Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Фатеев, Я. П. Пугай, Вакуумные средние скейлинговых полей в Z_N -моделях Изинга, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 557–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:35:25

© 2008 г.

В. А. Фатеев^{*,†}, Я. П. Пугай^{*}

ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ СКЕЙЛИНГОВЫХ ПОЛЕЙ В Z_N -МОДЕЛЯХ ИЗИНГА

Вычисляются точные вакуумные средние от физически значимых скейлинговых полей в возмущенных парафермионных Z_N -моделях. Применяемый алгебраический метод основан на анализе вершинных операторов в соответствующей некритической решеточной модели. Результаты совпадают с выражениями, полученными методами возмущенной конформной теории поля.

Ключевые слова: интегрируемые модели, конформная теория поля, вакуумные средние, парафермионная симметрия, вершинные операторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе обсуждается частная задача, появившаяся в наших исследованиях [1] корреляционных функций скейлинговых полей в симметричных двумерных Z_N -моделях квантовой теории поля (КТП). Эти интегрируемые модели описывают скейлинговый предел решеточных Z_N -моделей Изинга, и их можно рассматривать как парафермионные конформные квантовые теории поля (ККТП) [2], [3] с центральным зарядом

$$c = \frac{2(N-1)}{N+2}, \quad N = 2, 3, \dots, \quad (1)$$

возмущенных первым температурным полем ε_1 [4], [5]. В этом подходе, основанном на знании конформных корреляционных функций, можно формально определить модели с помощью действия

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{ККТП}} + \lambda \int d^2x \varepsilon_1(x). \quad (2)$$

С другой стороны, можно задать ту же КТП как теорию с факторизованной диагональной S -матрицей специального вида [6].

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: Vladimir.Fateev@lpta.univ-montp2.fr, slava@itp.ac.ru

[†]Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, Université Montpellier 2, Montpellier, France. E-mail: Vladimir.FATEEV@LPTA.univ-montp2.fr

Эффективным методом исследования основных свойств корреляционных функций скейлинговых полей в этих моделях [7] является комбинация формфакторного подхода [8] и конформной теории возмущений [5], описывающих соответственно поведение корреляторов на больших и малых расстояниях. Для изучения поведения скейлинговых полей на промежуточных расстояниях необходимо использовать комбинацию обоих разложений, инфракрасного и ультрафиолетового, основываясь на известном соотношении между массой M основной частицы и константой связи λ [9], [10]

$$(2\pi\lambda)^2 = \left(M \frac{\Gamma(2/N)\Gamma(1-1/N)}{\Gamma(1/N)} \right)^{4N/(N+2)} \times \\ \times \frac{\Gamma(1/(N+2))}{\Gamma((N+1)/(N+2))} \frac{\Gamma(3N/(N+2))}{\Gamma((2-2N)/(N+2))} \quad (3)$$

и наборе одночастичных вакуумных средних (ВС) скейлинговых полей. Эти последние величины задают нормировку формфакторов, а также появляются в качестве важных множителей в коэффициентах операторных разложений (ОР) корреляционных функций на малых расстояниях [7]. Будучи весьма важными объектами, ВС имеют существенно непертурбативную природу, и их, как правило, очень трудно вычислить строго. В работах [11] были предложены точные аналитические выражения для ВС примарных полей в возмущенных минимальных моделях ККТП [12]. Эти ВС могут быть получены с помощью метода уравнений отражений [13]. Результаты были в дальнейшем обобщены на многие важные случаи (см., например, работу [14]). Однако сам по себе метод не является полностью строгим, и поэтому результаты должны быть проверены каким-либо образом. Кроме того, при решении уравнений отражений для полей потомков возникают существенные технические трудности, так что для этих полей известно немного [15].

В данной статье развивается альтернативный метод вычисления ВС в скейлинговой теории (2), основанный на анализе вершинных операторов в решеточных моделях Андриуса, Бакстера и Форрестера (АБФ) [16], критическое поведение которых описывается парафермионными ККТП. Универсальные скейлинговые свойства моделей АБФ в окрестности критической точки определяются КТП (2). Эти решеточные модели исследовались в рамках подхода вершинных операторов [17]–[19], основанного на деформации [20]–[22] алгебраических структур ККТП [2], [23]. Так как модели АБФ могут рассматриваться как решеточные регуляризации [24] скейлинговой модели (2), то они содержат полную информацию об этой теории. К сожалению, решеточные корреляционные функции имеют весьма сложный вид, который трудно анализировать в скейлинговом пределе.

Тем не менее некоторые результаты вычислений на решетке можно непосредственно применить в моделях теории поля [18]. Например, формфакторы в скейлинговых Z_N -моделях можно получить из матричных элементов операторов, диагонализующих решеточный гамильтониан [22]. В нашей предыдущей работе [1] рассматривались действия простейших парафермионных генераторов в пространстве

формфакторов с помощью применения деформированной парафермионной симметрии [22] решеточной модели [16]. Мы проверили согласованность нашей конструкции с помощью численного анализа корреляционных функций. Согласие между асимптотическим поведением на больших и малых расстояниях дало подтверждение правильности полученных выражений для формфакторов [1], [25], [26], равно как и для скейлинговых структурных функций. Эти численные проверки также являются сильным аргументом в пользу правильности предложенных точных выражений для ВС возмущенных примарных полей $\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle$, которые имеют ненулевые значения (см. ниже). В частности, это подтвердило правильность соотношения

$$\frac{\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle}{\langle \phi_{k,-k}^{k,k} \rangle} = \left(M \frac{(N+2)\Gamma(2/N)\Gamma(1-1/N)}{N\Gamma(1/N)} \right)^{(k^2-m^2)/(2N)} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{(i+1)\gamma((i+1)/N)}{(k-i)\gamma((k-i)/N)}, \quad (4)$$

которое было получено для ВС полей с различными квантовыми числами $m = k - 2l$. Здесь и ниже функция $\gamma(a)$ определена как $\gamma(a) = \Gamma(a)/\Gamma(1-a)$.

В настоящей статье приводятся детали вычислений для всех величин $\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle$ с применением алгебраического метода, описанного в работе [27]. Одна из наших целей – показать, что ВС скейлинговых полей глубоко связаны с соответствующими правилами слияния для деформированных вершинных операторов. В частности, мы показываем, что уравнение (4) легко получить из действия деформированных парафермионных токов.

Альтернативный подход, основанный на уравнениях отражений для нахождения ВС, использовался в работах [13], [14]. Он приводит к тем же результатам. Это и неудивительно, так как деформация парафермионной симметрии, описанная в работах [20]–[22], имеет весьма специальный вид, который находится в согласии с уравнениями отражений.

2. КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе напоминаются основные факты о ККТП с парафермионной симметрией [2], [3], описывающих самодуальные критические точки Z_N -моделей Изинга ($N = 2, 3, \dots$) и связанных моделей [6], [16]. Заметим, что парафермионные токи $\psi(z)$, порождающие алгебру динамических симметрий, суть квазилокальные поля с дробными спинами. Это отчетливо видно из перестановочных соотношений:

$$(\zeta - z)^{2/N} \psi(z) \psi(\zeta) = (z - \zeta)^{2/N} \psi(\zeta) \psi(z) \quad (5)$$

(аналогичное соотношение выполнено для антиголоморфных компонент). Это уравнение можно также понимать как равенство формальных степенных рядов для разложений по модам парафермионных токов $\psi(z)$ (см. ниже (15)). Оно задает бесконечномерную алгебру парафермионных генераторов. С алгебраической точки зрения парафермионная ККТП характеризуется представлениями этой алгебры. В следующем разделе рассматривается более общая ситуация, отвечающая решеточной версии уравнения (5).

2.1. Пространство состояний и правила слияния. Корреляционные функции парафермионной конформной Z_N -модели инвариантны относительно действия прямого произведения групп глобальных симметрий $Z_N \times \tilde{Z}_N$ [2]. Все поля в соответствии с их трансформационными свойствами могут быть естественным образом разбиты на семейства с фиксированными $(Z_N \times \tilde{Z}_N)$ -зарядами (k, l) . Каждое из полей ϕ из сектора (k, l) преобразуется под действием группы глобальных симметрий как

$$\phi \rightarrow \omega^{kn+ln'} \phi, \quad n, n' \in \mathbb{Z}, \quad \omega = e^{2\pi i/N}.$$

Например, семейства $(k, 0)$ и $(0, k)$, $k = 0, \dots, N-1$, содержат важные поля σ_k и μ_k – операторы порядка и беспорядка. Эти поля задают корреляции спинов и дуальных спинов на больших расстояниях в соответствующих решеточных Z_N -моделях Изинга. Поля σ_k и μ_k имеют аномальные размерности

$$2d_k = \frac{k(N-k)}{N(N+2)}. \quad (6)$$

Под действием генераторов Z_N -симметрии операторы порядка преобразуются как

$$\sigma_k \rightarrow \omega^{kn} \sigma_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

и оказываются инвариантными относительно дуальной симметрии $\tilde{Z}_N$. Наоборот, закон преобразования полей μ_k под действием дуальной $\tilde{Z}_N$ -симметрии имеет вид

$$\mu_k \rightarrow \omega^{kn'} \mu_k, \quad n' \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Заметим, что все поля порядка σ_k и беспорядка μ_k могут быть получены из операторов порядка (беспорядка) μ_1 (σ_1) в соответствии с правилами слияния:

$$\begin{aligned} \sigma_k(z, \bar{z}) \sigma_1(0, 0) &= |z|^{2d_{k+1}-2d_k-2d_1} [\sigma_{k+1}(0, 0) + \dots], \\ \mu_k(z, \bar{z}) \mu_1(0, 0) &= |z|^{2d_{k+1}-2d_k-2d_1} [\mu_{k+1}(0, 0) + \dots]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь поля σ_N и μ_N должны быть отождествлены с единичным оператором. Это следует из зарядовой симметрии теории. Благодаря этой симметрии можно ввести сопряженные операторы порядка и беспорядка как $\sigma_k^\dagger \equiv \sigma_{N-k}$ и $\mu_k^\dagger \equiv \mu_{N-k}$.

Парафермионные токи, задающие динамическую симметрию конформной модели, появляются как ведущие члены в ОР:

$$\begin{aligned} \sigma_k(z, \bar{z}) \mu_k(0, 0) &= |z|^{-4d_k} z^{\Delta_k} [\psi_k(0) + \dots], \\ \sigma_k(z, \bar{z}) \mu_k^\dagger(0, 0) &= |z|^{-4d_k} \bar{z}^{\Delta_k} [\bar{\psi}_k(0) + \dots]. \end{aligned} \quad (10)$$

Голоморфные и антиголоморфные токи $\psi_k(z)$ и $\bar{\psi}_k(\bar{z})$ являются обобщениями обычных майорановских фермионов, отвечающих случаю модели Изинга ($N = 2$). Простейшее решение условия ассоциативности операторной алгебры токов

$$\psi_k(z) \psi_l(0) = z^{\Delta_{k+l}-\Delta_k-\Delta_l} [\psi_{k+l} + \dots] \pmod{N} \quad (11)$$

отвечает ККТП с центральным зарядом (1) и с конформными размерностями парафермионных токов

$$\Delta_k = \frac{k(N-k)}{N}. \quad (12)$$

Поля $\psi \equiv \psi_1$ ($\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}_1$) являются базисными для парафермионной алгебры, что следует из уравнения (11). Их перестановочные соотношения задаются уравнением (5) и аналогичным уравнением для антикиральной составляющей. В дальнейшем будет удобно рассмотреть также сопряженные токи $\psi^\dagger \equiv \psi_{N-1}$ ($\bar{\psi}^\dagger \equiv \bar{\psi}_{N-1}$).

В конформных моделях пространство состояний естественным образом разбивается в прямую сумму подпространств с определенными $(Z_N \times \tilde{Z}_N)$ -зарядами (k, l) . Однако представляется более естественным использовать заряды $[m, \bar{m}] = [k+l, k-l]$, $m + \bar{m} \in 2\mathbb{Z}$:

$$\{F\} = \bigoplus \{F\}_{[m, \bar{m}]}, \quad -N \leq m, \bar{m} < N. \quad (13)$$

Парафермионные токи и операторы порядка и беспорядка принадлежат подпространствам

$$\begin{aligned} \psi &\in \{F\}_{[2,0]}, & \bar{\psi} &\in \{F\}_{[0,2]}, & \psi^\dagger &\in \{F\}_{[-2,0]}, & \bar{\psi}^\dagger &\in \{F\}_{[0,-2]}, \\ \sigma_k &\in \{F\}_{[k,k]}, & \mu_k &\in \{F\}_{[k,-k]}, \end{aligned} \quad (14)$$

и заряды m и $\bar{m}$ оказываются аддитивными по модулю целых чисел, кратных $2N$.

Конформные поля удобно классифицировать в соответствии с представлениями алгебры парафермионов. Действие парафермионных генераторов A_ν ($A_\nu^\dagger$) задается ОР

$$\begin{aligned} \psi(z)\phi_{[m, \bar{m}]} &= \sum_n z^{-m/N+n-1} A_{(1+m)/N-n} \phi_{[m, \bar{m}]}, \\ \psi^\dagger(z)\phi_{[m, \bar{m}]} &= \sum_n z^{m/N+n-1} A_{(1-m)/N-n}^\dagger \phi_{[m, \bar{m}]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что если поле $\phi_{[m, \bar{m}]} \in F_{[m, \bar{m}]}$ имеет конформные размерности $(d, \bar{d})$, то размерности полей $A_\nu \phi_{[m, \bar{m}]} \in \{F\}_{[m+2, \bar{m}]}$ и $A_\nu^\dagger \phi_{[m, \bar{m}]} \in \{F\}_{[m-2, \bar{m}]}$ оказываются равными $(d-\nu, \bar{d})$.

Все поля модели можно получить, действуя токами $\psi, \bar{\psi}$ на операторы беспорядка или порядка μ_k, σ_k [2]. Например, пространство состояний ККТП можно представить в виде прямой суммы неприводимых представлений алгебры парафермионов: $\{F\} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} [\mu_k]_A$.

Среди полей в правых частях уравнений (15) имеются специальные. Напомним, что пространство полей в парафермионной ККТП также допускает классификацию относительно другой бесконечномерной алгебры симметрий, так называемой W_N -алгебры [28]. Генераторы последней, $W_2(z), \dots, W_N(z)$, возникают в ОР парафермионных токов ψ и $\psi^\dagger$ и имеют нулевые Z_N - и $\tilde{Z}_N$ -заряды. Как обычно, ток W_2 порождает подалгебру Вирасоро с центральным зарядом (1), а остальные токи удовлетворяют некоторым квадратичным соотношениям. То же справедливо, разумеется, для антикиральных токов. При действии на поля старших весов $\phi_{m, \bar{m}}^{k, k}$

они порождают неприводимые представления $\mathcal{L}_{m,k} \times \bar{\mathcal{L}}_{\bar{m},k} = [\phi_{m,\bar{m}}^{k,k}]_W$. С точки зрения симметрии $W_N \times \bar{W}_N$ каждое из пространств $[\mu_k]_A$ расщепляется в прямую сумму представлений $\bigoplus_{m,\bar{m}} [\phi_{m,\bar{m}}^{k,k}]_W$. Таким образом, примарные поля $\phi_{m,\bar{m}}^{k,k}$ для W_N -алгебры, вообще говоря, связаны действием генераторов алгебры парафермионов.

Именно, обозначим через $(\psi^\dagger)^l \mu_k$ поле с минимальной конформной размерностью, которое получается при l -кратном применении парафермионных генераторов $\psi^\dagger$ к оператору беспорядка μ_k (и соответственно для $\bar{\psi}$):

$$(\psi^\dagger)^l \mu_k = A_{(2l-1-k)/N}^\dagger A_{(2l-3-k)/N}^\dagger \cdots A_{(1-k)/N}^\dagger \mu_k. \quad (16)$$

Можно видеть, что эти поля – примарные поля W_N -алгебры. В общем случае с точностью до нормировки имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \phi_{k-2l, -k+2\bar{l}}^{k,k} &= (\psi^+)^l (\bar{\psi})^{\bar{l}} \mu_k, & l, \bar{l} &= 0, 1, \dots, k, \\ \phi_{k+2l, -k-2\bar{l}}^{k,k} &= (\psi)^l (\bar{\psi}^\dagger)^{\bar{l}} \mu_k, & l, \bar{l} &= 0, 1, \dots, N-k. \end{aligned} \quad (17)$$

Конформные размерности $(\Delta_m^l, \Delta_{\bar{m}}^l)$ полей $\phi_{m,\bar{m}}^{k,k}$ можно легко вычислить с помощью соотношений (6) и (17). В частности, получим

$$\Delta_m^l = \frac{(l+1)^2 - 1}{4(N+2)} - \frac{m^2}{4N}, \quad -l \leq m \leq l. \quad (18)$$

Среди примарных полей находятся поля $\varepsilon_k = \phi_{0,0}^{2k,2k}$, имеющие нулевые заряды Z_N и $\bar{Z}_N$. Эти поля отвечают тепловым операторам в Z_N -модели Изинга. Они локальны относительно всех прочих полей и имеют конформные размерности

$$D_k = \frac{k(k+1)}{N+2}. \quad (19)$$

Структура пространства состояний для модели $N = 7$ показана на рисунке, где изображен набор примарных полей $\phi_{k,\bar{m}}^{k,k}$ для W_N -алгебры. Кружками отмечены

спиновые поля $\sigma_k = \phi_{k,k}^{k,k}$, а косыми крестиками – поля, отвечающие операторам беспорядка $\mu_k = \phi_{k,-k}^{k,k}$. Температурные поля $\varepsilon_j = \phi_{0,0}^{2j,2j}$ обозначены звездочками, расположенными на прямой с $m = 0$, а парафермионные токи $\psi_j = \phi_{0,2j}^{0,0}$ отмечены треугольниками, расположенными на прямой $k = 0$ с отождествлением $\psi_{7-j} = \psi_j^\dagger$ и $\psi_0 = 1$.

Правила слияния, обсуждавшиеся выше, позволяют исследовать все поля в этой картине с помощью анализа поля μ_1 и движения с помощью применения правил слияния вдоль диагональных (9) и горизонтальных (17) направлений. Это наблюдение будет полезно при исследовании деформированного случая.

2.2. Техника свободных полей для парафермионной ККТП. В дальнейшем нас будут интересовать корреляторы бесспиновых примарных полей $\phi_{m,-m}^{k,k}$, которые инвариантны относительно Z_N -преобразования и имеют неисчезающие ВС в фазе беспорядка после включения возмущения.

Мощной техникой исследования корреляционных функций ККТП оказалась процедура бозонизации [23]. Она сводит анализ корреляционных функций конформных полей к вычислению матричных элементов свободных бозонных полей. Бозонизация парафермионной ККТП [29] осуществляется в терминах двух безмассовых свободных полей $\varphi_j(z, \bar{z}) = \varphi_j(z) + \bar{\varphi}_j(\bar{z})$, $j = 1, 2$, с двухточечным спариванием:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1(z, \bar{z}) \varphi_1(0, 0) \rangle &= -\frac{1}{2(N+2)} \ln |z|^2, \\ \langle \varphi_2(z, \bar{z}) \varphi_2(0, 0) \rangle &= -\frac{1}{2N} \ln |z|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Можно выразить генераторы алгебры симметрий, равно как и все примарные поля, с помощью этих бозонов. Например, парафермионные токи имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sqrt{(N+2)} (\partial_z \varphi_2(z) - i \partial_z \varphi_1(z)) e^{2\varphi_2(z)}, \\ \psi^+(z) &= \sqrt{(N+2)} (\partial_z \varphi_2(z) + i \partial_z \varphi_1(z)) e^{-2\varphi_2(z)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Реализация примарных полей $\phi_{m,\bar{m}}^{k,k}$ через свободные поля осуществляется с помощью экспоненциальных бозонных операторов:

$$\phi_{m,\bar{m}}^{k,k} \longrightarrow N_{m,\bar{m}}^{k,k} e^{-ik\varphi_1(z,\bar{z}) + m\varphi_2(z) + \bar{m}\bar{\varphi}_2(\bar{z})}, \quad (22)$$

где $N_{m,\bar{m}}^{k,k}$ – нормировочные константы. Стрелка здесь означает, что предписание бозонизации предполагает вставку в матричный элемент необходимого числа экранирующих зарядов, коммутирующих с генераторами симметрии ψ, ψ^+ (детали см. в работах [23]),

$$X = \int d^2 z \partial_z \varphi_2(z) \partial_{\bar{z}} \varphi_2(\bar{z}) e^{2i\varphi_1(z,\bar{z})}. \quad (23)$$

Константы $N_{m,\bar{m}}^{k,k}$ в выражении (22) фиксируются условиями нормировки. Стандартный выбор такого условия задается так называемой конформной нормировкой. Она имеет вид

$$\langle \phi^\dagger(z, \bar{z}) \phi(0) \rangle = |z|^{-4\Delta_\phi}, \quad |z| \rightarrow 0. \quad (24)$$

Применяя процедуру бозонизации, можно вывести интегральные представления для всех корреляционных функций в парафермионной ККТП. Например, все структурные константы и наиболее важные четырехточечные корреляционные функции [2] могут быть найдены при реализации в терминах свободных полей (20)–(23).

3. ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПАРАФЕРМИОНОВ

Обратимся теперь к более сложному случаю возмущенных конформных моделей (2). Для определенности выберем параметр λ положительным, $\lambda > 0$. Этот выбор отвечает случаю, когда $\tilde{Z}_N$ -симметрия нарушена, а Z_N -симметрия остается. Параметры беспорядка μ_k (и прочие поля с нулевым Z_N -зарядом $m + \bar{m}$) имеют ненулевые ВС¹⁾. Теория при этом все еще интегрируема ввиду существования бесконечного числа интегралов движения [7]. Тем не менее она не обладает конформной инвариантностью, и наличие динамической симметрии, обобщающей парафермионную симметрию ККТП, не слишком хорошо понято. Поэтому нашей стратегией будет исследовать сначала алгебраическую структуру решеточных моделей – интегрируемых ограниченных “solid-on-solid”-моделей статистической механики, предложенных в работе [16]. Модели АБФ можно интерпретировать как решеточные регуляризации непрерывных теорий (2) [24]. Тогда можно попытаться предсказать некоторые свойства ВС в скейлинговом пределе.

Прежде чем перейти к деталям вычислений, обсудим вкратце класс функций, используемых в решеточной модели. В дальнейшем будут рассматриваться вершинные операторы, связанные с решеточной деформацией парафермионной симметрии. Такая деформация приводит к модификации перестановочных соотношений (5), и они принимают следующий вид [20], [21]:

$$\begin{aligned} z^{2/N} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} \frac{(x^{-2} \frac{w}{z} | x^{2N})_{\infty}}{(x^{2+2N} \frac{w}{z} | x^{2N})_{\infty}} \Psi(z) \Psi(w) = \\ = w^{2/N} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} \frac{(x^{-2} \frac{z}{w} | x^{2N})_{\infty}}{(x^{2+2N} \frac{z}{w} | x^{2N})_{\infty}} \Psi(w) \Psi(z). \end{aligned} \quad (25)$$

Переменная $0 < x < 1$ здесь представляет собой параметр деформации. Он связан с отклонением от критической точки, так что уравнение (25) в пределе $x \rightarrow 1$ с фиксированными переменными z и w соответствует алгебраическому соотношению для обычных парафермионов (5). Функции, участвующие в этом выражении, и их обобщения имеют вид

$$(z | q)_{\infty} = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zq^j), \quad (26)$$

$$(z | q_1, q_2)_{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zq_1^i q_2^j). \quad (27)$$

¹⁾Случай $\lambda < 0$ отвечает упорядоченной фазе, в которой нарушена Z_N -симметрия, а операторы порядка имеют ненулевые ВС.

Чтобы показать, что структурные функции в уравнении (25) связаны со степенными функциями в уравнении (5), удобно использовать представление

$$\ln \frac{(z | q_1, q_2)_\infty}{(w | q_1, q_2)_\infty} = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{z^s - w^s}{(1 - q_1^s)(1 - q_2^s)} \quad (28)$$

в области его сходимости. Применяя это представление, нетрудно увидеть, что часть, содержащая отношение бесконечных произведений в левой части (25), при $\zeta = w/z$ имеет вид

$$\frac{(x^{-2}\zeta | x^{2N})_\infty}{(x^{2+2N}\zeta | x^{2N})_\infty} = \exp\left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{[(N+2)m]_x}{[Nm]_x} \zeta^m\right), \quad (29)$$

где предполагается, что сумма сходится, т.е. переменная ζ удовлетворяет условию $|\zeta| < 1$. Символ $[a]_x$ обозначает “ q -число”:

$$[a]_x = \frac{x^a - x^{-a}}{x - x^{-1}}. \quad (30)$$

В пределе $x \rightarrow 1$ ($[a]_x \rightarrow a$) при фиксированном отношении $\zeta = w/z$ мероморфная функция (29) превращается в степенную функцию

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{-2} \frac{w}{z} | x^{2N})_\infty}{(x^{2+2N} \frac{w}{z} | x^{2N})_\infty} = \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{(N+2)/N}, \quad (31)$$

а алгебра деформированных операторов $\Psi(z)$ (25) становится такой же, как и для конформных полей $\psi(z)$ (5). По этой причине будем в дальнейшем называть такой предельный переход “конформным”.

Заметим, что разрез в комплексной плоскости между точками z и w , в которых располагаются киральные конформные поля $\psi(z)$ и $\psi(w)$, преобразуется после деформации в бесконечные наборы нулей и полюсов. Из-за этого аналоги конформных правил слияния между операторами должны вводиться аккуратно. А именно, необходимо принять в расчет, каким именно образом переменная w стремится к переменной z .

В аддитивных переменных $z = q^u$ функции (26) могут быть выражены в терминах q -гамма-функций:

$$\frac{(q^u | q)_\infty}{(q | q)_\infty} = (1 - q)^{1-u} \Gamma_q(u)^{-1}. \quad (32)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ функция $\Gamma_q(u)$ (для конечной переменной u) превращается в стандартную гамма-функцию $\Gamma(u)$. q -Деформация хорошо известного соотношения между двумя гамма-функциями и функцией синуса задается тройным произведением Якоби:

$$E(z | q) = (qz^{-1} | q)_\infty (z | q)_\infty (q | q)_\infty. \quad (33)$$

Эта функция возникает в нашем построении в следующей комбинации $h(u)$, которая с точностью до константы совпадает с эллиптической тета-функцией:

$$h(u) = x^{u^2/(N+2)-u} E(x^{2u} | x^{2(N+2)}). \quad (34)$$

3.1. Модели АБФ в режиме II. Флуктуирующие переменные в моделях АБФ [16] ассоциированы с узлами двумерной квадратной решетки и принимают целые значения $1 \leq a \leq N + 1$. Локальные больцмановские веса $\mathbf{W} \left[\begin{smallmatrix} a & d \\ b & c \end{smallmatrix} \middle| u \right]$ присваиваются каждой конфигурации (a, b, c, d) высот вокруг грани. Веса модели АБФ зависят при фиксированном числе N от двух параметров x и u . Параметр x связан с решеточным параметром, определяющим отклонение системы от критического положения. Параметр u – спектральный параметр, и критическое поведение системы от него не зависит. В терминах функций $h(u)$ (34) точные выражения для ненулевых больцмановских весов записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \left[\begin{smallmatrix} m \pm 2 & m \pm 1 \\ m \pm 1 & m \end{smallmatrix} \middle| u \right] &= R(u), \\ \mathbf{W} \left[\begin{smallmatrix} m & m \pm 1 \\ m \pm 1 & m \end{smallmatrix} \middle| u \right] &= R(u) \frac{h(m \pm u)h(1)}{h(1 - u)h(m)}, \\ \mathbf{W} \left[\begin{smallmatrix} m & m \pm 1 \\ m \mp 1 & m \end{smallmatrix} \middle| u \right] &= R(u) \frac{(h(m + 1)h(m - 1))^{1/2}}{h(m)} \frac{h(u)}{h(1 - u)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Эти веса удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера, и модель оказывается интегрируемой. Рассмотрим так называемый режим II [16], в котором параметры модели находятся в области $0 < x < 1$ и $-N/2 < u < 0$. Система рассматривается в термодинамическом пределе, отвечающем периодическим граничным условиям. Функция $R(u)$ в выражениях (35) задает нормировку весов. Она выбирается таким образом, чтобы статистическая сумма на один узел решетки была равна единице:

$$R(u) = x^{2u/(N(N+2))} \frac{g_1(x^{2u})}{g_1(x^{-2u})}, \quad (36)$$

где функция $g_1(x^{2u})$ определена в приложении А (см. (П.3)).

При вычислении таких величин, как корреляционные функции, всегда предполагается, что те высоты, которые располагаются достаточно далеко от центральной высоты, должны находиться в одном из $2N$ основных состояний, пронумерованных $m \in \mathbb{Z} \pmod{2N}$. Каждое из этих основных состояний инвариантно относительно сдвига вдоль направления СВ–ЮЗ, а потому оно задается последовательностью высот на столбце. Зафиксируем в качестве начала отсчета некоторый столбец и выберем на нем узел с номером 1. Тогда m -е основное состояние описывается последовательностью высот $\{a_j^{(m)}\}$, $a_j^{(m)} \equiv a_{j+2N}^{(m)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$, на этом столбце:

$$a_{j-m}^{(m)} = \begin{cases} j, & 1 \leq j \leq N, \\ 2N + 2 - j, & N + 1 \leq j \leq 2N. \end{cases} \quad (37)$$

В этом выражении узлы на выделенном столбце пронумерованы индексом j снизу вверх в возрастающем порядке. Символом $\mathcal{L}_{m,l}$ обозначено пространство состояний полубесконечной решетки в секторе, в котором центральная высота (т.е. высота в

узле с номером 1) выбрана равной a , а граничные высоты находятся в основном состоянии m . А именно, для $|a_j - a_{j+1}| = 1$, $j = 1, \dots, \infty$, определим

$$\mathcal{L}_{m,a} = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} \mid 1 \leq a_j \leq N+1, a_1 = a, a_j = a_j^{(m)} (j \gg 1)\}. \quad (38)$$

В пределе $x \rightarrow 1$ система становится критической, и ее можно описать в терминах парафермионной ККТП с центральным зарядом (1). Это утверждение следует из результатов работы [30], в которой анализировались точные вероятности для локальных высот.

Локальные вероятности были вычислены точно [16] с применением метода угловой трансфер-матрицы [31]. Угловые трансфер-матрицы представляют собой статистические суммы, связанные с квадратами решетки с фиксированными высотами вдоль линий углов. В пределе бесконечной решетки угловая трансфер-матрица имеет с точностью до несущественного множителя простой вид x^{-2uD} [16]:

$$x^{-2uD} : \mathcal{L}_{m,a} \rightarrow \mathcal{L}_{m,a}. \quad (39)$$

Здесь угловой гамильтониан D представляет собой оператор, который можно интерпретировать как решеточный оператор буста. Он не зависит от u , и его спектр в пространстве $\mathcal{L}_{l,m}$ ограничен снизу, дискретен и эквидистантен [31].

Локальная вероятность для высоты $P_{l+1}(m)$, $0 \leq l \leq N$, $-N \leq m < N$, определена как вероятность возникновения конфигурации с заданной высотой в центральном узле $l+1$ и с условием на бесконечности таким же, как для m -го основного состояния. Эти важные характеристики были вычислены точно [16], и они имеют вид

$$\begin{aligned} P_{l+1}(m) &= \frac{1}{\mathcal{Z}} h(l+1) \text{Tr}_{\mathcal{L}_{m,l}}[x^{2ND}], \\ \text{Tr}_{\mathcal{L}_{m,l}}[x^{2ND}] &\equiv \chi_{m,l}(x^{2N}) = \frac{1}{(x^{2N}; x^{2N})_{\infty}^2} \times \\ &\times \left(\sum_{n_1 \geq |n_2|} - \sum_{-n_1 > |n_2|} \right) (-1)^{2n_1} (x^{2N})^{((l+1+2n_1(N+2))^2 - 1)/(4(N+2)) - (m+2n_2N)^2/(4N)}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $n_1, n_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$ и $l \equiv m \pmod{2}$. Решеточный нормировочный множитель выбран равным $\mathcal{Z} = x^{-(N+1)/(N+2)}(x^{2N} | x^{2N})_{\infty}$. Важно отметить, что функция $\chi_{l,m}(q)$ совпадает с характером неприводимого представления W_N -алгебры с центральным зарядом (1) и старшим весом Δ_m^l (18), возникающего в описании ККТП.

Решеточные параметры беспорядка принимают различные значения в разных упорядоченных фазах модели и обращаются в нуль по закону скейлинга при приближении к скейлинговому пределу $x \rightarrow 1$. Хьюз [30] определил их средние, применив модулярное преобразование функции характера $\chi_{m,l}$, и нашел, что эти средние $\hat{P}_{k+1}(m)$ задаются двумя числами $0 \leq k \leq N$ и $-N \leq m < N$. В ведущем порядке он нашел [22], [30]

$$\hat{P}_{k+1}(m) = t^{2\Delta_m^k}, \quad (41)$$

где Δ_m^k – в точности конформные размерности (18) полей $\phi_{m,-m}^{k,k}$ и был использован параметр решетки $t = e^{\pi^2/(N \ln x)}$. Напомним, что при исследовании спектра

гамильтониана перехода между соседними рядами было найдено [24], что переменная t определяет обратную корреляционную длину модели. А именно, обозначим шаг решетки через δ . Тогда в скейлинговом пределе $\delta \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ отношение t/δ фиксировано. Его значение (обратная корреляционная длина) пропорционально массе M первого элементарного возбуждения:

$$t\delta^{-1} = \frac{N}{2\sin(\pi/N)} M.$$

В дальнейшем мы просто используем то, что параметр t пропорционален массе наилегчайшей частицы в КТП (2), записав

$$t = C_0(N+2)M, \quad (42)$$

где неизвестная константа C_0 отражает свободу выбора размера элементарного квадрата решетки. Множитель $(N+2)$ введен для удобства в дальнейших вычислениях.

Сравнивая показатели степени переменной t с аномальными размерностями скейлинговых полей (18), из уравнений (41), (42) можно заключить, что величины $\hat{P}_{k+1}(m)$ отвечают ВС скейлинговых полей, которые становятся примарными полями W_N -алгебры в критическом режиме. В самом деле, поведение вида $t^{2\Delta_m^k}$ характерно ввиду уравнения (42) для ВС возмущенных примарных полей $\phi_{m,-m}^{k,k}$. Однако коэффициент в уравнении (41) отличается от выражения, полученного с помощью методов возмущенной ККТП в работах [13], [14]. Чтобы понять природу этого расхождения, отметим, что ВС становятся фиксированными только после наложения условия нормировки на скейлинговые поля. В нашем случае эта нормировка оказывается решеточной, и она не отвечает конформной нормировке (24), использованной в работах [13], [14].

Для нахождения соотношения между решеточной и конформной нормировками в строгом смысле необходимо вычислить скейлинговый предел двухточечных корреляционных функций и изучить его поведение на малых расстояниях. К сожалению, это вычисление было произведено только в случае модели Изинга [32]. В случае $N \geq 3$ корреляционные функции имеют гораздо более сложную аналитическую структуру, и прогресс в этом направлении связан со значительными техническими сложностями.

По этой причине мы попытались развить другой подход к этой задаче [27]. Он связан с анализом вершинных операторов в модели АБФ, которые появляются при построении решеточных корреляционных функций [22].

3.2. Вершинные операторы. В подходе вершинных операторов [17], [19], [22] к модели АБФ в термодинамическом пределе задача нахождения решеточных корреляционных функций и формфакторов сводится к исследованию свойств углового гамильтониана (39), (40) и вершинных операторов, действующих в пространстве состояний $\mathcal{L}_{m,l}$ (38). Для наших целей достаточно провести анализ вершинных операторов, отвечающих полу-трансфер-матрицам [27], полученным в результате процедуры слияния, которые строятся из бoльцмановских весов слияния.

Мы опускаем точные определения в терминах эллиптических функций для больцмановских весов слияния (подробнее см. [27], [33]). Заметим лишь, что переменные $a, b, c, d \in \{1, \dots, N+1\}$ в выражениях для $n \times s$ весов слияния $\mathbf{W}_{n,s} \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right]$ удовлетворяют при целых $1 \leq n \leq s \leq N$ более общему ограничению на соседние высоты $a - b, c - d = -s, -s + 2, \dots, s$; $a - d, b - c = -n, -n + 2, \dots, n$. Веса $\mathbf{W}_{n,s}$, построенные с помощью процедуры слияния, начиная с исходных весов $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{1,1}$ (36) представляют собой решения уравнения Янга–Бакстера [31], [33]:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{W}_{n,m} \left[\begin{smallmatrix} a & s \\ e & f \end{smallmatrix} \middle| u_1 \right] \mathbf{W}_{n,s} \left[\begin{smallmatrix} s & b \\ f & c \end{smallmatrix} \middle| u_2 \right] \mathbf{W}_{s,m} \left[\begin{smallmatrix} e & f \\ c & d \end{smallmatrix} \middle| u \right] = \\ = \sum \mathbf{W}_{n,s} \left[\begin{smallmatrix} a & f \\ f & e \end{smallmatrix} \middle| u_2 \right] \mathbf{W}_{n,m} \left[\begin{smallmatrix} f & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u_1 \right] \mathbf{W}_{s,m} \left[\begin{smallmatrix} a & s \\ f & b \end{smallmatrix} \middle| u \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где использовано обозначение $u = u_1 - u_2$. Сумма берется по всем допустимым значениям переменной f .

Начнем с $1 \times k$ ($k \times 1$) симметричных весов слияния $\mathbf{W}_{1,k}$ ($\mathbf{W}_{k,1}$), удовлетворяющих соотношениям симметрии и инверсии:

$$\mathbf{W}_{1,k} \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right] = \mathbf{W}_{1,k} \left[\begin{smallmatrix} c & d \\ b & a \end{smallmatrix} \middle| u \right], \quad (44)$$

$$\sum_d \mathbf{W}_{k,1} \left[\begin{smallmatrix} a & d \\ b' & c \end{smallmatrix} \middle| -u \right] \mathbf{W}_{1,k} \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right] = \delta_{b,b'}. \quad (45)$$

По аналогии с обычной схемой [17], [19], [22] определим полубесконечные произведения больцмановских весов слияния $\mathbf{W}_{1,k}$ и $\mathbf{W}_{k,1}$ [27]:

$$\begin{aligned} \Phi_k^{k(ab)}(x^{2u})_{(b,b_1,b_2,\dots)}^{(a,a_1,a_2,\dots)} &= \prod_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}_{1,k} \left[\begin{smallmatrix} b_{j+1} & a_{j+1} \\ b_j & a_j \end{smallmatrix} \middle| u \right], \\ \Phi_{-k}^{k(ab)}(x^{2u})_{(b,b_1,b_2,\dots)}^{(a,a_1,a_2,\dots)} &= \prod_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}_{k,1} \left[\begin{smallmatrix} a_{j+1} & a_j \\ b_{j+1} & b_j \end{smallmatrix} \middle| -u \right], \end{aligned} \quad (46)$$

где $|b_j - b_{j+1}| = |a_j - a_{j+1}| = 1$, $a_0 = a$, $b_0 = b$. Эти произведения задают полу-трансфер-матрицу на решетке, полученную в результате процедуры слияния²⁾. Эти матрицы рассматриваются как элементы матриц $\Phi_{\pm k}^{k(ab)}(u)$, которые переводят вектор $(b, b_1, b_2, \dots) \in \mathcal{L}_{m,b}$ в другой вектор $(a, a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{L}_{m \pm k, a}$, т.е. они оказываются операторами, действующими в прямой сумме пространств (38):

$$\Phi_{\pm k}^{k(ab)}(x^{2u}): \mathcal{L}_{m,b} \longrightarrow \mathcal{L}_{m \pm k, a}. \quad (47)$$

Вышеприведенное определение позволяет вывести набор аксиом алгебры вершинных операторов. Во-первых, применяя уравнение Янга–Бакстера (43) к произведению двух операторов (46), можно заключить, что Φ_k^k суть генераторы квадратичной

²⁾ Отметим деликатное свойство: оказывается, что ввиду свойства симметрии (44) также имеет место соотношение $\Phi_k^{k(ab)} = \prod_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}_{1,k} \left[\begin{smallmatrix} a_j & b_j \\ a_{j+1} & b_{j+1} \end{smallmatrix} \middle| u \right]$.

ассоциативной алгебры (операторы Φ_{-k}^k при этом оказываются генераторами аналогичной алгебры [22]):

$$\Phi_k^{k(cb)}(x^{2u_2})\Phi_n^{n(ba)}(x^{2u_1}) = \sum_d \mathbf{W}_{n,k} \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}_{u_{21}} \Phi_n^{n(cd)}(x^{2u_1})\Phi_k^{k(da)}(x^{2u_2}). \quad (48)$$

Во-вторых, из соотношений инверсии (45) найдем, что вершинные операторы обязаны удовлетворять соотношениям нормировки:

$$\Phi_{-k}^{k(1,k+1)}(x^{2u})\Phi_k^{k(k+1,1)}(x^{2u}) = \sqrt{\frac{h(1)}{h(k+1)}}. \quad (49)$$

В дополнение предполагается, что оператор углового гамильтониана D действует на вершинные операторы в соответствии с правилом

$$x^{2vD}\Phi_{\pm k}^k(x^{2u})x^{-2vD} = \Phi_{\pm k}^k(x^{2(u+v)}), \quad (50)$$

а его спектр в пространстве $\mathcal{L}_{m,l}$ задается характером $\chi_{m,l}$ (40).

3.3. Бозонизация вершинных операторов. Матричные элементы вершинных операторов можно исследовать в рамках подхода свободных полей [20]–[22]. Здесь первоначальной задачей оказывается нахождение бозонной реализации для операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (48)–(50) и действующих в прямой сумме пространств Фока. Затем необходимо ограничить действие операторов на пространства $\mathcal{L}_{m,l}$ со свойствами (40). В обоих случаях техника основана на обобщении соответствующего представления свободных полей, развитого в контексте парафермионной ККТП.

Рассмотрим два типа генераторов алгебры Гейзенберга $a_{1,n}$, $a_{2,n}$, $n \in \mathbb{Z}/0$, и соответствующие нулевые моды $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [a_{1,n}, a_{1,n'}] &= \frac{[2n]_x [(N+2)n]_x}{n} \delta_{n+n',0}, & [\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1] &= 2(N+2), \\ [a_{2,n}, a_{2,n'}] &= -\frac{[2n]_x [Nn]_x}{n} \delta_{n+n',0}, & [\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2] &= -2N, \end{aligned} \quad (51)$$

где символ $[a]_x$ был введен в (30). Все прочие коммутационные соотношения являются по определению нулевыми. Операторы нулевых мод $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ действуют на пространстве Фока $\mathcal{F}_{m,l} = C[a_{1,-n}, a_{2,-n} (n > 0)]|m, l\rangle$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_1|m, l\rangle = l|m, l\rangle, \quad \mathcal{P}_2|m, l\rangle = -m|m, l\rangle. \quad (52)$$

Наложим условие нормировки $\langle -m, k|m, k\rangle = 1$. Тогда в терминах операторов (51) бозонизация для углового гамильтониана задается градуирующим оператором в пространстве Фока. Он представляет собой сумму члена с нулевыми модами D_0

и члена с осцилляторными модами D_{osc} и имеет вид $D = D_0 + D_{\text{osc}}$, где

$$D_0 = \frac{(\mathcal{P}_1 + 1)^2 - 1}{4(N + 2)} - \frac{\mathcal{P}_2^2}{4N},$$

$$D_{\text{osc}} = \sum_{n>0} \frac{n^2}{[2n]_x [(N + 2)n]_x} a_{1,-n} a_{1,n} - \sum_{n>0} \frac{n^2}{[2n]_x [Nn]_x} a_{2,-n} a_{2,n}. \quad (53)$$

Множество собственных значений $\Delta_m^l + n$, $n = 1, 2, \dots$, оператора $D = D_0 + D_{\text{osc}}$ при его действии на векторы из пространства Фока $\mathcal{F}_{l,m}$ совпадает с множеством собственных значений углового гамильтониана при действии на пространство $\mathcal{L}_{l,m}$, хотя кратности могут быть и различными. (Это отражает то обстоятельство, что пространства Фока $\mathcal{F}_{l,m}$ должны быть редуцированы согласованным образом до пространств $\mathcal{L}_{m,l}$, отвечающих правильной функции характера (40).)

Бозонизация вершинных операторов задается в терминах свободных бозонных полей [20], [21], что может быть записано в следующем виде:

$$\phi_j(A; B, C | z; C') = -\frac{A}{BC} (\mathcal{Q}_j + \mathcal{P}_j \ln z) + \sum_{n \neq 0} \frac{[An]_x}{[Bn]_x [Cn]_x} a_{j,n} z^{-n} x^{C'|n|},$$

$$\phi_j(B | z; C) = \phi_j(A; A, B | z; C), \quad (54)$$

$$\phi_j^{(\pm)}(A; B | z) = \frac{A}{B} \mathcal{P}_j \ln x + (x - x^{-1}) \sum_{n>0} \frac{[An]_x}{[Bn]_x} a_{j,\pm n} z^{\mp n},$$

где $j = 1, 2$. По аналогии с конформной бозонизацией введем экспоненциальные поля свободных бозонов:

$$V_k(z) = z^{d_k} : e^{-\phi_1(k; 2, N+2 | zx^N; (N+2)/2) - \phi_2(k; 2, N | zx^N; N/2)} :,$$

$$V_k^*(z) = z^{d_k} : e^{\phi_1(k; 2, N+2 | z; -(N+2)/2) - \phi_2(-k; 2, N | z; -N/2)} :, \quad (55)$$

$$S_{\pm}(z) = : e^{\phi_1(N+2 | z; -(N+2)/2) \pm \phi_2^{(\pm)}(1; 2 | zx^{\mp(N+2)/2}) \pm \phi_1^{(\pm)}(1; 2 | zx^{\mp N/2})} :,$$

где $:$ обозначает стандартное правило нормального упорядочения. Эти операторы действуют в сумме пространств Фока $\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{r,s}$ как

$$V_k(z) : \mathcal{F}_{m,l} \longrightarrow \mathcal{F}_{m+k, l+k}, \quad V_k^*(z) : \mathcal{F}_{m,l} \longrightarrow \mathcal{F}_{m-k, l+k},$$

$$S_{\pm}(z) : \mathcal{F}_{m,l} \longrightarrow \mathcal{F}_{m, l-2}.$$

Заметим, что поля (55) суть деформации экспоненциальных полей, возникающих при бозонизации киральных конформных полей с размерностями d_k . А именно, в “конформном” пределе при $x \rightarrow 1$ и фиксированном z поля $V_k(z)$ и $V_k^*(z)$ становятся экспоненциальными полями, задающими бозонизацию полей беспорядка $\mu_k(z, \bar{z})$ в виде, вытекающем из соотношений (20) и (22):

$$V_k(z) \longrightarrow z^{d_k} : e^{k(\varphi_2(z) - i\varphi_1(z))} :, \quad V_k^*(z) \longrightarrow z^{d_k} : e^{-k(\varphi_2(z) + i\varphi_1(z))} :. \quad (56)$$

Общий множитель z^{d_k} отвечает здесь преобразованию киральных полей от теории на плоскости к теории на цилиндре [12]. Соответственно оператор

$$S(z) = -\frac{1}{x - x^{-1}} (S_+(z) - S_-(z)) \quad (57)$$

становится киральной составляющей экранирующего тока, входящего в определение (23). Мы применяем следующую деформацию экранирующего заряда:

$$X(z) = - \oint \frac{dz'}{2\pi z'} S(z') \frac{h(u - u' - 1/2 - \mathcal{P}_1)}{h(u - u' - 1/2)}, \quad (58)$$

где $z = x^{2u}$ и $z' = x^{2u'}$. Контур в этом выражении представляет собой окружность, обходящую начало координат в направлении, противоположном часовой стрелке, таким образом, что полюсы $z' = zx^{-1+2(N+2)n}$, $n \geq 1$, оказываются внутри, а полюсы $z' = zx^{-1+2(N+2)n}$, $n < 0$, — снаружи контура.

Деформированные вершинные операторы, удовлетворяющие ассоциативной перестановочной алгебре (48), структурные функции которой суть бозмановские веса слияния, можно рассматривать как экспоненциальные поля (55), одетые экранирующими зарядами (58) (см., например, ниже (59)).

Последний шаг процедуры бозонизации состоит в проверке того, что действие бозонных полей приводимо в прямой сумме пространств Фока $\bigoplus \mathcal{F}_{s,n}$, $s, n \in \mathbb{Z}$, и может быть ограничено на меньшее пространство $\bigoplus \mathcal{L}_{m,l}$, $-N \leq m < N$, $0 \leq l \leq N$ (47) так, что след оператора x^{2ND} над пространством $\mathcal{L}_{m,l}$ задается уравнением (40). Это можно сделать строго, если отождествить пространство $\mathcal{L}_{m,l}$ с пространством когомологий БРСТ-комплекса, описывающего неприводимые представления деформированной W_N -алгебры [34], и доказать затем БРСТ-инвариантность свободнополевых операторов [22].

Тем не менее для нашей цели исследования нормировок вершинных операторов $\Phi_{\pm k}^k$ этот шаг довольно просто сделать. В самом деле, можно показать, что бозонные операторы, построенные с помощью определений (55) и (58), задаются подходящими произведениями k операторов с $k = 1$ [27]. Поэтому их БРСТ-инвариантность немедленно вытекает из результатов работы [22] для операторов $\Phi_{\pm 1}^1$. Вакуумный вектор пространства Фока $|0, 0\rangle \in \mathcal{F}_{0,0}$ вместе со своим сопряженным $\langle 0, 0| \in \mathcal{F}_{0,0}^*$ всегда лежит в пространстве когомологий БРСТ-комплекса. Поэтому их следует отождествить с соответствующими векторами старшего веса $|I\rangle \in \mathcal{L}_{0,0}$ и $\langle I| \in \mathcal{L}_{0,0}$ для неприводимых представлений деформированной W_N -алгебры со старшим весом $\Delta_0^0 = 0$. Вектор $|I\rangle$ представляет собой единственное невырожденное вакуумное состояние, которое аннигилируется оператором D , а вектор $\langle I|$ — его сопряженный. Редукция БРСТ также тривиальна для векторов, порождаемых из вакуумов пространства Фока $|0, 0\rangle$ и $\langle 0, 0|$ с помощью БРСТ-инвариантных операторов. Поэтому при вычислении вакуумных матричных элементов произведений вершинных операторов $\Phi_{\pm k}^k$ можно непосредственно использовать отождествление

$$\begin{aligned} \Phi_k^k(x^{2u})|I\rangle &= V_k(x^{2u})|0, 0\rangle, \\ \langle I|\Phi_{-k}^k(x^{2u}) &= f_k\langle 0, 0|V_k^*(x^{2u})X^k(x^{2u}). \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь введен не зависящий от u множитель f_k [22], [27], который задается в терминах функций h (34) и g_k (П.3) в виде

$$f_k = \frac{h(1)^k}{h(k)!} \sqrt{\frac{h(1)}{h(k+1)}} \frac{(x^{2(N+2)} | x^{2(N+2)})_\infty^k}{(x^2 | x^{2(N+2)})_\infty^k} \frac{(x - x^{-1})^k}{x^k} g_k(1), \quad (60)$$

и использовано обозначение $h(k)! = h(1) \dots h(k)$.

4. ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ

Рассмотрим обобщения решеточных вершинных операторов $\Phi_{\pm m}^k$, где $-N \leq m < N$. Эти операторы можно строить последовательно, применяя слияния деформированных парафермионных токов Ψ (25) и $\Psi^\dagger$ и вершинных операторов $\Phi_{\pm k}^k$:

$$\Phi_{-m}^k(z) \Psi(zx^m) = \Phi_{-m+2}^k(z), \quad \Phi_m^k(z) \Psi^\dagger(zx^{N+m}) = \Phi_{m-2}^k(z). \quad (61)$$

Эти формулы переходят в конформном пределе в правила слияния (15) и (17). Соответственно операторы $\Phi_{\pm m}^k$ ведут себя в этом пределе как киральные конформные примарные составляющие $\phi_{\pm m}^k$, возникающие при построении примарных полей $\phi_{m,-m}^{k,k}$. В самом деле, по построению представления свободных полей (см., например, (56), (57) в случае $m = k$) правила слияния, перестановочные соотношения, бесконечномерные алгебры динамических симметрий и их представления и т.д., взятые для деформированных вершинных операторов $\Phi_{\pm m}^k(z)$, переходят в “конформном” пределе ($x \rightarrow 1$ при фиксированном z) в соответствующие объекты и соотношения для киральных примарных составляющих $\phi_{\pm m}^k(z)$. Это отчетливо видно при сравнении соответствующих соотношений в разделах 2 и 3. Единственное явное несоответствие между операторами $\Phi_{\pm m}^k$ (в “конформном” пределе) и операторами $\phi_{\pm m}^k$ содержится в предписаниях их нормировок. Для решеточных вершинных операторов нормировка следует (при всех $-N \leq m < N$) из (49), а для конформных киральных полей она определяется в (24).

В настоящем разделе производится анализ различий между этими нормировками и обсуждаются его возможные применения к вычислению точных ВС скейлинговых полей.

4.1. ВС и нормировки вершинных операторов. В дальнейшем расширим прямую аналогию между киральными примарными составляющими и решеточными вершинными операторами, налагая на последние “конформную” нормировку.

Вернемся к анализу ВС решеточных параметров беспорядка (41) в скейлинговом пределе. Исследуя поведение локальных вероятностей $P_{k+1}(m)$ при модулярном преобразовании, можно обнаружить, что средние от всех параметров порядка задаются функцией характера $\chi_{m,k}(t^2) \equiv \text{Tr}_{m,k}(t^{2D})$ (40) W_N -алгебры. Эта функция представляет собой ряд, состоящий из членов вида $t^{2\Delta_m^k + 2n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Часть углового гамильтониана (которая отвечает осциллирующим модам D_{osc} (54) оператора градуировки) дает вклады с $n > 0$. Она становится значимой при анализе скейлинговых свойств полей потомков. Для примарных скейлинговых полей ведущих

порядок по параметру t (42) определяется членом D_0 из оператора углового гамильтониана. Оператор D_0 имеет собственное значение Δ_m^k при ограничении на пространство $\mathcal{L}_{m,k}$. Бозонная реализация этого оператора задана в (54). Чтобы исследовать случай примарных полей, можно переписать соотношение (41) в терминах вершинных операторов как³⁾

$$\hat{P}_{k+1}(m) = t^{2\Delta_m^k} = \sqrt{\frac{h(k+1)}{h(1)}} \langle I | \Phi_{-m}^k(x^{2u}) t^{2D_0} \Phi_m^k(x^{2u}) | I \rangle. \quad (62)$$

До сих пор мы просто описывали алгебраическую интерпретацию выражения для ВС решеточного параметра порядка. Теперь перейдем к анализу влияния выбора различных нормировок вершинных операторов. Заметим, что нормировка решеточных операторов $\Phi_{\pm m}^k$ (49) была получена из нормировки больцмановских весов (45). Рассмотрим конформный предел $x \rightarrow 1$, в котором переменные u_1 и u_2 берутся большими и такими, что $z_j = x^{2u_j}$, $j = 1, 2$, фиксированы. Получим, что в этом пределе при $u_1 \rightarrow u_2$ будет иметь место следующее соотношение:

$$\mathcal{N}_{m,k} \langle I | \Phi_{-m}^k(x^{2u_2}) \Phi_m^k(x^{2u_1}) | I \rangle = \frac{1}{(u_1 - u_2)^{2\Delta_m^k}}. \quad (63)$$

Здесь число $\mathcal{N}_{m,k}$, вообще говоря, не равно единице. В дальнейшем будем его называть отношением между “конформной” и решеточной нормировками. Если перенормировать вершинные операторы и рассмотреть операторы $\mathcal{N}_{m,k}^{1/2} \Phi_{\pm m}^k(x^{2u})$, то в конформном пределе их двухточечные матричные элементы будут иметь такой же вид, как и в случае киральных примарных полей, что видно из соотношения (63). Однако ВС параметров беспорядка в этой нормировке будут отличаться от решеточных ВС (62) на множитель $\mathcal{N}_{m,k}$. Обозначим их как $\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle$:

$$\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle = \mathcal{N}_{m,k} \hat{P}_{k+1}(m) = \mathcal{N}_{m,k} t^{2\Delta_m^k}. \quad (64)$$

Было проверено [27], что похожие выражения для минимальных моделей ККТП [12], возмущенных температурным оператором [4], совпадают с точными ВС примарных скейлинговых полей в конформной нормировке [11]. Мы выдвигаем предположение, что это же заключение остается справедливым и для скейлинговых моделей (2), т.е. выражение (64) для $\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle$ представляет собой точное ВС возмущенного примарного поля $\phi_{m,-m}^{k,k}$ в конформной нормировке (24).

4.2. ВС для полей беспорядка. Разберем сначала случай $m = k$ и вычислим числовую константу $\mathcal{N}_{k,k}$. Рассмотрим матричный элемент произведения двух полученных в результате слияния операторов вида

$$\langle I | \Phi_{-k}^k(x^{2u_2}) \Phi_k^k(x^{2u_1}) | I \rangle. \quad (65)$$

³⁾ Исследование нормировок формфакторов скейлинговых операторов требует более общего выражения, которое учитывало бы член с осциллирующими модами D_{osc} [22]. Сходная алгебраическая процедура приводит в этом случае к соотношениям (4), (64), (70) для полной нормировки формфакторов примарных операторов.

Имея предписание бозонизации, мы получаем выражение для этого матричного элемента с помощью теоремы Вика. Детали вычисления содержатся в приложении А. Собирая воедино результаты (59), (60) и (П.6)–(П.8), получим

$$\langle I | \Phi_{-k}^k(x^{2u_2}) \Phi_k^k(x^{2u_1}) | I \rangle = \sqrt{\frac{h(1)}{h(k+1)}} \frac{Q_k(x^{2(u_1-u_2)})}{Q_k(1)}, \quad (66)$$

где

$$Q_k(\zeta) = g_k^{-1}(\zeta) \zeta^{d_k} \frac{(\zeta x^{2N+2} | x^{2(N+2)})_\infty}{(\zeta x^{2N-2k+2} | x^{2(N+2)})_\infty}. \quad (67)$$

Заметим, что выражение (66) совместно с решеточным условием нормировки. Это легко увидеть, если рассмотреть случай $u_1 = u_2$ и сравнить полученный результат с (49).

Вычислим теперь константу $\mathcal{N}_{k,k}$, которая представляет собой отношение между решеточной нормировкой (49) и “конформной” нормировкой

$$\mathcal{N}_{k,k} \langle I | \Phi_{-k}^k(x^{2u_2}) \Phi_k^k(x^{2u_1}) | I \rangle = \frac{1}{(u_1 - u_2)^{2d_k}}, \quad x \rightarrow 1, \quad u_1 \rightarrow u_2, \quad (68)$$

выбирая большие значения u_j так, что $z_j = x^{2u_j}$ остаются конечными, а затем устремляя $z_1 \rightarrow z_2$. Применяя результаты приложения Б, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{k,k} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left((-2 \ln x)^{2d_k} \sqrt{\frac{h(k+1)}{h(1)}} Q_k(1) \right) = \frac{1}{(N+2)^{2d_k}} \times \\ &\times \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}(kt) \text{sh}[(N-k)t] \text{ch}(Nt)}{\text{sh}(Nt) \text{sh}[(N+2)t]} - 2d_k e^{-2(N+2)t} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Предлагаемое выражение для точных ВС полей беспорядка μ_k в конформной нормировке (24) теперь имеет вид

$$\langle \phi_{k,-k}^{k,k} \rangle = (C_0 M)^{2d_k} \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}(kt) \text{sh}[(N-k)t] \text{ch}(Nt)}{\text{sh}(Nt) \text{sh}[(N+2)t]} - 2d_k e^{-2(N+2)t} \right), \quad (70)$$

что следует из (42) и (64). Напомним, что не зависящая от k константа C_0 была введена в (42). Она фиксируется нормировкой первого температурного оператора ε_1 в п. 4.3.

4.3. ВС операторов $\phi_{m,-m}^{kk}$. Динамическая алгебра симметрии модели АБФ в режиме II оказывается деформированной парафермионной алгеброй [22]. Основные генераторы алгебры Ψ и $\Psi^\dagger$ (которые представляют собой деформации стандартных парафермионных токов) удовлетворяют перестановочным соотношениям (25). Удобно изучать эту алгебру в рамках представления свободных полей [20], [21]. А именно, определим

$$\begin{aligned} \Psi(x^{2u}) &= -\frac{1}{x - x^{-1}} (\Psi_+(x^{2u}) - \Psi_-(x^{2u})), \\ \Psi^\dagger(x^{2u}) &= \frac{1}{x - x^{-1}} (\Psi_+^\dagger(x^{2u}) - \Psi_-^\dagger(x^{2u})), \end{aligned} \quad (71)$$

где операторы $\Psi_a(z)$ и $\Psi_a^\dagger(z)$ могут быть записаны в терминах деформированных бозонных полей (51) в следующем виде ($a = \pm$ и $z = x^{2u}$):

$$\begin{aligned}\Psi_a(z) &= z^{-1/N} : e^{-\phi_2(N|z; -N/2) - a\phi_1^{(a)}(1; 2|zx^{-aN/2}) - a\phi_2^{(a)}(1; 2|zx^{-a(N+2)/2})} :, \\ \Psi_a^\dagger(u) &= z^{-1/N} : e^{\phi_2(N|z; N/2) + a\phi_1^{(a)}(1; 2|zx^{aN/2}) - a\phi_2^{(a)}(1; 2|zx^{a(N+2)/2})} :.\end{aligned}\quad (72)$$

В п. 4.2 были изучены нормировки вершинных операторов $\Phi_{\pm k}^k$ и предложены точные формулы для ВС полей беспорядка $\mu_k = \phi_{k, -k}^{k, k}$. Чтобы расширить конструкцию для ВС на случай общих примарных полей $\phi_{m, -m}^{k, k}$, применим деформированный аналог (61) правил слияния (15) и (17). Процедура бозонизации для операторов $\Phi_{\pm m}^k$ выглядит очень похоже на правила (59), поскольку парафермионные токи коммутируют с экранирующим зарядом и с БРСТ-зарядом:

$$\begin{aligned}\Phi_m^k(x^{2u})|I\rangle &= V_{m, k}(x^{2u})|0, 0\rangle, \\ \langle I|\Phi_{-m}^k(x^{2u}) &= f_k\langle 0, 0|V_{m, k}^*(x^{2u})X^k(x^{2u}).\end{aligned}\quad (73)$$

Из (61) следует, что деформированные экспоненциальные поля $V_{m, k}(z)$ и $V_{m, k}^*(z)$ можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}V_{m, k}(z) &= :V_k(z) \prod_{s=0}^{l-1} \Psi_+^\dagger(zx^{N+k-2s}) :, \\ V_{m, k}^*(z) &= :V_k^*(z) \prod_{s=0}^{l-1} \Psi_-(zx^{k-2s}) :,\end{aligned}\quad (74)$$

где $m = k - 2l$. В самом деле, применяя (П.14), (П.15) из приложения В, можно видеть, что правила слияния для этих полей удовлетворяют соотношениям

$$V_{m, k}(z)\Psi_-^\dagger(zx^{N+m}) = 0, \quad V_{m, k}^*(z)\Psi_+(zx^m) = 0.$$

Поэтому только одна компонента тока $\Psi_\pm$ или $\Psi_\pm^\dagger$ дает вклад в процедуру бозонизации для полученных в результате слияния операторов (61).

Чтобы предсказать точные соотношения между ВС $\langle \phi_{m, -m}^{k, k} \rangle / \langle \phi_{m+2, -2-m}^{k, k} \rangle$, необходимо вычислить отношение нормировочных множителей $\mathcal{N}_{m, k} / \mathcal{N}_{m+2, k}$, заданных в (63), и применить соотношение

$$\frac{\langle \phi_{m, -m}^{k, k} \rangle}{\langle \phi_{m+2, -2-m}^{k, k} \rangle} = (C_0 M(N+2))^{\Delta_m^k - \Delta_{m+2}^k} \frac{\mathcal{N}_{m, k}}{\mathcal{N}_{m+2, k}}. \quad (75)$$

Технически наиболее простой способ найти число $\mathcal{N}_{m, k} / \mathcal{N}_{m+2, k}$ основан на том наблюдении, что экранирующие операторы, возникающие в процедуре бозонизации матричных элементов вершинных операторов

$$\frac{\langle I|\Phi_{-m}^k(x^{2u_2})\Phi_m^k(x^{2u_1})|I\rangle}{\langle I|\Phi_{-2-m}^k(x^{2u_2})\Phi_{m+2}^k(x^{2u_1})|I\rangle} = \frac{G_{m, k}(x^{2(u_1-u_2)})}{G_{m, k}(1)}, \quad (76)$$

дают лишь тривиальный вклад в эту величину. Заметим, что соотношение (76) находится в согласии с условием решеточной нормировки, поскольку в случае $u_1 = u_2$ видно, что отношение матричных элементов равно единице. Таким образом, для наших целей можно ограничиться рассмотрением экспоненциальных полей (74) и определить

$$G_{m,k}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\langle V_{m,k}^*(z_2)V_{m,k}(z_1) \rangle}{\langle V_{m+2,k}^*(z_2)V_{m+2,k}(z_1) \rangle}. \quad (77)$$

Эту функцию легко вычислить с помощью формул (П.14), (П.15) из приложения В и коммутационных соотношений между нулевыми модами (51). В результате получим

$$G_{m,k}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{(m+1)/N} \frac{(x^{2N+k+m+2} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty (x^{2N-k+m} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty}{(x^{2N-k-m-2} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty (x^{2N+k-m} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty}. \quad (78)$$

Следуя предложенной нами процедуре, необходимо найти конформный предел отношения (76), устремив $x \rightarrow 1$ при фиксированных переменных $z_1 = x^{2u_1}$ и $z_2 = x^{2u_2}$ и рассмотрев случай, в котором u_1 близко к u_2 . С помощью формулы (32) получим

$$G_{m,k}(1) = (1 - x^{2N})^{-2(m+1)/N} \frac{\Gamma_{x^{2N}}(1 - (k+m+2)/(2N))}{\Gamma_{x^{2N}}(1 + (k+m+2)/(2N))} \times \\ \times \frac{\Gamma_{x^{2N}}(1 + (k-m)/(2N))}{\Gamma_{x^{2N}}(1 - (k-m)/(2N))}. \quad (79)$$

Скейлинговый предел функции $G_{m,k}(1)$ находится достаточно легко. В самом деле, в пределе $q \rightarrow 1$ отношения деформированных гамма-функций $\Gamma_q(a)$ становятся соответствующими отношениями обычных гамма-функций $\Gamma(a)$. Из (28) следует (см. также обсуждение соотношений (29)–(31)), что в окрестности точки $x = 1$ имеет место равенство

$$G_{m,k}(\zeta) = \frac{\zeta^{(m+1)/N}}{(1 - \zeta)^{2(m+1)/N}} + O(\ln x). \quad (80)$$

Здесь было использовано обозначение $\zeta = x^{2(u_1 - u_2)}$. Заметим, что функция $G_{m,k}$ имеет правильное скейлинговое поведение в конформном пределе, поскольку разность $\Delta_m^k - \Delta_{m+2}^k$, как следует из (18), равна $(m+1)/N$. Используя (76), (79) и (80), получим простой результат для отношения нормировочных констант (63):

$$\frac{\mathcal{N}_{m,k}}{\mathcal{N}_{m+2,k}} = N^{-2(m+1)/N} \frac{\Gamma(1 - (k+m+2)/(2N)) \Gamma(1 + (k-m)/(2N))}{\Gamma(1 + (k+m+2)/(2N)) \Gamma(1 - (k-m)/(2N))}. \quad (81)$$

С учетом равенства (75) отсюда следует элегантное соотношение между ВС операторов $\phi_{m,-m}^{k,k}$ и $\phi_{m+2,-m-2}^{k,k} = (\psi)(\bar{\psi}^\dagger)\phi_{m,-m}^{k,k}$ в конформной нормировке:

$$\frac{\langle \phi_{m,-m}^{k,k} \rangle}{\langle \phi_{m+2,-m-2}^{k,k} \rangle} = \frac{(C_0 M(N+2)/N)^{2\Delta_m^k}}{(C_0 M(N+2)/N)^{2\Delta_{m+2}^k}} \times \\ \times \frac{\Gamma(1 - (k+m+2)/(2N)) \Gamma(1 + (k-m)/(2N))}{\Gamma(1 + (k+m+2)/(2N)) \Gamma(1 - (k-m)/(2N))}. \quad (82)$$

В случае $k = 2, m = 0$ получим ВС первого температурного оператора ε_1 , который представляет собой возмущающее поле модели (2). Применяя соотношение [10], связывающее константу связи и массу M наилегчайшей частицы (3), и используя нормировку тензора энергии-импульса, можно фиксировать константу C_0 , которая равна

$$C_0 = \frac{\Gamma(2/N)\Gamma(1 - 1/N)}{\Gamma(1/N)}. \quad (83)$$

Алгебраический вывод соотношения (70) и выражений (82), (83) представляет собой основной результат данной работы. С помощью этих формул можно вычислить ВС (4) для всех полей $\phi_{m,-m}^{k,k}$ в конформной нормировке (24).

Заметим, что при четных значениях параметра k интеграл в выражении (70) можно вычислить аналитически, что даст для ВС оператора беспорядка $\mu_{2k} = \phi_{2k,-2k}^{2k,2k}$ простое выражение:

$$\begin{aligned} \langle \mu_{2k} \rangle &= (MC_0)^{2d_{2k}} \left(\frac{\gamma(1/(N+2))}{\gamma((2k+1)/(N+2))} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\frac{N+2}{N} \right)^{k(N-2k)/N} \prod_{i=1}^k \frac{\gamma((2i-1)/N)}{\gamma((2i-1)/(N+2))}. \end{aligned} \quad (84)$$

Параметры порядка μ_{2k} связаны действием парафермионных токов с температурными полями $\varepsilon_k = \phi_{0,0}^{2k,2k} = (\psi)^k (\bar{\psi})^k \mu_{2k}$. По этой причине ВС всех температурных полей выражаются в терминах гамма-функций (см. (70), (84)):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_k \rangle &= (MC_0)^{2D_k} \left(\frac{N+2}{N} \right)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} \left(\frac{\gamma((2k+1)/(N+2))}{\gamma(1/(N+2))} \right)^{1/2} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \frac{\gamma^2(i/N)}{\gamma(2i/N)\gamma((2i+1)/(N+2))}. \end{aligned} \quad (85)$$

Можно проверить, что в случае $N = 2$ формула (70) воспроизводит хорошо известный результат для ВС поля беспорядка в модели Изинга [32]. ВС $\langle \mu_1 \rangle$ при всех $N = 2, 3, \dots$ уже появлялось в работе [14]. Мы также проверили, что ВС операторов $\phi_{m,-m}^{k,k}$ в конформной нормировке (24) совпадают с соответствующими выражениями, найденными с помощью метода отражательных уравнений в возмущенной ККТП с симметрией W_N [14] и с центральным зарядом (1).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисление матричного элемента

Для краткости используем в этом приложении отождествления $\zeta_j = x^{2u_j}$, $j = 1, 2$, и $z_j = x^{2v_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Применяя предписание бозонизации для вершинных операторов и симметризуя подынтегральное выражение (см. [35]), можно переписать

матричный элемент (65) в терминах кратных контурных интегралов:

$$G_{k,k}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right) = f_k \langle 0, 0 | V_k^*(\zeta_2) X(\zeta_2)^k V_k(\zeta_1) | 0, 0 \rangle =$$

$$= \frac{f_k}{(x - x^{-1})^k} \oint \underline{dz}_1 \dots \underline{dz}_k G(\zeta_1, \zeta_2 | z_1, \dots, z_k) f(\zeta_2 | z_1, \dots, z_k), \quad (\text{П.1})$$

где $\underline{dz} := dz/(2\pi iz)$ и введены краткие обозначения для матричного элемента экспоненциальных операторов в пространстве Фока и для отношения тета-функций:

$$G(\zeta_1, \zeta_2 | v_1, \dots, v_k) = \sum_{a_1, \dots, a_n = \pm} \langle 0, 0 | V_k^*(\zeta_2) S_{a_1}(z_1) \dots S_{a_k}(z_k) V_k(\zeta_1) | 0, 0 \rangle,$$

$$f(x^{2u} | x^{2v_1}, \dots, x^{2v_k}) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{h(v_j - v_i)}{h(v_j - v_i - 1)} \times$$

$$\times \left\langle -k, k \left| \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{h(v_j - u + \mathcal{P}_1 - k/2 + 1)}{h(v_j - u + k/2)} \right| k, k \right\rangle.$$

Матричный элемент f получается, если подставить значение нулевой моды $\mathcal{P}_1 \rightarrow k$ (см. (52)). Применяя теорему Вика и определения бозонных полей, получим, что матричный элемент для осциллирующих мод оказывается произведением соответствующих двухточечных спариваний:

$$g_k^*\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \langle V_k^*(z_2) V_k(z_1) \rangle, \quad g_k\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \langle V_k(z_2) V_k(z_1) \rangle,$$

$$w_k\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \langle S_{\pm}(z_2) V_k(z_1) \rangle, \quad v_{k,a}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \langle V_k^*(z_2) S_a(z_1) \rangle, \quad (\text{П.2})$$

$$g_{a,b}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \langle S_a(z_2) S_b(z_1) \rangle,$$

которые в терминах функций (26) имеют вид

$$g_k(\zeta) = \frac{(x^{2N+2}\zeta | x^{2N}, x^{2(N+2)})_{\infty}^2}{(x^{2N+2+2k}\zeta | x^{2N}, x^{2(N+2)})_{\infty} (x^{2N+2-2k}\zeta | x^{2N}, x^{2(N+2)})_{\infty}},$$

$$g_k^*(\zeta) = g_k(\zeta)^{-1} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(x^{2N+2-2s}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}{(x^{2N+4-2s}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}},$$

$$w_k(\zeta) = \frac{(x^{2N+k+2}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}{(x^{2N+2-k}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}, \quad (\text{П.3})$$

$$v_{k,a}(\zeta) = \frac{1 - \zeta x^{ak}}{1 - \zeta x^k} \frac{(x^k\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}{(x^{-k}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}},$$

$$g_{a,b}(\zeta) = \frac{1 - \zeta x^{a-b}}{1 - \zeta x^{-2}} \frac{(x^{-2}\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}{(x^2\zeta | x^{2(N+2)})_{\infty}}.$$

Учитывая также вклад нулевых мод, полезно изменить подынтегральное выражение с помощью тригонометрического тождества

$$\begin{aligned} \sum_{a_j=\pm} \prod_{1 \leq j \leq k} (-1)^{(a_j+1)/2} x^{-a_j(k-j)} \frac{1 - z_j x^{a_j k}}{1 - z_j x^k} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1 - z_j x^{i-j}/z_i}{1 - z_j x^{-2}/z_i} = \\ = \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{(x^j - x^{-j}) z_j}{1 - z_j x^k} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1 - z_j/z_i}{1 - z_j x^{-2}/z_i}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

из которого следует факторизация подынтегрального выражения. Наконец, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} G_{k,k} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right) &= \frac{h(k)!}{h(1)^k k!} \frac{f_k x^{-k}}{(x^{2(N+2)} | x^{2(N+2)})_\infty} g_k^* \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right) \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right)^{d_k} \times \\ &\times \prod_{j=1}^k \frac{x^j - x^{-j}}{x - x^{-1}} \oint \frac{dz_1 \dots dz_k}{\prod_{i \neq j} \frac{(z_i/z_j | x^{2(N+2)})_\infty}{(z_i x^2/z_j | x^{2(N+2)})_\infty}} \times \\ &\times \prod_{j=1}^k \left(\frac{E(\zeta_1/z_j x^{N+k+2} | x^{2(N+2)})}{(z_j x^{N+2-k}/\zeta_1 | x^{2(N+2)})_\infty (\zeta_1 x^{N+2-k}/z_j | x^{2(N+2)})_\infty} \times \right. \\ &\times \left. \frac{E(z_j/\zeta_2 x^{k+2} | x^{2(N+2)})}{(z_i x^{-k}/\zeta_2 | x^{2(N+2)})_\infty (\zeta_2 x^{-k}/z_j | x^{2(N+2)})_\infty} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где, как и прежде, $d_k = k(N-k)/[N(N+2)]$. Окончательный кратный интеграл имеет вид, схожий с q -сельберговским интегралом [36] ($q = x^{2(N+2)}$). Его можно вычислить, и в результате получим

$$G_{k,k}(\zeta) = \sqrt{\frac{h(1)}{h(k+1)}} \frac{Q_k(\zeta)}{Q_k(1)}, \quad (\text{П.6})$$

где

$$Q_k(\zeta) = g_k^*(\zeta) \zeta^{d_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(\zeta x^{2N+2s+4} | x^{2(N+2)})_\infty}{(\zeta x^{2N-2k} | x^{2(N+2)})_\infty}. \quad (\text{П.7})$$

Применяя соотношения между функциями g_k и g_k^* , перепишем функцию Q_k в окончательном виде:

$$Q_k(\zeta) = g_k(\zeta)^{-1} \zeta^{d_k} \frac{(\zeta x^{2N+2} | x^{2(N+2)})_\infty}{(\zeta x^{2N-2k+2} | x^{2(N+2)})_\infty}. \quad (\text{П.8})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пределы функции Q_k

В этом приложении рассмотрим пример нахождения “конформного” предела, который применяется для вывода ВС. Рассмотрим случай полей беспорядка. Запишем в экспоненциальном виде множитель g_k , входящий в определение функции $Q_k(\zeta)$:

$$g_k(\zeta)^{-1} = \exp \left(- \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{\text{sh}^2(k s \delta)}{\text{sh}(N s \delta) \text{sh}[(N+2)s \delta]} \zeta^s \right), \quad (\text{П.9})$$

где введено обозначение $x = e^{-\delta}$. Теперь в конформном пределе будем считать, что $\delta \rightarrow 0$ и переменная ζ фиксирована. Заменяя все функции $\text{sh}(a\delta)$ на их аргументы $a\delta$, получим

$$\begin{aligned} g_k(\zeta)^{-1} &\rightarrow (1 - \zeta)^{k^2/(N(N+2))}, \\ \frac{(\zeta x^{2N+2} | x^{2N+4})_\infty}{(\zeta x^{2N-2k+2} | x^{2N+4})_\infty} &\rightarrow (1 - \zeta)^{-k/(N+2)}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Рассмотрим теперь случай $\zeta = 1$. Можно проверить, что при переходе от суммирования по s к предельному интегрированию члены порядка δ^{-2} и δ^{-1} исчезают. Тогда поведение функций при $\delta \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_k(1)^{-1} &\rightarrow (2(N+2)\delta)^{k^2/(N(N+2))} \times \\ &\times \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(-\frac{\text{sh}^2(kt)}{\text{sh}(Nt) \text{sh}[(N+2)t]} + \frac{k^2}{N(N+2)} e^{-2(N+2)t} \right), \\ \frac{(x^{2N+2} | x^{2N+4})_\infty}{(x^{2N-2k+2} | x^{2N+4})_\infty} &\rightarrow \sqrt{\frac{\sin[\pi/(N+2)]}{\sin[(k+1)\pi/(N+2)]}} (2(N+2)\delta)^{k/(N+2)} \times \\ &\times \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}(kt) \text{ch}[(N-k)t]}{\text{sh}[(N+2)t]} - \frac{k}{(N+2)} e^{-2(N+2)t} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Принимая в расчет это уравнение и вклады от оставшихся членов, получим

$$\begin{aligned} Q_k(x^{2(u_1-u_2)}) &\rightarrow \frac{1}{(2(u_1-u_2)\delta)^{2d_k}}, \\ Q_k(1) &= \frac{1}{(2(N+2)\delta)^{2d_k}} \sqrt{\frac{\sin[\pi/(N+2)]}{\sin[\pi(k+1)/(N+2)]}} \times \\ &\times \exp \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\text{sh}(kt) \text{sh}[(N-k)t] \text{ch}(Nt)}{\text{sh}(Nt) \text{sh}[(N+2)t]} - 2d_k e^{-2(N+2)t} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Отметим, наконец, что в скейлинговом пределе $x \rightarrow 1$ при конечных переменных u и v отношение функций $h(u)$ и $h(v)$ имеет вид

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(u)}{h(v)} = \frac{\sin[\pi u/(N+2)]}{\sin[\pi v/(N+2)]}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Деформированные парафермионы

При анализе нормировок поля $\Phi_{\pm m}^k$ нам потребуются точные формулы для двухточечных спариваний, включая спаривания для экспоненциальных полей, входящих в выражения для бозонизации деформированных парафермионных токов. Соберем воедино вклады от осциллирующих мод. Для компонент деформированного парафермионного тока Ψ_a с $a = \pm$ найдем, что все вклады от осциллирующих мод

даются в терминах функции

$$s_k(\zeta, a) = \frac{(x^{a-k}\zeta | x^{2N})_\infty}{(x^{a+k}\zeta | x^{2N})_\infty} \quad (\text{П.13})$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+(z_2) V_k(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, N\right), & \langle \Psi_a^\dagger(z_2) V_k(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 2N\right), \\ \langle \Psi_-(z_2) V_k(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, 3N\right), & \langle V_k(z_2) \Psi_a^\dagger(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 0\right), \\ \langle V_k(z_2) \Psi_+(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, N\right), & \langle \Psi_+^\dagger(z_2) V_k^*(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 2N\right), \\ \langle V_k(z_2) \Psi_-(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, -N\right), & \langle V_k(z_2) \Psi_-^\dagger(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 0\right), \\ \langle \Psi_a(z_2) V_k^*(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, N\right), & \langle V_k^*(z_2) \Psi_+^\dagger(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 0\right), \\ \langle V_k^*(z_2) \Psi_a(z_1) \rangle &= s_k\left(\frac{z_1}{z_2}, N\right), & \langle V_k^*(z_2) \Psi_-^\dagger(z_1) \rangle &= s_{-k}\left(\frac{z_1}{z_2}, 2N\right). \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Наконец, единственным спариванием собственно между токами, которое понадобится в вычислениях, оказывается

$$\langle \Psi_-(z_2) \Psi_+^\dagger(z_1) \rangle = \frac{(x^{N-2} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty}{(x^{N+2} \frac{z_1}{z_2} | x^{2N})_\infty}. \quad (\text{П.15})$$

Благодарности. Авторы благодарны М. Джимбо, С. Лукьянову и М. Лашкевичу за полезные обсуждения. Работа финансировалась в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2004.2003.2) и контракта EUCLID HRPN-CT-2002-00325. Один из авторов (Я. Пугай) был также поддержан Фондом содействия отечественной науке, РФФИ (грант № 05-01-01007) и грантом Президента РФ для молодых ученых и ведущих научных школ МД-3702.2005.2.

Список литературы

- [1] V. A. Fateev, V. V. Postnikov, Y. P. Pugai, *Письма в ЖЭТФ*, **83** (2006), 206–212.
- [2] А. Б. Замолодчиков, В. А. Фатеев, *ЖЭТФ*, **89:2** (1985), 380–399.
- [3] А. Б. Замолодчиков, В. А. Фатеев, *ЖЭТФ*, **90:5** (1986), 1808–1818.
- [4] A. B. Zamolodchikov, “Integrable field theory from conformal field theory”, *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., **19**, ed. M. Jimbo, Academic Press, Boston, MA, 1989, 641–674.
- [5] V. A. Fateev, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6:12** (1991), 2109–2132.
- [6] R. Köberle, J. A. Swieca, *Phys. Lett. B*, **86** (1979), 209–210.
- [7] A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **348:3** (1991), 619–641.
- [8] F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [9] A. B. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10** (1995), 1125–1150.
- [10] V. A. Fateev, *Phys. Lett. B*, **324:1** (1994), 45–51.

- [11] S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **493**:3 (1997), 571–587; V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **516**:3 (1998), 652–674.
- [12] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [13] V. A. Fateev, *Normalization factors, reflection amplitudes and integrable systems*, [arXiv: hep-th/0103014](#).
- [14] V. A. Fateev, *Modern Phys. Lett. A*, **15**:4 (2000), 259–270.
- [15] V. Fateev, D. Fradkin, S. Lukyanov et al., *Nucl. Phys. B*, **540**:3 (1999), 587–609; P. Basileilhac, M. Stanishkov, *Phys. Lett. B*, **554** (2003), 217–222; [arXiv: hep-th/0212342](#); A. B. Zamolodchikov, *Expectation value of composite field $T\bar{T}$ in two-dimensional quantum field theory*, [arXiv: hep-th/0401146](#); G. Delfino, G. Niccoli, *J. Stat. Mech.*, **0504** (2005), P004; [arXiv: hep-th/0501173](#).
- [16] G. E. Andrews, R. J. Baxter, P. J. Forrester, *J. Statist. Phys.*, **35** (1984), 193–266.
- [17] B. Davies, F. Omar, J. Michio et al., *Comm. Math. Phys.*, **151**:1 (1993), 89–153.
- [18] S. Lukyanov, *Comm. Math. Phys.*, **167**:1 (1995), 183–226; *Modern Phys. Lett. A*, **12**:33 (1997), 2543–2550; *Phys. Lett. B*, **408** (1997), 192–200.
- [19] S. Lukyanov, Y. Pugai, *ЖЭТФ*, **109**:6 (1996), 1900–1947; *Nucl. Phys. B*, **473**:3 (1996), 631–658.
- [20] A. Matsuo, *Comm. Math. Phys.*, **160**:1 (1994), 33–48.
- [21] H. Konno, *Comm. Math. Phys.*, **195**:2 (1998), 373–403.
- [22] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, Y. Pugai, et al., *J. Statist. Phys.*, **102** (2001), 883–921.
- [23] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348; *Nucl. Phys. B*, **251**:5–6 (1985), 691–734.
- [24] V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin, *Progr. Theoret. Phys.*, 1990, 301–318, Suppl. No 102.
- [25] F. A. Smirnov, *Comm. Math. Phys.*, **132**:2 (1990), 415–439; А. Н. Кириллов, Ф. А. Смирнов, *Локальные поля в скейлинговой теории поля, связанной с трехпозиционной моделью Поттса*, Препринт ИТФ-88-73Р, Инт-т теор. физ., Киев, 1988.
- [26] H. Babujian, A. Foerster, M. Karowski, *Nucl. Phys. B*, **736** (2006), 169–198; [arXiv: hep-th/0510062](#).
- [27] Y. Pugai, *Письма в ЖЭТФ*, **79**:10 (2004), 569–574.
- [28] А. Б. Замолотчиков, *ТМФ*, **65** (1985), 347–359; V. Fateev, S. Lukyanov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **3**:2 (1988), 507–520.
- [29] D. Nemeschansky, *Phys. Lett. B*, **224** (1989), 121–124.
- [30] D. Huse, *Phys. Rev. B*, **30**:7 (1984), 3908–3915.
- [31] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [32] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, *Phys. Rev. B*, **13** (1976), 316–374.
- [33] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, et al., “Exactly solvable SOS models. II. Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities”, *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models* (Kyoto, 1986), Adv. Stud. Pure Math., **16**, eds. M. Jimbo, T. Miwa, A. Tsuchiya, Academic Press, Orlando, FL, 1988, 17–122.
- [34] B. Feigin, E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.*, **178** (1996), 653–677; H. Awata, H. Kubo, S. Odake, J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.*, **179**:2 (1996), 401–415.
- [35] M. Jumbo, M. Lashkevich, T. Miwa, Y. Pugai, *Phys. Lett. A*, **229** (1997), 285–292.
- [36] V. Tarasov, A. Varchenko, *Astérisque*, **246**, 1997, 1–135; [arXiv: q-alg/9703044](#).