Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Коваль, В. П. Маслов, Об обобщении метода БКШ для парных взаимодействий, *ТМФ*, 2008, том 154, номер 3, 584–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:10:47

© 2008 г.

Г. В. Коваль*, В. П. Маслов*

ОБ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА БКШ ДЛЯ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Для ультравторично-квантованных задач рассматривается переход к уравнениям, зависящим от температуры.

Ключевые слова: L -А-пара, сверхтекучесть, гамильтониан, модель БКШ, фермионы.

В статье [1] показано, что асимптотика серий собственных значений системы N тождественных фермионов в пределе при $N \rightarrow \infty$ определяется решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\Omega\Phi(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y)\right)\Phi(x, y) + \\ &\quad + 2 \iint dz dw (V(x, y) + V(z, w))\Phi^+(z, w)\Phi(x, z)\Phi(w, y), \\ \Omega\Phi^+(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y)\right)\Phi(x, y) + \\ &\quad + 2 \iint dz dw (V(x, z) + V(y, w))\Phi^+(x, z)\Phi^+(w, y)\Phi(z, w),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x, y \in \mathcal{M}$ – координаты частиц, пространство $\mathcal{M}$ определяется конкретной задачей, например это может быть $\mathbb{R}^3$ или трехмерный тор, Δ_x, Δ_y – операторы Лапласа, действующие по соответствующей переменной x или y , $U(x)$ – потенциал внешнего поля, $V(x, y)$ – потенциал взаимодействия, симметричный относительно перестановки переменных x и y , m – масса частиц, $\hbar$ – постоянная Планка, Ω – действительное число. Функции $\Phi(x, y), \Phi^+(x, y) \in L_2(\mathcal{M})$ антисимметричны относительно перестановок переменных x и y и удовлетворяют условию

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y)\Phi(x, y) = \frac{N}{2}.\tag{2}$$

Уравнения (1) получаются из системы уравнений Гамильтона, которая отвечает истинному символу [1] ультравторично-квантованного по парам оператора Гамильтона системы фермионов. Напомним понятия ультравторичного квантования по парам и истинного символа. Пространством ультравторичного квантования в случае

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: kovgen@mail.ru, v.p.maslov@mail.ru

квантования по парам [1] является бозонное пространство Фока $\mathcal{F}$ [2]. Элементами этого пространства являются векторы вида

$$\Phi = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M!}} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{2M} \Phi_M(x_1, x_2, \dots, x_{2M-1}, x_{2M}) \times \\ \times \hat{B}^+(x_1, x_2) \dots \hat{B}^+(x_{2M-1}, x_{2M}) \Phi_0, \quad (3)$$

где Ψ_0 – вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{F}$, $\hat{B}^+(x, y)$ – операторы рождения пары в $\mathcal{F}$, $x_i \in \mathcal{M}$ при всех $i = 1, 2, \dots$, а $\Phi_M(x_1, \dots, x_{2M}) \in L_2(\mathcal{M}^{2M})$ при всех $M = 1, 2, \dots$ – функции, симметричные относительно перестановки пар переменных (x_{2i-1}, x_{2i}) и (x_{2j-1}, x_{2j}) при всех $i, j = 1, \dots, M$, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{M=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{2M} |\Phi_M(x_1, \dots, x_{2M})|^2 < \infty. \quad (4)$$

Скалярное произведение векторов Φ и $\tilde{\Phi}$ имеет вид

$$(\tilde{\Phi}, \Phi) = \sum_{M=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{2M} \tilde{\Phi}_M^*(x_1, \dots, x_{2M}) \Phi_M(x_1, \dots, x_{2M}). \quad (5)$$

Операторы рождения $\hat{B}^+(x, y)$ и уничтожения $\hat{B}^-(x, y)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{B}^-(x, y), \hat{B}^-(z, w)] = [\hat{B}^+(x, y), \hat{B}^+(z, w)] = 0, \\ [\hat{B}^-(x, y), \hat{B}^+(z, w)] = \delta(x - z)\delta(y - w) \quad \forall x, y, z, w \in \mathcal{M}, \quad (6)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Кроме того, выполняется равенство

$$\hat{B}^-(x, y)\Phi_0 = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{M}. \quad (7)$$

Оператор числа пар в пространстве $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\hat{N} = \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^-(x, y). \quad (8)$$

Рассматриваемой системе фермионов отвечает ультравторично-квантованный оператор Гамильтона $\hat{H}$ следующего вида:

$$\hat{H} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_{2M} \hat{B}^{+2}(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^{+2}(x_{2M-1}, x_{2M}) \times \\ \times \hat{H}_{2M} \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}}(\hat{B}^{-1}(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^{-1}(x_{2M-1}, x_{2M})) \times \\ \times \exp\left(- \iint dz dw \hat{B}^{+2}(z, w) \hat{B}^{-1}(z, w)\right), \quad (9)$$

где число над оператором обозначает порядок действия [3], $\text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}}$ – оператор антисимметризации по переменным $x_1, \dots, x_{2M}$, $\hat{H}_{2M}$ – оператор Гамильтона системы $2M$ частиц, т.е. оператор в пространстве $L_2(\mathcal{M}^N)$, действующий на функцию $\phi(x_1, \dots, x_{2M})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_{2M}\phi)(x_1, \dots, x_{2M}) = \\ = \left(\sum_{i=1}^{2M} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_i} + U(x_i) \right) + \sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=i+1}^{2M} V(x_i, x_j) \right) \phi(x_1, \dots, x_{2M}). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим также ультравторично-квантованный единичный оператор $\overline{\hat{E}}$, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\hat{E}} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_{2M} \hat{B}^+ (x_1, x_2) \dots \hat{B}^+ (x_{2M-1}, x_{2M}) \times \\ \times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}} (\hat{B}^- (x_1, x_2) \dots \hat{B}^- (x_{2M-1}, x_{2M})) \times \\ \times \exp \left(- \iint dz dw \hat{B}^+ (z, w) \hat{B}^- (z, w) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Оператор $\overline{\hat{E}}$ является оператором ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{F}_{\text{Asymm}}$ пространства $\mathcal{F}$, состоящее из таких векторов Φ (3), для которых функции $\Phi_M(x_1, \dots, x_{2M})$, $M = 1, 2, \dots$, антисимметричны относительно перестановки координат x_i и x_j при всех $i, j = 1, 2, \dots, 2M$. Операторы (9), (11) коммутируют с оператором числа частиц (8). В предыдущих работах доказаны следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть векторы $\Phi \in \mathcal{F}$ удовлетворяют условиям

$$\overline{\hat{H}}\Phi = \lambda \overline{\hat{E}}\Phi, \quad \overline{\hat{E}}\Phi \neq 0, \quad \hat{N}\Phi = M\Phi, \quad (12)$$

где M – произвольное натуральное число, тогда функция

$$\Phi_M(x_1, \dots, x_{2M}) = (\Phi_0, \hat{B}^-(x_1, x_2) \dots \hat{B}^-(x_{2M-1}, x_{2M}) \overline{\hat{E}}\Phi) \quad (13)$$

является антисимметричной собственной функцией оператора $\hat{H}_{2M}$ (10) с собственным значением λ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Имеет место тождество

$$\overline{\hat{H}} = \overline{\hat{E}}\hat{A}, \quad (14)$$

где $\hat{A}$ – следующий оператор в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) \hat{B}^-(x, y) + \\ + 2 \iint dx dy dz dw V(x, y) \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^+(z, w) \hat{B}^-(x, z) \hat{B}^-(w, y). \end{aligned} \quad (15)$$

В силу утверждения 1 задача о нахождении уровней энергии системы фермионов сводится к нахождению решений уравнений (12). В силу утверждения 2 асимптотика решений уравнений (12) при $M \rightarrow \infty$ определяется символом оператора $\hat{A}$ (15). Символом оператора $\hat{A}$ является следующий функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi^+, \Phi] = & \iint dx dy \Phi^+(x, y) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) \Phi(x, y) + \\ & + 2 \iiint dx dy dz dw V(x, y) \Phi^+(x, y) \Phi^+(z, w) \Phi(x, z) \Phi(w, y), \end{aligned} \quad (16)$$

зависящий от двух функций $\Phi^+(x, y), \Phi(x, y) \in L_2(\mathcal{M}^2)$. Этому символу соответствует система уравнений Гамильтона

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi^+(x, y, t)}, \quad -i \frac{\partial \Phi^+}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi(x, y, t)}, \quad (17)$$

где в правых частях уравнений стоит вариационная производная функционала (16). Отметим, что система уравнений (17) имеет интеграл движения, вид которого совпадает с выражением в левой части равенства (2). Уравнения (1) получаются из (17) в частном случае, когда

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y) e^{-i\Omega t}, \quad \Phi^+(x, y, t) = \Phi^+(x, y) e^{i\Omega t}. \quad (18)$$

Условие (2) возникает из последнего уравнения (12).

Запишем систему (1) в другом виде. Введем функции $G(x, y)$, $R(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(x, y) &= \Phi^+(x, y), \quad G(x, y) = 2 \int dz \Phi^+(x, z) \Phi(y, z), \\ R(x, y) &= 2 \left(\Phi(x, y) - \int dz \Phi(x, z) G(z, y) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

В силу антисимметрии функций $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ для функций (19) выполняются равенства

$$R(x, y) = -R(y, x), \quad \tilde{R}(x, y) = -\tilde{R}(y, x), \quad (20)$$

$$G(x, y) = \int dz G(x, z) G(z, y) + \int dz \tilde{R}(z, x) R(z, y). \quad (21)$$

Из (2) следует

$$\int dx G(x, x) = N. \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функции $G(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$, $R(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x - \Delta_y) + U(x) - U(y) \right) G(x, y) - \\
 & \quad - \int dz (V(x, z) - V(y, z)) \tilde{R}(x, z) R(z, y) = 0, \\
 & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) R(x, y) - \\
 & \quad - \int dz (V(x, z) G(z, y) R(x, z) + V(y, z) G(z, x) R(z, y)) = \Omega R(x, y), \\
 & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) \tilde{R}(x, y) - \\
 & \quad - \int dz (V(x, z) G(y, z) \tilde{R}(x, z) + V(y, z) G(x, z) \tilde{R}(z, y)) = \Omega \tilde{R}(x, y).
 \end{aligned} \tag{23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой получаем, что функции (19) удовлетворяют уравнениям (23), если функции $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ удовлетворяют системе (1).

Чтобы обобщить уравнения (1) на случай ненулевой температуры, применим принцип соответствия между этими уравнениями и уравнениями вариационного принципа Боголюбова при ненулевой температуре, т.е. исходя из зависящих от температуры уравнений вариационного принципа Боголюбова с помощью принципа соответствия найдем обобщение уравнений (1) на случай ненулевой температуры.

Рассмотрим теперь уравнения вариационного принципа Боголюбова. При температуре $\theta \geq 0$ для рассматриваемой системы фермионов из вариационного принципа Боголюбова [4] получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 \lambda_\alpha u_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) u_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R_B(x, y) v_\alpha^*(y) + \\
 & \quad + \int dy V(x, y) (G_B(y, y) u_\alpha(x) - G_B(y, x) u_\alpha(y)), \\
 -\lambda_\alpha v_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) v_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R_B(x, y) u_\alpha^*(y) + \\
 & \quad + \int dy V(x, y) (G_B(y, y) v_\alpha(x) - G_B(y, x) v_\alpha(y)),
 \end{aligned} \tag{24}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots$, функции $u_\alpha(x)$ и $u_\alpha^*(x)$, а также $v_\alpha(x)$ и $v_\alpha^*(x)$ комплексно сопряжены друг другу и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
 \int dx (u_\alpha^*(x) v_\beta(x) + v_\alpha(x) u_\beta^*(x)) &= \int dx (u_\alpha(x) v_\beta^*(x) + v_\alpha^*(x) u_\beta(x)) = 0, \\
 \int dx (u_\alpha^*(x) u_\beta(x) + v_\alpha(x) v_\beta^*(x)) &= \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. Кроме того, в уравнениях (25) функции $R_B(x, y)$ и $G_B(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_B(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n_{\alpha} \right) (v_{\alpha}(x)u_{\alpha}(y) - v_{\alpha}(y)u_{\alpha}(x)), \\ G_B(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (v_{\alpha}^*(x)v_{\alpha}(y)(1 - n_{\alpha}) + u_{\alpha}^*(x)u_{\alpha}(y)n_{\alpha}), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$n_{\alpha} = \frac{1}{e^{\lambda_{\alpha}/\theta} + 1}, \quad (27)$$

а μ определяется из условия, что функция $G_B(x, y)$ (26) удовлетворяет равенству

$$\int dx G_B(x, x) = N. \quad (28)$$

Функции (26) и комплексно-сопряженная к $R_B(x, y)$ функция $R_B^*(x, y)$ при любой температуре θ удовлетворяют равенствам

$$R_B(x, y) = -R_B(y, x), \quad R_B^*(x, y) = -R_B^*(y, x), \quad (29)$$

$$G_B(x, y) = G_B^*(y, x), \quad (30)$$

а из уравнений (24) следует, что эти функции также удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y) + U(x) - U(y) \right) G_B(x, y) + \\ &\quad + \int dz (V(x, z) - V(y, z)) R_B^*(x, z) R_B(z, y) + \\ &\quad + \int dz (V(x, z) - V(y, z)) (G_B(z, z) G_B(x, y) - G_B(x, z) G_B(z, y)) = 0, \\ &\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) R_B(x, y) - \\ &\quad - \int dz (V(x, z) G_B(z, y) R_B(x, z) + V(y, z) G_B(z, x) R_B(z, y)) + \\ &\quad + \int dz V(x, z) (G_B(z, z) R_B(x, y) - G_B(z, x) R_B(z, y)) + \\ &\quad + \int dz V(y, z) (G_B(z, z) R_B(x, y) - G_B(z, y) R_B(x, z)) = 2\mu R_B(x, y), \end{aligned} \quad (31)$$

а дополнительное уравнение получается комплексным сопряжением второго уравнения из (31).

Если $\theta = 0$, то из (27) следует, что n_{α} принимает значение 0 или 1 для всех $\alpha = 1, 2, \dots$. Тогда из (25) получаем, что функции (26) при нулевой температуре удовлетворяют условию

$$G_B(x, y) = \int dz G_B(x, z) G_B(z, y) + \int dz R_B^*(z, x) R_B(z, y). \quad (32)$$

Равенства (32), (29) и (28) совпадают соответственно с равенствами (21), (20) и (22), если по принципу соответствия заменить $R_B^*(x, y)$ на $\tilde{R}(x, y)$, $R_B(x, y)$ на $R(x, y)$, $G_B(x, y)$ на $G(x, y)$. Уравнения (31) при такой замене не переходят в уравнения (23), однако если в (31) заменить 2μ на Ω , то очевидно соответствие между одной системой и другой, соответствующие друг другу уравнения отличаются одним или двумя слагаемыми в левой части. Кроме того, для частного вида взаимодействия, например такого, как в модели БКШ [5], уравнения (31) после замены совпадают с (23).

Отметим, что функции $G_B(x, y)$, $R_B(x, y)$, $R^*(x, y)$ удовлетворяют большему числу условий, чем функции $G(x, y)$, $R(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$. Функции $\Phi(x, y)$, $\Phi^+(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям (1), в общем случае не являются комплексно-сопряженными друг другу [6]. Поэтому из формул (19) следует, что функция $\tilde{R}(x, y)$ не должна быть комплексно-сопряженной к $R(x, y)$, а функция $G(x, y)$ не должна удовлетворять условию (30).

Из соответствия между функциями (19) и (26) получим, что зависящим от температуры аналогом системы уравнений (1) является система уравнений

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha u_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu\right)u_\alpha(x) + \int dy V(x, y)R(x, y)\tilde{v}_\alpha(y), \\ -\lambda_\alpha v_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu\right)v_\alpha(x) + \int dy V(x, y)R(x, y)\tilde{u}_\alpha(y), \\ \lambda_\alpha \tilde{u}_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu\right)\tilde{u}_\alpha(x) + \int dy V(x, y)\tilde{R}(x, y)v_\alpha(y), \\ -\lambda_\alpha \tilde{v}_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu\right)\tilde{v}_\alpha(x) + \int dy V(x, y)\tilde{R}(x, y)u_\alpha(y),\end{aligned}\tag{33}$$

где $G(x, y)$, $R(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\tilde{v}_\alpha(x)v_\alpha(y)(1 - n_\alpha) + \tilde{u}_\alpha(x)u_\alpha(y)n_\alpha), \\ R(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n_\alpha\right) (v_\alpha(x)u_\alpha(y) - v_\alpha(y)u_\alpha(x)), \\ \tilde{R}(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n_\alpha\right) (\tilde{v}_\alpha(x)\tilde{u}_\alpha(y) - \tilde{v}_\alpha(y)\tilde{u}_\alpha(x)),\end{aligned}\tag{34}$$

n_α выражается через λ_α и θ согласно формуле (27), а функции $u_\alpha(x)$, $v_\alpha(x)$, $\tilde{u}_\alpha(x)$, $\tilde{v}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, кроме уравнений (33) еще удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\int dx (\tilde{u}_\alpha(x)v_\beta(x) + v_\alpha(x)\tilde{u}_\beta(x)) &= \int dx (u_\alpha(x)\tilde{v}_\beta(x) + \tilde{v}_\alpha(x)u_\beta(x)) = 0, \\ \int dx (\tilde{u}_\alpha(x)u_\beta(x) + v_\alpha(x)\tilde{v}_\beta(x)) &= \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{35}$$

Параметр μ в уравнениях (33) определяется из условия, что функция $G(x, y)$ (34) удовлетворяет условию (22).

ТЕОРЕМА 2. Если функции $u_\alpha(x)$, $\tilde{u}_\alpha(x)$, $v_\alpha(x)$, $\tilde{v}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, удовлетворяют системе уравнений (33) и условиям (35), то функции (34) при любом $\theta \geq 0$ удовлетворяют системе уравнений (23) с $\Omega = 2\mu$ и условиям (20), (22), а при $\theta = 0$ удовлетворяют еще условию (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнений (33) и условий (35) теорема доказывается прямой подстановкой функций (34) в формулы (20)–(23).

Множество решений уравнений (31) шире, чем множество функций (26), выраженных через решения системы уравнений (24). В работе [6] показано, что система уравнений (31) может быть записана в виде пары:

$$[\hat{A}, \hat{L}] = 0, \quad (36)$$

а множеству решений зависящих от температуры уравнений (24) соответствует такое решение уравнения (36), для которого

$$\hat{A} = f_\theta(\hat{L}), \quad (37)$$

где

$$f_\theta(\xi) = \frac{1}{e^{\xi/\theta} + 1} - \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Для уравнений (33), (34) справедливо аналогичное утверждение. Рассмотрим матрицы $\hat{A}$ и $\hat{L}$ вида

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{G} - \frac{1}{2} & \hat{\tilde{R}} \\ \hat{R} & \frac{1}{2} - \hat{G}^t \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{T} & \hat{\tilde{B}} \\ \hat{B} & -\hat{T} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $\hat{G}$, $\hat{R}$, $\hat{\tilde{R}}$ – операторы в пространстве $L_2(\mathcal{M})$, задаваемые интегральными ядрами $G(x, y)$, $R(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$ соответственно, $\hat{G}^t$ – оператор, задаваемый в $L_2(\mathcal{M})$ ядром $G^t(x, y) = G(y, x)$, $\hat{B}$ и $\hat{\tilde{B}}$ – операторы, задаваемые ядрами $B(x, y) = V(x, y)R(x, y)$ и $\tilde{B}(x, y) = V(x, y)\tilde{R}(x, y)$ соответственно, а оператор $\hat{T}$ имеет вид

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Система уравнений (23) может быть записана в виде (36), где $\hat{A}$ и $\hat{L}$ имеют вид (39), а $\Omega = 2\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка (39) в (36) приводит к четырем уравнениям, из которых два совпадают, а три независимых приводятся к виду (23). Кроме того, решениям системы уравнений (23) вида (34), которые получены из решений уравнений (33), (35), соответствуют такие $\hat{A}$ и $\hat{L}$, что для них справедливо равенство (37). Отсюда следует утверждение теоремы.

В заключение отметим, что уравнения (23) в случае ненулевой температуры, полученные из принципа соответствия, могут быть строго получены из истинного симбола [1], [6]–[8] для ультратворично-квантованного уравнения, отвечающего матрице плотности [9]. Это позволяет строго перенести результаты [9], [10] на случай ненулевой температуры.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-02807-НЦНИЛ и 05-01-00824).

Список литературы

- [1] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:4 (2002), 437–445.
- [2] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.
- [3] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [4] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*, т. 2, Наукова думка, Киев, 1970.
- [5] Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, М., 1970.
- [6] В. П. Маслов, *ТМФ*, **132**:3 (2002), 388–398.
- [7] В. П. Маслов, *ТМФ*, **143**:3 (2005), 307–327.
- [8] В. П. Маслов, *Докл. РАН*, **404**:5 (2005), 608–611.
- [9] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Институт компьютерных исследований, М., 2001.
- [10] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 369–378.

Поступила в редакцию 2.07.2007