Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Фатеев, А. В. Литвинов, Многоточечные корреляционные функции в лиувиллевской теории поля и минимальной лиувиллевской гравитации, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 536–556

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:12:14

© 2008 г.

В. А. Фатеев^{*,†}, А. В. Литвинов^{*}

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ЛИУВИЛЛЕВСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И МИНИМАЛЬНОЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОЙ ГРАВИТАЦИИ

Исследуются $(n + 3)$ -точечные корреляционные функции экспоненциальных полей в лиувиллевской теории поля с n вырожденными и тремя произвольными полями. Аналитическое выражение для этих корреляционных функций выведено в терминах кулоновских интегралов. Рассмотрено применение этих результатов к минимальной лиувиллевской гравитации.

Ключевые слова: конформная теория поля, интегрируемые модели, теория Лиувилля, некритическая теория струн.

1. ЛИУВИЛЛЕВСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В последнее время после основополагающей статьи Полякова [1] лиувиллевская теория поля (ЛТП) привлекает значительное внимание главным образом из-за ее глубоких связей с теорией бозонных струн в некритической размерности. ЛТП дает пример нерациональной конформной теории поля, которая имеет различные физические применения. Некоторые результаты, полученные в ЛТП и минимальной лиувиллевской гравитации, можно сравнить с результатами матричных моделей [2]–[8]. Для специального набора полей (так называемых вырожденных полей) корреляционные функции в ЛТП просто связаны с корреляционными функциями в минимальных моделях конформной теории поля, которые описывают критическое поведение многих интересных двумерных статистических систем.

Лиувиллевская теория поля описывается локальной плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} (\partial_a \varphi)^2 + \mu e^{2b\varphi} \quad (1.1)$$

с голоморфным тензором энергии–импульса

$$T(z) = -(\partial_z \varphi)^2 + Q \partial_z^2 \varphi,$$

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: litvinov@itp.ac.ru

[†]Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, Université Montpellier 2, Montpellier, France. E-mail: Vladimir.FATEEV@LPTA.univ-montp2.fr

который обеспечивает локальную конформную инвариантность теории с центральным зарядом c_L , параметризованным в терминах константы взаимодействия b как $c_L = 1 + 6Q^2$, где $Q = b + b^{-1}$. Масштабный параметр μ в (1.1) называется *космологической постоянной*.

Основными объектами этой теории являются экспоненциальные поля, параметризованные непрерывным параметром α ,

$$V_\alpha(z, \bar{z}) = e^{2\alpha\varphi}. \quad (1.2)$$

Они являются примарными полями алгебры Вирасоро, порожденной тензором энергии–импульса $T(z)$, с конформной размерностью $\Delta_L(\alpha) = \alpha(Q - \alpha)$. Здесь и далее z – комплексная координата на плоскости: $z = x_1 + ix_2$. Для упрощения обозначений будем записывать примарное поле, определенное равенством (1.2), как $V_\alpha(z)$ и положим $d^2z = dx_1 dx_2$. Важное свойство ЛТП состоит в том, что поля V_α и $V_{Q-\alpha}$ имеют одну и ту же конформную размерность и на самом деле представляют одно и то же конформное поле. Это означает, что они связаны линейным преобразованием

$$V_\alpha = R(\alpha)V_{Q-\alpha} \quad (1.3)$$

с функцией

$$R(\alpha) = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{(Q-2\alpha)/b}}{b^2} \frac{\gamma(2b\alpha - b^2)}{\gamma(2 - 2\alpha/b + 1/b^2)},$$

известной как амплитуда отражения. Здесь и далее мы используем обозначение $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$.

В настоящей работе мы рассматриваем корреляционные функции в ЛТП, содержащие три произвольных и n вырожденных полей. Вырожденные поля в ЛТП соответствуют примарным полям $V_\alpha(z)$ со значениями параметра α , равными¹⁾

$$\alpha = -\frac{mb}{2} - \frac{nb^{-1}}{2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Чтобы сделать все формулы в работе более простыми, мы рассмотрим только случай $n = 0$. Корреляционные функции при $n \neq 0$ имеют более сложный вид, и мы предполагаем рассмотреть их в другой публикации.

Хорошо известно, что четырехточечная корреляционная функция с вырожденным полем $V_{-mb/2}(z)$ в ЛТП удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка $m+1$ по каждой из переменных z и $\bar{z}$ [9]. Явный вид этой функции определяет интегральное представление для решений такого дифференциального уравнения. Корреляционные функции с тремя произвольными полями и более чем с одним вырожденным полем удовлетворяют уже системе дифференциальных уравнений в частных производных, и возможность записать решение этой системы в терминах конечномерных интегралов не очевидна. Решение конформной бутстрапной задачи для этих корреляционных функций в терминах конечномерных кулоновских интегралов является основным результатом данной работы. В случае, когда более трех

¹⁾Равенство (1.4) следует понимать с точностью до преобразования (1.3).

полей являются невырожденными, корреляционная функция содержит бесконечное число конформных блоков и нет оснований ожидать, что ее удастся записать в виде конечномерного интеграла. В данной работе мы выразим многоточечные корреляционные функции через интегралы по всей плоскости. В области сходимости эти интегралы полностью определяют корреляционные функции. Вне этой области их надо понимать в смысле аналитического продолжения. Это продолжение можно выполнить, например, переписывая интегралы по плоскости в терминах контурных интегралов, как это описано в работах [10], [11] (см. также приложение А).

Корреляционные функции в ЛТП с тремя произвольными и m вырожденными полями имеют много различных применений. В ЛТП (или в минимальных моделях конформной теории поля), возмущенной вырожденным полем, они позволяют выразить пертурбативные поправки к трехточечным корреляционным функциям (структурным константам операторного произведения) в терминах конечномерных интегралов. Даже в минимальных моделях конформной теории поля [9], где для всех ненулевых корреляционных функций выполнено условие экранирования, наши результаты дают независимое интегральное представление (которое во многих случаях проще), число интегрирований в котором не зависит от трех произвольных полей. Эти многоточечные корреляционные функции также появляются и играют важную роль при изучении конформной теории поля Тоды. Мы предполагаем обсудить приложения многоточечных корреляционных функций в ЛТП к возмущенным конформным теориям поля и конформным теориям поля Тоды в других публикациях. В разделе 2 мы кратко рассмотрим применение этих функций к минимальной лиувиллевской гравитации.

Многоточечные корреляционные функции в ЛТП являются довольно сложными объектами, однако, как было замечено в работе [12], любая многоточечная корреляционная функция $\langle V_{\alpha_1}(z_1) \dots V_{\alpha_m}(z_m) \rangle$ имеет полюс по переменной

$$\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k,$$

если выполнено условие экранирования $\alpha = Q - nb$, причем вычет выражается в терминах $2n$ -мерного кулоновского интеграла²⁾. А именно,

$$\begin{aligned} \text{res}_{|\alpha=Q-nb} \langle V_{\alpha_1}(z_1) \dots V_{\alpha_m}(z_m) \rangle &= \\ &= (-\pi\mu)^n \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{-4\alpha_i \alpha_j} \int \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m |t_j - z_k|^{-4b\alpha_k} \mathcal{D}_n^{-2b^2}(t) d^2 \vec{t}_n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\mathcal{D}_n(t)$ – квадрат модуля определителя Вандермонда

$$\mathcal{D}_n(t) = \prod_{i < j}^n |t_i - t_j|^2.$$

²⁾Подынтегральное выражение в (1.5) представляет ожидаемое значение полей V_{α_k} с n экранирующими полями $V_b(t_i)$ над вакуумным состоянием безмассового свободного поля.

Далее мы используем обозначение для меры

$$d^2\vec{t}_n = \frac{1}{\pi^n n!} \prod_{k=1}^n d^2 t_k.$$

В случае трех точек интеграл в правой части (1.5) имеет вид³⁾

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{-4b\alpha_1} |t_k - 1|^{-4b\alpha_2} \mathcal{D}_n^{-2b^2}(t) d^2\vec{t}_n. \quad (1.6)$$

Интеграл в (1.6) был вычислен точно в работе [11]. Здесь мы дадим другой, более простой вывод, основанный на интегральном соотношении [13], которое будет использовано в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}_n(y) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+m+1} |y_i - t_j|^{2p_j} d^2\vec{y}_n = \\ = \frac{\prod_j \gamma(1+p_j)}{\gamma(1+n+\sum_j p_j)} \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2+2p_i+2p_j} \times \\ \times \int \mathcal{D}_m(u) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n+m+1} |u_i - t_j|^{-2-2p_j} d^2\vec{u}_m. \end{aligned} \quad (1.7)$$

А именно, следует применить тождество (1.7) справа налево при $m = 0$ и подставить

$$\mathcal{D}_n^{-2b^2}(t) = \mathcal{D}_n(t) \frac{\gamma(-nb^2)}{\gamma^n(-b^2)} \int \mathcal{D}_{n-1}(y) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^n |y_i - t_j|^{-2-2b^2} d^2\vec{y}_{n-1} \quad (1.8)$$

в правую часть (1.6). После этого интеграл по переменным t_j можно вычислить, используя (1.7). Оставшийся интеграл по y_i имеет тот же тип, что и (1.6), но с меньшим числом интегрирований. В результате выводим функциональное соотношение

$$\begin{aligned} I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{\gamma(-nb^2)}{\gamma(-b^2)} \frac{1}{\gamma(2b\alpha_1)\gamma(2b\alpha_2)\gamma(2b\alpha_3 + (n-1)b^2)} I_{n-1}\left(\alpha_1 + \frac{b}{2}, \alpha_2 + \frac{b}{2}, \alpha_3\right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Повторяя эту процедуру n раз, получаем, что

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \prod_{k=1}^n \frac{\gamma(-kb^2)}{\gamma(-b^2)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\gamma(2b\alpha_1 + jb^2)\gamma(2b\alpha_2 + jb^2)\gamma(2b\alpha_3 + jb^2)}.$$

Функциональное соотношение (1.9) можно использовать для продолжения функции $I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на нецелые n (число экранирующих полей V_b). Подставим

$$n = \frac{Q - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{b} \quad (1.10)$$

³⁾Используя проективную инвариантность, можно положить в (1.5) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z_3 = \infty$.

в равенство (1.9) и рассмотрим его как функциональное соотношение для трехточечной функции $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, которая удовлетворяет условию

$$\text{res}_{|\alpha=Q-nb} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \stackrel{\text{def}}{=} (-\pi\mu)^n I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (1.11)$$

Функциональное соотношение (1.9), где n определено в (1.10), вместе с условием (1.11) позволяет найти функцию $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Аналитическое выражение для $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ было предложено в работах [14]–[16]:

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\alpha)/b} \frac{\Upsilon'(0) \prod_{k=1}^3 \Upsilon(2\alpha_k)}{\Upsilon(\alpha - Q) \prod_{k=1}^3 \Upsilon(\alpha - 2\alpha_k)}, \quad (1.12)$$

где $\Upsilon(x)$ – целая функция, самодуальная по отношению к $b \rightarrow b^{-1}$, удовлетворяющая функциональным соотношениям

$$\Upsilon(x + b) = \gamma(bx)b^{1-2bx}\Upsilon(x), \quad \Upsilon(x + b^{-1}) = \gamma(b^{-1}x)b^{2b^{-1}x-1}\Upsilon(x)$$

и определяемая интегралом

$$\ln \Upsilon(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\text{sh}^2(Q/2 - x)(t/2)}{\text{sh}(bt/2) \text{sh}(t/(2b))} \right].$$

Эта функция симметрична, $\Upsilon(x) = \Upsilon(Q - x)$, и имеет нули в точках

$$x = \begin{cases} -mb - nb^{-1}, \\ Q + mb + nb^{-1}, \end{cases} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что функция $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ удовлетворяет соотношению (1.9), где n определяется условием (1.10).

В случае четырех точек корреляционная функция имеет значительно более сложную аналитическую структуру. Однако ситуация упрощается в случае, когда один из параметров $\alpha_k = -mb/2$ при $m = 0, 1, 2, \dots$. Для этих значений параметров поле $V_{-mb/2}(z)$ является вырожденным на уровне $m + 1$, и четырехточечная корреляционная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению одного и того же порядка по каждой переменной z и $\bar{z}$. Это дает основания ожидать, что ее можно представить конечномерным интегралом. Чтобы найти это интегральное представление, начнем со случая, когда выполнено условие

$$-\frac{mb}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + nb = Q, \quad (1.13)$$

т.е. корреляционная функция обладает полюсом по переменной $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ с вычетом

$$\begin{aligned} \text{res}_{|\alpha=Q-nb+mb/2} \langle V_{-mb/2}(z) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle = \\ = (-\pi\mu)^n |z|^{2mb\alpha_1} |z - 1|^{2mb\alpha_2} J_m^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | z), \end{aligned}$$

где

$$J_m^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | z) = \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{-4b\alpha_1} |t_k - 1|^{-4b\alpha_2} |t_k - z|^{2mb^2} \mathcal{D}_n^{-2b^2}(t) d^2 \vec{t}_n, \quad (1.14)$$

а n – число экранирующих полей V_b . Можно уменьшить число интегрирований в (1.14) путем многократного применения соотношения (1.7)⁴⁾. А именно, можно показать [17], что интеграл (1.14) удовлетворяет следующему равенству:

$$J_m^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | z) = \Omega_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) J_n^{(m)}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3 | z),$$

где $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k + (n - m)b/2$,

$$\begin{aligned} \Omega_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\ &= \prod_{k=1}^{n-m} \frac{\gamma(-(k+m)b^2)}{\gamma(-b^2)} \prod_{j=0}^{n-m-1} \frac{1}{\gamma(2b\alpha_1 + jb^2)\gamma(2b\alpha_2 + jb^2)\gamma(2b\alpha_3 + jb^2)}. \end{aligned}$$

Далее, n входит в интеграл $J_n^{(m)}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3 | z)$ как параметр и легко выполнить продолжение на нецелые n , связанные с α формулой (1.13). Продолжение функции $\Omega_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ следует сделать так, чтобы

$$\text{res}_{|\alpha=Q-nb+mb/2} \Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-\pi\mu)^n \Omega_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

В итоге получаем следующее выражение для четырехточечной функции с одним вырожденным полем в ЛТП:

$$\begin{aligned} \langle V_{-mb/2}(z) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle &= \\ &= \Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z|^{2mb\alpha_1} |z - 1|^{2mb\alpha_2} \mathbf{J}_m(A, B, C | z), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{J}_m(A, B, C | z) = \int \prod_{k=1}^m |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} |t_k - z|^{2C} \mathcal{D}_m^{-2b^2}(t) d^2 \vec{t}_m, \quad (1.16)$$

где

$$A = b\left(\alpha - 2\alpha_1 - Q + \frac{mb}{2}\right), \quad B = b\left(\alpha - 2\alpha_2 - Q + \frac{mb}{2}\right), \quad C = b\left(Q + \frac{mb}{2} - \alpha\right),$$

а нормировочная постоянная $\Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ равна

$$\begin{aligned} \Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (-\pi\mu)^m [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\alpha-mb/2)/b} \times \\ &\times \frac{\Upsilon'(-mb) \prod_{k=1}^3 \Upsilon(2\alpha_k)}{\Upsilon(\alpha - Q - mb/2) \prod_{k=1}^3 \Upsilon(\alpha - 2\alpha_k + mb/2)}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

⁴⁾Мы временно предполагаем, что $n \geq m$.

Можно обобщить результаты (1.12) и (1.16) на многоточечные корреляционные функции. Например, для пятиточечной корреляционной функции с двумя вырожденными полями $\langle V_{-(m_1b)/2}(z_1)V_{-(m_2b)/2}(z_2)V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty) \rangle$ можно получить выражение

$$\begin{aligned} & \langle V_{-(m_1b)/2}(z_1)V_{-(m_2b)/2}(z_2)V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty) \rangle = \\ & = \Omega_{m_1m_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z_1|^{2m_1b\alpha_1} |z_1 - 1|^{2m_1b\alpha_2} \times \\ & \quad \times |z_2|^{2m_2b(Q-\alpha_1)} |z_2 - 1|^{2m_2b(Q-\alpha_2)} \times \\ & \quad \times |z_1 - z_2|^{-m_1m_2b^2} \mathbf{J}_{m_1m_2}(A, B, C \mid z_1, z_2), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{m_1m_2}(A, B, C \mid z_1, z_2) = & \mathcal{D}_{m_1}^{-2b^2}(t) \mathcal{D}_{m_2}^{-2b^2}(y) \prod_{j=1}^{m_1} \prod_{k=1}^{m_2} |t_j - y_k|^{2b^2} \times \\ & \times \prod_{j=1}^{m_1} |t_j|^{2A} |t_j - 1|^{2B} |t_j - z_1|^{2C} d^2 \vec{t}_{m_1} \times \\ & \times \prod_{k=1}^{m_2} |y_k|^{-2(1+b^2+A)} |y_k - 1|^{-2(1+b^2+B)} \times \\ & \times |y_k - z_2|^{-2(1-(m_1+m_2-1)b^2+C)} d^2 \vec{y}_{m_2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

при

$$\begin{aligned} A = b \left(\alpha - 2\alpha_1 - Q + \frac{(m_1 - m_2)b}{2} \right), \quad B = b \left(\alpha - 2\alpha_2 - Q + \frac{(m_1 - m_2)b}{2} \right), \\ C = b \left(Q + \frac{(m_1 + m_2)b}{2} - \alpha \right), \end{aligned}$$

а нормировочный множитель $\Omega_{m_1m_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ равен

$$\begin{aligned} \Omega_{m_1m_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = & (-\pi\mu)^{m_1+m_2} \times \\ & \times [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\alpha-(m_1+m_2)b/2)/b} \frac{\Upsilon'(-m_1b)\Upsilon'(-m_2b)}{\Upsilon'(0)} \times \\ & \times \frac{\Upsilon(\alpha - Q + \frac{(m_1-m_2)b}{2})}{\Upsilon(\alpha - Q + \frac{(m_1+m_2)b}{2})\Upsilon(\alpha - Q - \frac{(m_1+m_2)b}{2})} \prod_{k=1}^3 \frac{\Upsilon(2\alpha_k)}{\Upsilon(\alpha - 2\alpha_k + \frac{(m_1-m_2)b}{2})}. \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл для пятиточечной корреляционной функции (1.19) имеет скрытую $sl(3)$ -структуру. А именно, кулоновское взаимодействие между точками t_i и y_j в первых трех членах в (1.19) можно описывать матрицей Картана алгебры Ли $sl(3)$. Интегралы с этим типом кулоновского взаимодействия появляются в конформной теории поля Тоды [18]. Схожая $sl(m+1)$ -структура возникает в кулоновских интегралах для $(m+3)$ -точечной корреляционной функции с тремя произвольными полями.

В принципе возможно найти аналитическое выражение для любой $(k+3)$ -точечной корреляционной функции с k вырожденными и тремя произвольными полями. Для этого достаточно записать интегральное представление для корреляционной функции с m полями $V_{-b/2}$:

$$\langle V_{-b/2}(z_1) \dots V_{-b/2}(z_m) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle, \quad (1.20)$$

так как корреляционную функцию с произвольным числом вырожденных полей можно получить из этой функции, используя свойство слияния

$$V_{-m_1 b/2}(z) V_{-m_2 b/2}(0) = |z|^{-m_1 m_2 b^2} V_{-(m_1+m_2)b/2}(0) + \dots$$

Явное выражение для корреляционной функции (1.20) можно записать в терминах вспомогательной функции (ядра) $K_m^\Delta(t_1, \dots, t_m \mid y_1, \dots, y_m)$, которая является симметричной функцией переменных t_k и y_k и не меняется при перестановке $t_k \leftrightarrow y_k$. Если исходить из явного вида функции $K_m^\Delta(t_1, \dots, t_m \mid y_1, \dots, y_m)$, то последние два свойства не очевидны, но их можно доказать. Эта функция имеет вид $m(m-1)$ -мерного кулоновского интеграла, и представление для нее можно вывести из рекуррентных формул⁵⁾:

$$\begin{aligned} K_m^\Delta(t_1, \dots, t_m \mid y_1, \dots, y_m) &= \frac{\gamma(-mb^2)}{\gamma^m(-b^2)} \mathcal{D}_m^{1+2b^2}(t) \prod_{k=1}^m |t_k - y_1|^{2\Delta} \times \\ &\times \int \mathcal{D}_{m-1}(\tau) \prod_{j=1}^{m-1} |\tau_j - y_1|^{-2\Delta+2b^2} \prod_{k=1}^m |\tau_j - t_k|^{-2-2b^2} \times \\ &\times K_{m-1}^{\Delta+b^2}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1} \mid y_2, \dots, y_m) d^2 \vec{\tau}_{m-1}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Мы даем вывод формулы (1.21) в случаях $m = 1$ и $m = 2$ и описываем общую процедуру для $m > 2$ в приложении Б.

Являясь довольно сложной, эта функция имеет простую квазиклассическую асимптотику при $b \rightarrow 0$, если зафиксировать Δ :

$$K_m^\Delta(t_1, \dots, t_m \mid y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{1}{m!} [|t_1 - y_1|^{2\Delta} |t_2 - y_2|^{2\Delta} \dots |t_m - y_m|^{2\Delta} + \text{symmetrization}].$$

Чтобы пояснить (1.21), сначала приведем три примера. Функция $K_1^\Delta(t \mid y)$ является простейшей, она имеет вид

$$K_1^\Delta(t \mid y) = |t - y|^{2\Delta}. \quad (1.22)$$

Функция $K_2^\Delta(t_1, t_2 \mid y_1, y_2)$ представляется в виде двумерного интеграла:

$$\begin{aligned} K_2^\Delta(t_1, t_2 \mid y_1, y_2) &= \frac{\gamma(-2b^2)}{\gamma^2(-b^2)} |t_1 - t_2|^{2+4b^2} |t_1 - y_1|^{2\Delta} |t_2 - y_1|^{2\Delta} \times \\ &\times \int |\xi - y_1|^{-2\Delta+2b^2} |\xi - y_2|^{2\Delta+2b^2} |\xi - t_1|^{-2-2b^2} |\xi - t_2|^{-2-2b^2} d^2 \vec{\xi}_1. \end{aligned} \quad (1.23)$$

⁵⁾ Чтобы придать смысл этим формулам, мы положили $K_0^\Delta = 1$.

Свойства симметрии ядра (1.23) можно проверить, используя интегральное соотношение (A.2). Функция $K_3^\Delta(t_1, t_2, t_3 \mid y_1, y_2, y_3)$ имеет вид шестимерного кулоновского интеграла:

$$\begin{aligned} K_3^\Delta(t_1, t_2, t_3 \mid y_1, y_2, y_3) &= \frac{\gamma(-2b^2)\gamma(-3b^2)}{\gamma^5(-b^2)} \mathcal{D}_3^{1+2b^2}(t) \prod_{k=1}^3 |t_k - y_1|^{2\Delta} \times \\ &\times \int \mathcal{D}_2^{2+2b^2}(\nu) \prod_{k=1}^2 |\nu_k - y_1|^{-2\Delta+2b^2} |\nu_k - y_2|^{2\Delta+2b^2} \prod_{j=1}^3 |\nu_k - t_j|^{-2-2b^2} d^2 \vec{\nu}_2 \times \\ &\times |\xi - y_2|^{-2\Delta} |\xi - y_3|^{2\Delta+4b^2} |\xi - \nu_1|^{-2-2b^2} |\xi - \nu_2|^{-2-2b^2} d^2 \vec{\xi}_1, \end{aligned}$$

и т.д.

Корреляционную функцию (1.20) можно выразить в терминах ядра (1.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle V_{-b/2}(z_1) \dots V_{-b/2}(z_m) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle &= \\ &= \Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \prod_{k=1}^m |z_k|^{2b\alpha_1} |z_k - 1|^{2b\alpha_2} \times \\ &\times \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{-b^2} \int \prod_{k=1}^m |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} \times \\ &\times K_m^C(t_1, \dots, t_m \mid z_1, \dots, z_m) \mathcal{D}_m^{-2b^2}(t) d^2 \vec{t}_m, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$A = b \left(\alpha - 2\alpha_1 - Q + \frac{mb}{2} \right), \quad B = b \left(\alpha - 2\alpha_2 - Q + \frac{mb}{2} \right), \quad C = b \left(Q + \frac{(2-m)b}{2} - \alpha \right),$$

а нормировочный множитель $\Omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ имеет вид (1.17).

Ядро (1.21), несмотря на его сложный вид, имеет много замечательных свойств, которые позволяют получать корреляционные функции для высших вырожденных полей $V_{-mb/2}$. Например, оно имеет очень простую асимптотику при $y_k \rightarrow z$:

$$K_m^\Delta(t_1, \dots, t_m \mid z, \dots, z) = \prod_{k=1}^m |t_k - z|^{2\Delta+2(m-1)b^2}. \quad (1.25)$$

Используя (1.25), из (1.24) можно получить представление (1.15) для четырехточечной функции. Другое важное свойство ядра (1.21) выражается равенством (A.3). Если рассмотреть $2m$ -мерный интеграл (1.24) при $m = m_1 + m_2$ и “факторизовать” его, используя (A.3), на $2m_1$ - и $2m_2$ -мерные интегралы, то, применяя (1.25), получаем выражение для пятиточечной корреляционной функции (1.18).

2. МИНИМАЛЬНАЯ ЛИУВИЛЛЕВСКАЯ ГРАВИТАЦИЯ

В данном разделе мы рассмотрим минимальную лиувиллевскую гравитацию, где материальная часть теории описывается обобщенной минимальной моделью (ОММ)

конформной теории поля [4] с центральным зарядом $c_M = 1 - 6(b - b^{-1})^2$, взаимодействующей с ЛТП таким образом, что $c_L + c_M = 26$. ОММ включает континуальное число примарных полей Φ_α с конформными размерностями $\Delta_M(\alpha) = \alpha(\alpha + b - b^{-1})$. Многоточечные корреляционные функции этих полей обладают интегральными представлениями, если выполнено условие экранирования полей материи, т.е.

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k - nb = b^{-1} - b. \quad (2.1)$$

Тогда⁶⁾

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\alpha_1}(z_1) \dots \Phi_{\alpha_m}(z_m) \rangle &= \frac{1}{N(b^{-1} - b)} \prod_{k=1}^m N(\alpha_k) \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j} \times \\ &\times \int \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m |t_j - z_k|^{-4b\alpha_k} \mathcal{D}_n^{2b^2}(t) d^2 \vec{t}_n, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где нормировочный множитель

$$N(\alpha) = (-\gamma(-b^2))^{-\alpha/b} \left[\frac{\gamma(2b^{-1}\alpha - b^{-2} + 2)}{\gamma(2b\alpha + b^2)} \frac{\gamma(b^2)}{\gamma(2 - b^{-2})} \right]^{1/2}$$

выбран так, что

$$\langle \Phi_\alpha(z) \Phi_\alpha(z') \rangle = |z - z'|^{-4\Delta_M(\alpha)}.$$

Одной из главных задач в минимальной лиувиллевской гравитации является вычисление корреляционных функций операторов $U_\alpha = \Phi_{\alpha-b} V_\alpha$, которые имеют конформную размерность $\Delta_L(\alpha) + \Delta_M(\alpha - b) = 1$, а потому (1, 1)-форму $U_\alpha(z) d^2 z$ можно интегрировать инвариантным образом. Проинтегрированные n -точечные корреляционные функции являются инвариантными объектами, зависящими только от параметров α_k . Из-за группы диффеоморфизмов $SL(2, C)$, которая является симметрией теории, число интегрирований в $(m+3)$ -точечной корреляционной функции можно свести к m . А именно, можно фиксировать координаты любых трех полей в точках 0, 1 и ∞ . Таким образом, корреляционная функция (или, более правильно, корреляционное число) проинтегрированных операторов U_α можно определить как

$$\begin{aligned} \langle \langle U_{\alpha_1} \dots U_{\alpha_{m+3}} \rangle \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_L} \int \langle V_{\alpha_1}(z_1) \dots V_{\alpha_m}(z_m) V_{\alpha_{m+1}}(0) V_{\alpha_{m+2}}(1) V_{\alpha_{m+3}}(\infty) \rangle \times \\ &\times \langle \Phi_{\alpha_1-b}(z_1) \dots \Phi_{\alpha_m-b}(z_m) \Phi_{\alpha_{m+1}-b}(0) \times \\ &\times \Phi_{\alpha_{m+2}-b}(1) \Phi_{\alpha_{m+3}-b}(\infty) \rangle d^2 z_1 \dots d^2 z_m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Z_L – лиувиллевская статсумма [4]

$$Z_L = (\pi\mu\gamma(b^2))^{Q/b} \frac{1 - b^2}{\pi^3 \gamma(b^2) \gamma(b^{-2}) Q}.$$

⁶⁾Заметим, что центральный заряд c_M , конформную размерность $\Delta_M(\alpha)$, условие экранирования (2.1) и корреляционную функцию (2.2) (с точностью до нормировки) можно вывести из соответствующих величин в ЛТП подстановкой $b \rightarrow -ib$ и $\alpha_k \rightarrow i\alpha_k$.

Трехточечная корреляционная функция полей U_{α_k} не содержит интегралов и имеет простой факторизованный вид [4]

$$\langle\langle U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle = b^{-2}(b^{-4} - 1) \prod_{k=1}^3 \mathcal{N}(\alpha_k), \quad (2.4)$$

где мы ввели так называемые leg-множители [5], [6]

$$\mathcal{N}(\alpha) = \pi(\pi\mu\gamma(b^2))^{-\alpha/b} \left[\frac{\gamma(2b\alpha - b^2)\gamma(2b^{-1}\alpha - b^{-2})}{\gamma(1 - b^2)\gamma(2 - b^{-2})} \right]^{1/2}.$$

Четырехточечная функция (2.3) содержит одно интегрирование по z . Рассмотрим специальную четырехточечную функцию

$$\langle\langle U_{-mb/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle, \quad (2.5)$$

которая содержит одно вырожденное лиувиллевское поле $V_{-mb/2}$, а потому лиувиллевская часть корреляционной функции довольно проста и представима интегралом (1.16). Однако материальная часть этой корреляционной функции остается сложной. Чтобы упростить ее, предположим, что в материальном секторе выполнено условие экранирования

$$-\frac{mb}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 4b - nb = b^{-1} - b. \quad (2.6)$$

Тогда в силу (2.2) материальная часть корреляционной функции выражается через $2n$ -мерный кулоновский интеграл. При этих двух допущениях корреляционную функцию (2.5) можно выразить в терминах $2(n+m+1)$ -мерного интеграла (с точностью до числовых множителей, которые возникают из (1.15) и (2.2)):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \int \mathcal{D}_m^{-2b^2}(t) \mathcal{D}_n^{2b^2}(\xi) \times \\ &\times \prod_{j=1}^m |t_j|^{2(m+n+2)b^2-4b\alpha_1} |t_j - 1|^{2(m+n+2)b^2-4b\alpha_2} |t_j - z|^{-2(n+2)b^2} \times \\ &\times |z|^{2(m+2)b^2-4b\alpha_1} |z - 1|^{2(m+2)b^2-4b\alpha_2} \times \\ &\times |\xi_j|^{-4b(\alpha_1-b)} |\xi_j - 1|^{-4b(\alpha_2-b)} |\xi_j - z|^{2(m+2)b^2} d^2 \vec{t}_m d^2 \vec{\xi}_n d^2 z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Интеграл (2.7) имеет очень простую структуру полюсов по каждой из переменных α_i и может быть вычислен точно (см. [17]):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \pi(m+1)(n+1) \prod_{j=1}^{m+1} \frac{\gamma(-jb^2)}{\gamma(-b^2)} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma(jb^2)}{\gamma(b^2)} \times \\ &\times \prod_{j=2}^{m+n+2} [\gamma(2b\alpha_1 - jb^2)\gamma(2b\alpha_2 - jb^2)\gamma(2b\alpha_3 - jb^2)]^{-1}. \end{aligned}$$

Собирая все нормировочные множители, полученные из равенств (1.15) и (2.2), приходим к окончательному простому результату:

$$\langle \langle U_{-mb/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle \rangle = b^{-2} (b^{-4} - 1) \prod_{k=1}^4 \mathcal{N}(\alpha_k) (m+1)(n+1), \quad (2.8)$$

где $\alpha_4 = -mb/2$. Формула (2.8) верна в области сходимости интеграла (2.7):

$$Q + b < \sum_{k=1}^4 \alpha_k < 2Q - mb, \quad \frac{(m+1)b}{2} < \alpha_j < \frac{Q}{2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

В этой области можно выразить число экранирующих полей n из равенства (2.6).

Пятиточечная функция (2.3) имеет два интегрирования по переменным z_1 и z_2 . Рассмотрим специальную корреляционную функцию, которая содержит два вырожденных лиувиллевских поля

$$\langle \langle U_{-m_1 b/2} U_{-m_2 b/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle \rangle \quad (2.9)$$

и снова предположим, что в материальном секторе имеется условие экранирования

$$- \frac{m_1 b}{2} - \frac{m_2 b}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 5b - nb = b^{-1} - b. \quad (2.10)$$

Тогда корреляционную функцию (2.9) можно выразить в терминах $2(m_1 + m_2 + n + 2)$ -мерного интеграла (с точностью до числовых множителей, которые мы получили из (1.18) и (2.2)):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{m_1 m_2}^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \int \mathbf{J}_{m_1 m_2}(A, B, C \mid z_1, z_2) |z_1|^{2(m_1+2)b^2-4b\alpha_1} |z_1 - 1|^{2(m_1+2)b^2-4b\alpha_2} \times \\ &\times |z_2|^{-2+2(m_2+1)(1+2b^2-2b\alpha_1)} |z_2 - 1|^{-2+2(m_2+1)(1+2b^2-2b\alpha_2)} |z_1 - z_2|^{2(m_1+m_2+2)b^2} \times \\ &\times \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{-4b(\alpha_1-b)} |\xi_j - 1|^{-4b(\alpha_2-b)} |\xi_j - z_1|^{2(m_1+2)b^2} \times \\ &\times |\xi_j - z_2|^{2(m_2+2)b^2} \mathcal{D}_n^{2b^2}(\xi) d^2 \vec{\xi}_n d^2 z_1 d^2 z_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функция $\mathbf{J}_{m_1 m_2}(A, B, C \mid z_1, z_2)$ задается равенством (1.19) при

$$A = (m_1 + n + 3)b^2 - 2b\alpha_1, \quad B = (m_1 + n + 3)b^2 - 2b\alpha_2, \quad C = -(n + 3)b^2.$$

Этот интеграл как функция параметров α_i также имеет простую структуру полюсов и может быть вычислен точно:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{m_1 m_2}^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \prod_{j=1}^{m_1+1} \frac{\gamma(-jb^2)}{\gamma(-b^2)} \prod_{j=1}^{m_2+1} \frac{\gamma(-jb^2)}{\gamma(-b^2)} \prod_{j=1}^{n+2} \frac{\gamma(jb^2)}{\gamma(b^2)} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{m_2} \gamma((m_1 + n + 2 + j)b^2) \times \\ &\times \prod_{j=2}^{m_1+n+3} [\gamma(2b\alpha_1 - jb^2) \gamma(2b\alpha_2 - jb^2) \gamma(2b\alpha_3 - jb^2)]^{-1}. \end{aligned}$$

Собирая все необходимые множители, получаем простой результат для пятиточечной корреляционной функции

$$\begin{aligned} \langle\langle U_{-m_1 b/2} U_{-m_2 b/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle = \\ = b^{-2}(b^{-4} - 1) \prod_{k=1}^5 \mathcal{N}(\alpha_k)(m_1 + 1)(m_2 + 1)(n + 1)(n + 2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\alpha_4 = -m_1 b/2$ и $\alpha_5 = -m_2 b/2$. Представление (2.12) справедливо в области сходимости интеграла (2.11):

$$Q + 2b < \sum_{k=1}^5 \alpha_k < 2Q - (m_1 + m_2)b, \quad \frac{(m_1 + m_2 + 1)b}{2} < \alpha_j < \frac{Q}{2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Равенства (2.4), (2.8) и (2.12) легко обобщить. Рассмотрим $(k + 3)$ -точечную корреляционную функцию с k вырожденными лиувиллевскими полями

$$\langle\langle U_{-m_1 b/2} \dots U_{-m_k b/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle$$

и предположим, что в материальном секторе имеется условие экранирования (ср. с равенствами (2.6) и (2.10))

$$-\frac{m_1 b}{2} - \dots - \frac{m_k b}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (k + 3)b - nb = b^{-1} - b.$$

Можно ожидать, что существует область в пространстве параметров α_k , в которой соотношения (2.4), (2.8) и (2.12) допускают непосредственное обобщение

$$\langle\langle U_{-m_1 b/2} \dots U_{-m_k b/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle = b^{-2}(b^{-4} - 1) \prod_{j=1}^{k+3} \mathcal{N}(\alpha_j) \prod_{j=1}^k (m_j + 1)(n + j),$$

где $\alpha_{j+3} = -m_j b/2$.

Все результаты данной работы можно переписать в “двойственном” случае, когда рассматривается $(k + 3)$ -точечная корреляционная функция с k вырожденными материальными полями $\Phi_{m_j b/2}$, т.е. коррелятор

$$\langle\langle U_{(m_1+2)b/2} \dots U_{(m_k+2)b/2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} U_{\alpha_3} \rangle\rangle, \quad (2.13)$$

и предполагается, что в лиувиллевском секторе выполнено условие экранирования

$$\frac{m_1 b}{2} + \dots + \frac{m_k b}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + kb + nb = b + b^{-1},$$

т.е. лиувиллевская часть корреляционной функции (2.13) имеет вид $2n$ -мерного интеграла в силу (1.5). В этом случае материальную часть корреляционной функции (2.13)

$$\langle\Phi_{m_1 b/2} \dots \Phi_{m_k b/2} \Phi_{\alpha_1 - b} \Phi_{\alpha_2 - b} \Phi_{\alpha_3 - b}\rangle \quad (2.14)$$

можно представить интегралами, подобными полученным в разделе 1 для ЛТП. А именно, интегралы для $(k+3)$ -точечной корреляционной функции в ОММ с k вырожденными полями $\Phi_{m_j b/2}$ и тремя произвольными полями Φ_{α_j} можно получить заменой $\alpha_j \rightarrow i\alpha_j$ и $b \rightarrow -ib$ в интегралах для $(k+3)$ -точечной функции в ЛТП с k вырожденными и тремя произвольными полями V_{α_j} (заметим, что в корреляционной функции (2.14) параметры α_j сдвинуты: $\alpha_j \rightarrow \alpha_j - b$). Однако общий численный множитель дается другим выражением. Этот множитель в случае четырехточечной корреляционной функции можно найти в работе [17], где рассмотрена четырехточечная корреляционная функция (2.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Полезные интегральные тождества

В этом приложении мы приведем без доказательства полезное интегральное соотношение, которое позволяет существенно уменьшить число интегрирований в корреляционной функции (1.24) и помогает упростить вычисление корреляционных функций.

Обобщение соотношения (1.7). Вместо соотношения (1.7) иногда удобнее использовать соотношение

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}_n(y) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+m+2} |y_i - t_j|^{2p_j} d^2 \vec{y}_n &= \prod_{j=1}^{n+m+2} \gamma(1+p_j) \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2+2p_i+2p_j} \times \\ &\times \int \mathcal{D}_m(u) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n+m+2} |u_i - t_j|^{-2-2p_j} d^2 \vec{u}_m, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где $\sum p_k = -n - 1$.

Оно обобщает хорошо известное соотношение звезда–треугольник, которое отвечает случаю $m = 0$ и $n = 1$. Уравнение для асимптотики (1.25) ядра (1.21) легко получить последовательным применением этого соотношения. Это же соотношение помогает определить процедуру слияния в корреляционной функции (1.24).

Следующее тождество можно использовать для доказательства свойств симметрии ядра (1.23):

$$\begin{aligned} \int |t - \xi_1|^{2p_1} |t - \xi_2|^{2p_2} |t - \xi_3|^{2p_3} |t - \xi_4|^{2p_4} d^2 t &= \\ &= \prod_{k=1}^4 \gamma(1+p_k) |\xi_1 - \xi_2|^{2+2p_1+2p_2} |\xi_3 - \xi_4|^{2+2p_3+2p_4} \times \\ &\times \int |s - \xi_1|^{-2-2p_2} |s - \xi_2|^{-2-2p_1} |s - \xi_3|^{-2-2p_4} |s - \xi_4|^{-2-2p_3} d^2 s, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где $\sum p_k = -2$. Это тождество можно применить к любым двум парам точек ξ_j (в (A.2) они выбраны как ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4). Применяя его три раза, получаем соотношение (A.1) при $m = 1$ и $n = 1$.

Свойство факторизации интеграла (1.24). Имеет место следующее свойство интеграла (1.24):

$$\begin{aligned}
 & \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} K_n^\Delta(t_1, \dots, t_n \mid z_1, \dots, z_n) \mathcal{D}_n^{2g}(t) d^2 \vec{t}_n = \\
 & = \Lambda_k(A, B, \Delta) \prod_{j=n-k+1}^n |z_j|^{2(1+A+\Delta)} |z_j - 1|^{2(1+B+\Delta)} \times \\
 & \quad \times \int \prod_{j=1}^{n-k} |t_j|^{2(A+kg)} |t_j - 1|^{2(B+kg)} K_{n-k}^{\Delta-kg}(t_1, \dots, t_{n-k} \mid z_1, \dots, z_{n-k}) \times \\
 & \quad \times \mathcal{D}_{n-k}^{2g}(t) d^2 \vec{t}_{n-k} \prod_{i,j} |t_i - y_j|^{-2g} \times \\
 & \quad \times \prod_{j=1}^k |y_j|^{-2(1+A+(k-1)g)} |y_j - 1|^{-2(1+A+(k-1)g)} \times \\
 & \quad \times K_k^{-1-\Delta+(k-1)g}(y_1, \dots, y_k \mid z_{n-k+1}, \dots, z_n) \mathcal{D}_k^{2g}(y) d^2 \vec{y}_k, \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_k(A, B, \Delta) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma((n-j)g) \gamma(1+A+jg) \gamma(1+B+jg) \gamma(1+\Delta-jg)}{\gamma((j+1)g) \gamma(2+A+B+\Delta+(m-1-j)g)}.$$

Это свойство позволяет существенно уменьшить число интегрирований в корреляционной функции

$$\langle V_{-m_1 b/2}(z_1) \dots V_{-m_k b/2}(z_k) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle. \tag{A.4}$$

Предположим, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$. Тогда, используя свойство факторизации (A.3) и соотношение (A.1), можно показать, что число интегрирований N в корреляционной функции (A.4) можно уменьшить до

$$\frac{N}{2} = \sum_{j=1}^{[k/2]} j(m_{2j} + m_{2j-1}) + \frac{m_k(k+1)}{4} (1 - (-1)^k). \tag{A.5}$$

В частности, при $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1$ число интегрирований (A.5) в корреляционной функции (A.4) равно

$$N = \frac{k(k+2)}{2} + \frac{1}{4} (1 - (-1)^k).$$

Заметим, что число интегрирований в выражении (1.24) для этой корреляционной функции равно $k(k+1)$.

Аналитические свойства интеграла (1.16). Удобно рассмотреть более общий интеграл (интеграл (1.16) соответствует выбору $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = z$, $p_1 = A$, $p_2 = B$, $p_3 = C$ и $g = -b^2$):

$$\mathbf{J}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int \prod_{k=1}^m |t_k - \xi_1|^{2p_1} |t_k - \xi_2|^{2p_2} |t_k - \xi_3|^{2p_3} \mathcal{D}_m^{2g}(t) d^2 \vec{t}_m.$$

Этот интеграл удовлетворяет следующим замечательным соотношениям, которые можно использовать для аналитического продолжения $\mathbf{J}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ как функции параметров p_1 , p_2 и p_3 . А именно, для любой пары точек ξ_j (например, ξ_1 и ξ_2) имеем

$$\mathbf{J}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_m(p_1, p_2, p_3) |\xi_1 - \xi_2|^{2m(1+p_1+p_2+(m-1)g)} \times \\ \times \mathbf{J}_m(-1-p_2-(m-1)g, -1-p_1-(m-1)g, -1-p_3-(m-1)g \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (\text{A.6})$$

где

$$G_m(p_1, p_2, p_3) = \prod_{j=0}^{m-1} \gamma(1+p_1+jg)\gamma(1+p_2+jg)\gamma(1+p_3+jg)\gamma(1+p_4+jg)$$

и $p_4 = -2 - p_1 - p_2 - p_3 - 2(m-1)g$. Применяя это соотношение три раза, получаем

$$\mathbf{J}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_m(p_1, p_2, p_3) \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{2m(1+p_i+p_j+(m-1)g)} \times \\ \times \mathbf{J}_m(-1-p_1-(m-1)g, -1-p_2-(m-1)g, -1-p_3-(m-1)g \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (\text{A.7})$$

Рассматривая аналитические свойства левой и правой частей в (A.6) и (A.7), можно заключить, что функция

$$\tilde{\mathbf{J}}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \prod_{k=1}^4 \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma^{-1}(1+p_k+jg) \mathbf{J}_m(p_1, p_2, p_3 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

является целой функцией параметров p_1 , p_2 и p_3 для всех конечных и несовпадающих точек ξ_k . Подобные, но более сложные соотношения можно получить и для интеграла (1.19).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вычисление ядра

В данном приложении мы дадим некоторые указания по поводу доказательства формулы (1.24). Ход рассуждений тот же, что и при выводе трехточечной корреляционной функции в разделе 1. Начнем с корреляционной функции

$$\langle V_{-b/2}(z_1) \dots V_{-b/2}(z_m) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle$$

и предположим, что выполнено условие экранирования, т.е.

$$-\frac{mb}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + nb = Q. \quad (\text{B.1})$$

С помощью (1.5) эта корреляционная функция выражается через $2n$ -мерный кулоновский интеграл

$$\mathfrak{J}_m^{(n)}(A, B \mid z_1, \dots, z_m) = \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} \prod_{j=1}^m |t_k - z_j|^{-2g} \mathcal{D}_n^{2g}(t) d^2 \vec{t}_n, \quad (\text{B.2})$$

где для краткости мы положили $A = -2b\alpha_1$, $B = -2b\alpha_2$, $g = -b^2$. Основная идея состоит в применении тождества (1.7) несколько раз и в сведении интеграла (Б.2) к другому интегралу с числом интегрирований, не зависящим от числа экранирующих полей n (зависимость от n появляется в этом интеграле как параметр). После этого можно продолжить данный интеграл на нецелые значения n , выражая n из (Б.1).

Покажем, как такой подход работает для случаев четырех- и пятиточечных корреляционных функций. Далее в данном приложении мы многократно используем тождество (1.7), опуская для краткости несущественные множители, состоящие из γ -функций⁷⁾.

Четырехточечная функция. В случае четырехточечной функции имеем интеграл

$$\mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) = \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} |t_k - z|^{-2g} \mathcal{D}_n^{2g}(t) d^2 \vec{t}_n. \quad (\text{Б.3})$$

Для начала используем тождество (1.7) справа налево и подставим

$$\mathcal{D}_n^{2g}(t) \sim \mathcal{D}_n(t) \int \mathcal{D}_{n-1}(y) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^n |y_i - t_j|^{-2+2g} d^2 \vec{y}_{n-1} \quad (\text{Б.4})$$

в (Б.3). Здесь и ниже знак “ $\sim$ ” означает, что опущены несущественные числовые множители (ср. с (1.8), где такой множитель приведен в явном виде). После этого, снова используя тождество (1.7), можно проинтегрировать по переменным t_k и преобразовать этот интеграл в двумерный интеграл по вспомогательной переменной ξ :

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{2A} |t_k - 1|^{2B} |t_k - z|^{-2g} \prod_{j=1}^{n-1} |t_k - y_j|^{-2+2g} \mathcal{D}_n(t) d^2 \vec{t}_n \sim \\ \sim |z|^{2(1+A-g)} |z - 1|^{2(1+B-g)} \prod_{k=1}^{n-1} |y_k|^{2(A+g)} |y_k - 1|^{2(B+g)} \mathcal{D}_{n-1}^{2g-1}(y) \times \\ \times \int |\xi|^{-2-2A} |\xi - 1|^{-2-2B} |\xi - z|^{-2+2g} \prod_{j=1}^{n-1} |\xi - y_j|^{-2g} d^2 \xi. \end{aligned}$$

В результате получаем следующее соотношение между интегралами $\mathfrak{J}_1^{(n)}$ и $\mathfrak{J}_1^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) \sim |z|^{2(1+A-g)} |z - 1|^{2(1+B-g)} \times \\ \times \int |\xi|^{-2(1+A)} |\xi - 1|^{-2(1+B)} |\xi - z|^{-2+2g} \mathfrak{J}_1^{(n-1)}(A+g, B+g | \xi) d^2 \xi. \quad (\text{Б.5}) \end{aligned}$$

Снова применяя соотношение (Б.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) \sim |z|^{2(1+A-g)} |z - 1|^{2(1+B-g)} \times \\ \times \int |\xi - z|^{-2+2g} |\nu|^{-2(1+A+g)} |\nu - 1|^{-2(1+B+g)} |\nu - \xi|^{-2+2g} \times \\ \times \mathfrak{J}_1^{(n-2)}(A+2g, B+2g | \nu) d^2 \xi d^2 \nu. \end{aligned}$$

⁷⁾ Эти множители легко восстановить в окончательном ответе исходя из общих принципов.

Интеграл по $d^2\xi$ легко вычислить: с точностью до тривиального множителя он равен $|\nu - z|^{-2+4g}$. В результате получаем следующее соотношение между интегралами $\mathfrak{J}_1^{(n)}$ и $\mathfrak{J}_1^{(n-2)}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) &\sim |z|^{2(1+A-g)} |z-1|^{2(1+B-g)} \times \\ &\times \int |\nu|^{-2(1+A+g)} |\nu-1|^{-2(1+B+g)} |\nu-z|^{-2+4g} \times \\ &\times \mathfrak{J}_1^{(n-2)}(A+2g, B+2g | \nu) d^2\nu. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Вместо уравнений (Б.5) и (Б.6) после применения этой процедуры k раз получаем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) &\sim |z|^{2(1+A-g)} |z-1|^{2(1+B-g)} \times \\ &\times \int |\nu|^{-2(1+A+(k-1)g)} |\nu-1|^{-2(1+B+(k-1)g)} |\nu-z|^{-2+2kg} \times \\ &\times \mathfrak{J}_1^{(n-k)}(A+kg, B+kg | \nu) d^2\nu. \end{aligned}$$

В частности, при $k = n$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) &\sim |z|^{2(1+A-g)} |z-1|^{2(1+B-g)} \times \\ &\times \int |\nu|^{-2(1+A+(n-1)g)} |\nu-1|^{-2(1+B+(n-1)g)} |\nu-z|^{-2+2ng} d^2\nu \sim \\ &\sim \int |\tau|^{2(A+(n-1)g)} |\tau-1|^{2(B+(n-1)g)} |\tau-z|^{-2ng} d^2\tau, \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

где в последней строке мы преобразовали интеграл по переменной ν , используя тождество (1.7). Интеграл (Б.7) можно переписать, используя определение ядра (1.22) в виде

$$\mathfrak{J}_1^{(n)}(A, B | z) \sim \int |\tau|^{2(A+(n-1)g)} |\tau-1|^{2(B+(n-1)g)} K_1^{-ng}(\tau | z) d^2\tau. \quad (\text{Б.8})$$

Полный множитель в (Б.8) можно получить, полагая $z = 0$.

Пятиточечная функция. Рассмотрим теперь интеграл для пятиточечной функции

$$\mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B | z_1, z_2) = \int \prod_{k=1}^n |t_k|^{2A} |t_k-1|^{2B} |t_k-z_1|^{-2g} |t_k-z_2|^{-2g} \mathcal{D}_n^{2g}(t) d^2\vec{t}_n. \quad (\text{Б.9})$$

Подставляя $\mathcal{D}_n^{2g}(t)$ в (Б.9) в виде (Б.4) и интегрируя по переменным t_k с использованием (1.7), найдем следующее соотношение между интегралами $\mathfrak{J}_2^{(n)}$ и $\mathfrak{J}_2^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B | z_1, z_2) &\sim \prod_{k=1}^2 |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k-1|^{2(1+B-g)} |z_1-z_2|^{2-4g} \times \\ &\times \int \prod_{j=1}^2 |\xi_j|^{-2(1+A)} |\xi_j-1|^{-2(1+B)} |\xi_j-z_1|^{-2+2g} |\xi_j-z_2|^{-2+2g} \times \end{aligned}$$

$$\times \mathfrak{J}_2^{(n-1)}(A+g, B+g \mid \xi_1, \xi_2) \mathcal{D}_2(\xi) d^2 \vec{\xi}_2. \quad (\text{Б.10})$$

Применяя соотношение (Б.10) дважды, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) &\sim \prod_{k=1}^2 |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k - 1|^{2(1+B-g)} |z_1 - z_2|^{2-4g} \times \\ &\times \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{-2(1+A+g)} |\nu_j - 1|^{-2(1+B+g)} \times \\ &\times \mathfrak{J}_2^{(n-2)}(A+2g, B+2g \mid \nu_1, \nu_2) \mathcal{D}_2(\nu) d^2 \vec{\nu}_2 \times \\ &\times \prod_{k=1}^2 |\xi_k - \nu_1|^{-2+2g} |\xi_k - \nu_2|^{-2+2g} |\xi_k - z_1|^{-2+2g} |\xi_k - z_2|^{-2+2g} \times \\ &\times \mathcal{D}_2^{2-2g}(\xi) d^2 \vec{\xi}_2. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Интеграл по $d^2 \vec{\xi}_2$ в формуле (Б.11) можно свести к двумерному интегралу, используя следующее тождество⁸⁾, которое можно вывести с помощью (1.7) и (А.1):

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=1}^2 |\xi_k - \nu_1|^{-2+2g} |\xi_k - \nu_2|^{-2+2g} |\xi_k - z_1|^{-2+2g} |\xi_k - z_2|^{-2+2g} \mathcal{D}_2^{2-2g}(\xi) d^2 \xi_1 d^2 \xi_2 = \\ = 2\pi \frac{\gamma^5(g) \gamma(2-3g)}{\gamma(2g)} |\nu_1 - \nu_2|^{4g-2} |\nu_1 - z_1|^{4g-2} |\nu_2 - z_1|^{4g-2} \times \\ \times \int |y - z_1|^{-2g} |y - z_2|^{6g-4} |y - \nu_1|^{-2g} |y - \nu_2|^{-2g} d^2 y. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

В результате применения тождества (Б.12) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) &\sim \prod_{k=1}^2 |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k - 1|^{2(1+B-g)} |z_1 - z_2|^{2-4g} \times \\ &\times \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{-2(1+A+g)} |\nu_j - 1|^{-2(1+B+g)} |\nu_j - z_1|^{4g-2} \times \\ &\times \mathfrak{J}_2^{(n-2)}(A+2g, B+2g \mid \nu_1, \nu_2) \mathcal{D}_2^{2g}(\nu) d^2 \vec{\nu}_2 \times \\ &\times |y - z_1|^{-2g} |y - z_2|^{6g-4} |y - \nu_1|^{-2g} |y - \nu_2|^{-2g} d^2 y. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Равенство (Б.13) теперь “стабилизировано”. Это означает, что после применения соотношения (Б.10) можно выполнить вспомогательные интегрирования, а остающийся интеграл имеет аналогичный вид, и только параметры в подынтегральном выражении изменяются:

$$\mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) \sim \prod_{k=1}^2 |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k - 1|^{2(1+B-g)} |z_1 - z_2|^{2-4g} \times$$

⁸⁾ Это простое интегральное тождество отражает, в частности, интересный факт, что четырехточечная корреляционная функция полей $\Phi_{b/2}$ в ОММ с центральным зарядом $c = 1 - 6(b - b^{-1})^2$ (интеграл в правой части (Б.12)) совпадает с точностью до тривиального множителя с четырехточечной корреляционной функцией полей $\Phi_{b'/2}$ в другой ОММ с центральным зарядом c' , соответствующим параметру $b'^2 = 1 - b^2$ (интеграл в левой части (Б.12)).

$$\begin{aligned}
& \times \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{-2(1+A+2g)} |\nu_j - 1|^{-2(1+B+2g)} |\nu_j - z_1|^{6g-2} \times \\
& \times \mathfrak{J}_2^{(n-3)}(A+3g, B+3g \mid \nu_1, \nu_2) \mathcal{D}_2^{2g}(\nu) d^2 \vec{\nu}_2 \times \\
& \times |y - z_1|^{-4g} |y - z_2|^{8g-4} |y - \nu_1|^{-2g} |y - \nu_2|^{-2g} d^2 y.
\end{aligned}$$

Если повторить эту процедуру n раз, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) & \sim \prod_{k=1}^2 |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k - 1|^{2(1+B-g)} |z_1 - z_2|^{2-4g} \times \\
& \times \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{-2(1+A+(n-1)g)} |\nu_j - 1|^{-2(1+B+(n-1)g)} |\nu_j - z_1|^{2ng-2} \mathcal{D}_2^{2g}(\nu) d^2 \vec{\nu}_2 \times \\
& \times |y - z_1|^{-2(n-1)g} |y - z_2|^{2(n+1)g-4} |y - \nu_1|^{-2g} |y - \nu_2|^{-2g} d^2 y.
\end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Используя тождества (1.7) и (A.2), преобразуем интеграл в правой части (Б.14) к виду

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) & \sim \\
& \sim \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{2(A+(n-2)g)} |\nu_j - 1|^{2(B+(n-2)g)} |\nu_j - z_1|^{-2(n-1)g} \mathcal{D}_2(\nu) d^2 \vec{\nu}_2 \times \\
& \times |y - z_1|^{2(n-2)g} |y - z_2|^{-2ng} |y - \nu_1|^{-2+2g} |y - \nu_2|^{-2+2g} d^2 y.
\end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Соотношение (Б.15) можно выразить в терминах интеграла с ядром (1.23):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_2^{(n)}(A, B \mid z_1, z_2) & \sim \int \prod_{j=1}^2 |\nu_j|^{2(A+(n-2)g)} |\nu_j - 1|^{2(B+(n-2)g)} \times \\
& \times K_2^{-(n-1)g}(\nu_1, \nu_2 \mid z_1, z_2) \mathcal{D}_2^{2g}(\nu) d^2 \vec{\nu}_2.
\end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

($m+3$)-Точечная функция. Для общих m интеграл (Б.2) можно упростить таким же образом. Можно обобщить интегральные соотношения (Б.5) и (Б.10):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_m^{(n)}(A, B \mid z_1, \dots, z_m) & \sim \prod_{k=1}^m |z_k|^{2(1+A-g)} |z_k - 1|^{2(1+B-g)} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2-4g} \times \\
& \times \int \prod_{j=1}^m |\xi_j|^{-2(1+A)} |\xi_j - 1|^{-2(1+B)} \prod_{k=1}^m |\xi_j - z_k|^{-2+2g} \times \\
& \times \mathfrak{J}_m^{(n-1)}(A+g, B+g \mid \xi_1, \dots, \xi_m) \mathcal{D}_m(\xi) d^2 \vec{\xi}_m.
\end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Применяя это соотношение m раз, можно показать, что интеграл стабилизируется⁹⁾. Это означает, что после следующих применений соотношения (Б.17) он имеет тот

⁹⁾Для этого следует использовать тождество, которое обобщает (Б.12) для большего числа “внешних” точек z_i и ν_j .

же вид (со сдвинутыми параметрами A и B), но с меньшим числом интегрирований. Окончательная формула выглядит аналогично (Б.8) и (Б.16):

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_m^{(n)}(A, B \mid z_1, \dots, z_m) &\sim \\ &\sim \int \prod_{j=1}^m |\nu_j|^{2(A+(n-m)g)} |\nu_j - 1|^{2(B+(n-m)g)} \times \\ &\times K_m^{-(n-m+1)g}(\nu_1, \dots, \nu_m \mid z_1, \dots, z_m) \mathcal{D}_m^{2g}(\nu) d^2 \vec{\nu}_m, \end{aligned}$$

где $K_m^{\Delta}(\nu_1, \dots, \nu_m \mid z_1, \dots, z_m)$ имеет вид (1.21).

Благодарности. Работа В. Фатеева была поддержана European Committee в рамках контракта EUCLID HRPN-CT-2002-00325. Работа А. Литвинова была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-02-00799-а), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2044.2003.2) и программы РАН “Элементарные частицы и фундаментальная ядерная физика”. Важная часть работы была выполнена во время визита А. Литвинова в Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules Université Montpellier 2 в рамках программы ENS-LANDAU.

Список литературы

- [1] А. М. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [2] V. S. Dotsenko, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:39 (1991), 3601–3612.
- [3] P. Di Francesco, D. Kutasov, *Nucl. Phys. B*, **375**:1 (1992), 119–170; [arXiv: hep-th/9109005](#).
- [4] А. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **142**:2 (2005), 218–134; [arXiv: hep-th/0505063](#).
- [5] А. А. Belavin, А. В. Zamolodchikov, *Письма в ЖЭТФ*, **82**:1 (2005), 8–14.
- [6] А. А. Белавин, А. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **147**:3 (2006), 339–371.
- [7] И. К. Костова, В. Б. Петкова, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 132–145; [arXiv: hep-th/0505078](#).
- [8] I. K. Kostov, V. B. Petkova, *Nucl. Phys. B*, **770**:3 (2007), 273–331; [arXiv: hep-th/0512346](#); *Nucl. Phys. B*, **769**:3 (2007), 175–216; [arXiv: hep-th/0609020](#).
- [9] А. А. Belavin, А. М. Polyakov, А. В. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [10] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [11] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **251**:5–6 (1985), 691–734.
- [12] M. Goulian, M. Li, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:16 (1991), 2051–2055.
- [13] P. Basilehac, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **532**:3 (1998), 567–587; [arXiv: hep-th/9906010](#).
- [14] H. Dorn, H. J. Otto, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 39–43; [arXiv: hep-th/9206053](#).
- [15] H. Dorn, H. J. Otto, *Nucl. Phys. B*, **429**:2 (1994), 375–388; [arXiv: hep-th/9403141](#).
- [16] А. В. Zamolodchikov, А. В. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605; [arXiv: hep-th/9506136](#).
- [17] V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *Письма в ЖЭТФ*, **84**:10 (2006), 625–630.
- [18] V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *Письма в ЖЭТФ*, **81**:11 (2005), 728–732; [arXiv: hep-th/0505120](#).