2(x) - 16p_sc^2(y) + \\ &\quad + 8(p_c - p_s)c^2(x) - 8c^2(x) - 4c^2(x)\Sigma_1 + 8p_s + 4\sigma. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Ясно, что это выражение инвариантно относительно замены $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$, $x \leftrightarrow y$ тогда и только тогда, когда⁴⁾

$$p_c - p_s = \hat{p}_c - \hat{p}_s, \quad (\text{П.13})$$

$$-4\hat{p}_s - 2(p_c - p_s) + 2 + \Sigma_1 = 0, \quad (\text{П.14})$$

⁴⁾Заметим, что в самодуальном случае $\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ тождества (П.13) и (П.15) банальны, но (П.14) уже не очевидно.

$$2p_s + \sigma = 2\hat{p}_s + \hat{\sigma}. \quad (\text{П.15})$$

Здесь и ниже используется сокращение $\hat{f}$ для $f(\hat{\gamma})$.

Перейдем к доказательству тождеств (П.13)–(П.15). Для этого используем строки матрицы J (D_4 четные спинорные веса)

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), & r_1 &= \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \\ r_2 &= \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), & r_3 &= \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

и векторы (D_4 нечетные спинорные веса)

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1), & l_1 &= \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1), \\ l_2 &= \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1), & l_3 &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1). \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Ясно, что и $\{r_\mu\}$, и $\{l_\mu\}$ дают ортонормальный базис в $\mathbb{R}^4$. Обозначая канонический базис через $\{e_\mu\}$, имеем

$$\begin{aligned} Jr_\mu &= e_\mu, & Je_\mu &= r_\mu, & \mu &= 0, 1, 2, 3, \\ Jl_0 &= -l_0, & Jl_k &= l_k, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

(Заметим, что J можно рассматривать как отражение относительно l_0 .) Для простоты обозначений используем в дальнейшем вектор параметров $h = i\gamma$.

Чтобы доказать (П.13), сначала запишем

$$\begin{aligned} 16\hat{p}_c &= \sum_{\delta_0, \dots, \delta_3 = +, -} \exp\left(\sum_{\mu} \delta_{\mu} \hat{h}_{\mu}\right) = \sum_{\delta \in \{\pm 1\}^4} e^{\delta \cdot \hat{h}} = \\ &= \sum_{\tau = +, -} \sum_{\mu} (e^{2\tau r_{\mu} \cdot \hat{h}} + e^{2\tau l_{\mu} \cdot \hat{h}}). \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Теперь запишем $\hat{h} = Jh$ и далее используем ортогональность матрицы J и соотношения (П.18); заключаем, что

$$8\hat{p}_c = \sum_{\mu} (c(2h_{\mu}) + c(2l_{\mu} \cdot h)). \quad (\text{П.20})$$

Аналогично сначала получаем

$$16\hat{p}_s = \sum_{\tau = +, -} \sum_{\mu} (e^{2\tau r_{\mu} \cdot \hat{h}} - e^{2\tau l_{\mu} \cdot \hat{h}}) \quad (\text{П.21})$$

и далее заключаем

$$8\hat{p}_s = \sum_{\mu} (c(2h_{\mu}) - c(2l_{\mu} \cdot h)). \quad (\text{П.22})$$

Таким образом, имеем

$$4(\hat{p}_c - \hat{p}_s) = \sum_{\mu} c(2l_{\mu} \cdot h). \quad (\text{П.23})$$

Из (П.20) и (П.22) при $\hat{h} \rightarrow h$ получаем

$$4(p_c - p_s) = \sum_{\mu} c(2l_{\mu} \cdot h). \quad (\text{П.24})$$

Это равно (П.23), откуда следует (П.13).

Обращаясь к (П.14), можно использовать (П.13) для записи его левой части в виде

$$\Lambda = -2(\hat{p}_c + \hat{p}_s) + 2 + \Sigma_1. \quad (\text{П.25})$$

Еще раз используя (П.20) и (П.22), перепишем (П.25) как

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\mu} c(2h_{\mu}) + 2 + \sum_{\mu} t_{\mu}, \quad (\text{П.26})$$

что с очевидностью обращается в нуль (см. (П.3)), откуда следует (П.14).

Остается доказать (П.15). Используя (П.10) и (П.13), видим, что надо только показать, что справедливо равенство

$$2p_s - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 2\hat{p}_s - \hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_2. \quad (\text{П.27})$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\mu} t_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} c(2h_{\mu}) - 2, \\ \Sigma_2 &= \frac{1}{4} \sum_{\mu_1 < \mu_2} [c(2h_{\mu_1}) - 1][c(2h_{\mu_2}) - 1] = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \sum_{\mu} c(2h_{\mu}) + \frac{1}{8} \eta, \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

где мы положили

$$\eta = \sum_{\mu_1 < \mu_2} [c(2h_{\mu_1} + 2h_{\mu_2}) + c(2h_{\mu_1} - 2h_{\mu_2})]. \quad (\text{П.29})$$

Используя также (П.22) при $\hat{h} \rightarrow h$, перепишем левую часть равенства (П.27) в виде

$$L = \frac{1}{4} \sum_{\mu} [c(2r_{\mu} \cdot h) - c(2l_{\mu} \cdot h) + c(2h_{\mu})] + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \eta. \quad (\text{П.30})$$

Полагая $h \rightarrow \hat{h}$ и замечая, что $\hat{h}_{\mu} = r_{\mu} \cdot h$, перепишем правую (П.27) часть в виде

$$R = \frac{1}{4} \sum_{\mu} [c(2h_{\mu}) - c(2l_{\mu} \cdot h) + c(2r_{\mu} \cdot h)] + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \hat{\eta}. \quad (\text{П.31})$$

Сравнивая L и R , заключаем, что остается показать, что $\eta = \hat{\eta}$, т.е. что справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu_1 < \mu_2} [c(2h \cdot (e_{\mu_1} + e_{\mu_2})) + c(2h \cdot (e_{\mu_1} - e_{\mu_2}))] = \\ &= \sum_{\mu_1 < \mu_2} [c(2h \cdot (r_{\mu_1} + r_{\mu_2})) + c(2h \cdot (r_{\mu_1} - r_{\mu_2}))]. \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

Теперь с помощью (П.16) легко убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} r_0 + r_k &= e_0 + e_k, & r_0 - r_k &= e_l + e_m, \\ r_k + r_l &= e_0 - e_m, & r_k - r_l &= e_k - e_l, \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

где $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$. Можно попарно рассмотреть 12 слагаемых в левой и правой частях (П.32) и тем самым проверить (П.32). Таким образом, мы завершили доказательство тождеств (П.13)–(П.15), из которых следует симметричное тождество (1.15).

Список литературы

- [1] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **71**:5 (1981), 313–400.
- [2] S. N. M. Ruijsenaars, “Systems of Calogero–Moser type”, *Particles and Fields* (Banff, Alberta, Canada, 1994), CRM Ser. Math. Phys., eds. G. Semenoff, L. Vinet, Springer, New York, 1999, 251–352.
- [3] V. I. Inozemtsev, *Lett. Math. Phys.*, **17**:1 (1989), 11–17.
- [4] E. d’Hoker, D. H. Phong, *Nucl. Phys. B*, **530**:3 (1998), 537–610.
- [5] A. J. Bordner, E. Corrigan, R. Sasaki, *Progr. Theoret. Phys.*, **102**:3 (1999), 499–529.
- [6] S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.*, **110**:2 (1987), 191–213.
- [7] M. Bruschi, F. Calogero, *Comm. Math. Phys.*, **109**:3 (1987), 481–492.
- [8] S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.*, **115**:1 (1988), 127–165.
- [9] V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov, *JHEP*, **7** (2000), 28.
- [10] R. Askey, J. Wilson, *Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **319**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [11] S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.*, **206**:3 (1999), 639–690.
- [12] S. N. M. Ruijsenaars, *J. Comput. Appl. Math.*, **178**:1–2 (2005), 393–417.
- [13] S. N. M. Ruijsenaars, “Integrable BC_N analytic difference operators: hidden parameter symmetries and eigenfunctions”, *New trends in Integrability and Partial Solvability*, Vol. 132, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., eds. A. B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, L. Martínez Alonso, M. A. Rodríguez, Kluwer, Dordrecht, 2004, 217–261.
- [14] A. Zhedanov, A. Korovnichenko, *J. Phys. A*, **35**:27 (2002), 5767–5780.
- [15] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [16] A. Degasperis, S. N. M. Ruijsenaars, *Ann. Phys.*, **293**:1 (2001), 92–109.