Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Бабуджян, А. Фёрстер, М. Каровски, Формфакторная программа. Обзор и новые результаты: рекурсивный $SU(N)$ -анзац Бете вне массовой оболочки и $1/N$ -разложение, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 13–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:34:59

© 2008 г. Г. М. Бабуджян*, А. Фёрстер†, М. Каровски‡

ФОРМФАКТОРНАЯ ПРОГРАММА. ОБЗОР И НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: РЕКУРСИВНЫЙ $SU(N)$ -АНЗАЦ БЕТЕ ВНЕ МАССОВОЙ ОБОЛОЧКИ И $1/N$ -РАЗЛОЖЕНИЕ

Цель бутстрапной программы для интегрируемых квантовых теорий поля в размерности $1+1$ состоит в явном построении модели в терминах ее функций Вайтмана. Эта программа проиллюстрирована главным образом в терминах $SU(N)$ -модели Гросса–Неве. Построен рекурсивный анзац Бете вне массовой оболочки для $SU(N)$ -факторизующейся S -матрицы. Задача суммирования по промежуточным состояниям рассмотрена в пределе малых расстояний для двухточечной функции Вайтмана в модели sh-Гордон.

Ключевые слова: интегрируемая квантовая теория поля, формфакторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бутстрапная программа формулировки физики частиц в терминах данных рассеяния, т.е. в терминах S -матрицы, восходит к Гейзенбергу [1] и Чу [2]. Этот подход оказался очень удачным для интегрируемых квантовых теорий поля в размерности $1+1$ [3]–[8]. Данная программа не исходит из какого-либо классического лагранжиана. Вместо этого она классифицирует интегрируемые квантовые модели теории поля и, кроме того, дает их явные точные решения в терминах всех функций Вайтмана. Контакт с классическими моделями достигается только в самом конце, при сравнении точных результатов с разложением по фейнмановским диаграммам (или с другим разложением), основанным, как правило, на лагранжианах.

Один из авторов настоящей работы совместно с другими исследователями сформулировал в [4] “on-shell” программу, т.е. точное определение матрицы рассеяния с использованием уравнений Янга–Бакстера. Концепция обобщенных формфакторов была введена в работе [7], где сформулированы уравнения самосогласованности, выполнение которых ожидается от этих величин. В дальнейшем этот подход

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения.

E-mail: babujian@physik.fu-berlin.de

†Instituto de Física da UFRGS, Porto Alegre, Brazil. E-mail: angela@if.ufrgs.br

‡Institut für Theoretische Physik, Freie Universität Berlin, Berlin, Germany. E-mail: karowski@physik.fu-berlin.de

развивался и изучался в контексте нескольких явных моделей в работе [9]. В настоящей работе мы применяем формфакторную программу к $SU(N)$ -инвариантной S -матрице (см. [10], [11]). Нам надо применить рекурсивный анзац Бете “вне массовой оболочки”¹⁾, для того чтобы получить векторную часть формфакторов. Это дает недостающее звено в рассмотрении $SU(N)$ -формфакторов Смирновым [9], где векторы задавались “непрямым определением” и характеризовались необходимыми свойствами, но не приводились явно. Мы сравним $1/N$ -разложение для киральной $SU(N)$ -модели Гросса–Неве [12] с нашими точными результатами для формфакторов. Эта модель интересна, в частности, тем, что частицы являются анионами и $1/N$ -разложение сталкивается со сложностями [13]–[15], а кроме того, она демонстрирует асимптотическую свободу. Функции Вайтмана в итоге получаются интегрированием и суммированием по промежуточным состояниям. Явное вычисление всех этих интегралов и сумм остается открытой проблемой для почти всех моделей, за исключением модели Изинга.

2. БУТСТРАПНАЯ ПРОГРАММА

Бутстрапная программа для интегрируемых квантовых теорий поля в размерности $1 + 1$ дает решение модели в терминах всех ее функций Вайтмана. Ответ получается в три шага.

1. S -матрица вычисляется исходя из общих свойств, таких, как унитарность и кроссинг-симметрия, уравнения Янга–Бакстера (которые являются следствием интегрируемости) и дополнительного предположения о “максимальной аналитичности”. Это означает, что двухчастичная S -матрица является аналитической функцией в физической плоскости (мандельштамовской переменной $(p_1 + p_2)^2$) и допускает там только такие полюсы, которые имеют физическое происхождение. Зависимость от модели заключается только в предположении о спектре частиц с соответствующей симметрией. Имеется классификация всех S -матриц, подчиняющихся данным свойствам.

2. С помощью S -матрицы вычисляются обобщенные формфакторы, являющиеся матричными элементами локальных операторов

$${}^{\text{out}}\langle \theta'_m, \dots, \theta'_1 | \mathcal{O}(x) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle^{\text{in}}.$$

Точнее, решаются уравнения (а)–(д) из раздела 3.

3. Функции Вайтмана получаются подстановкой полного набора промежуточных состояний. В частности, двухточечная функция для эрмитова оператора $\mathcal{O}(x)$ имеет вид

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d\theta_1}{4\pi} \dots |\langle 0 | \mathcal{O}(0) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle^{\text{in}}|^2 \exp\left(-ix \sum p_i\right).$$

К настоящему моменту прямое доказательство сходимости этих сумм существует только для скейлинговой модели Изинга [8], [16]–[19].

¹⁾“Вне массовой оболочки” (off-shell) в контексте анзаца Бете означает, что спектральные параметры в состоянии алгебраического анзаца Бете не фиксированы уравнениями анзаца Бете с целью получения собственных состояний гамильтониана, а по ним проводится интегрирование.

В работе [20] недавно было показано, что модели с факторизующейся S -матрицей существуют в рамках алгебраической квантовой теории поля.

Интегрируемость. Интегрируемость в (квантовых) теориях поля означает, что существует бесконечно много локальных законов сохранения

$$\partial_\mu J_L^\mu(t, x) = 0, \quad L = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Следствием таких законов сохранения в размерности $1 + 1$ является отсутствие рождения частиц, и n -частичная S -матрица дается произведением двухчастичных S -матриц:

$$S^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \prod_{i < j} S_{ij}(p_i, p_j).$$

Если происходит рассеяние назад, двухчастичные S -матрицы не коммутируют и необходимо указывать их порядок. В частности, для трехчастичной S -матрицы имеются две возможности:

$$S^{(3)} = S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{13}S_{12},$$

что приводит к уравнению Янга–Бакстера.

Двухчастичная S -матрица имеет вид $S_{\alpha\beta}^{\beta'\alpha'}(\theta_{12})$, где α, β и т.д. обозначают тип частиц, а $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ – разность быстрот, которые определяются соотношением $p_i = m_i(\text{ch } \theta_i, \text{sh } \theta_i)$. Мы также используем сокращенное обозначение для матрицы $S_{12}(\theta_{12})$. Она удовлетворяет соотношениям унитарности и кроссинг-симметрии

$$S_{21}(\theta_{21})S_{12}(\theta_{12}) = 1, \\ S_{12}(\theta_1 - \theta_2) = \mathbf{C}^{2\bar{2}}S_{21}(\theta_2 + i\pi - \theta_1)\mathbf{C}_{\bar{2}2} = \mathbf{C}^{1\bar{1}}S_{2\bar{1}}(\theta_2 - (\theta_1 - i\pi))\mathbf{C}_{\bar{1}1},$$

где $\mathbf{C}^{1\bar{1}}$ и $\mathbf{C}_{1\bar{1}}$ – матрицы зарядового сопряжения.

Связанные состояния. Пусть γ – связанное состояние частиц α и β с массой

$$m_\gamma = \sqrt{m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2m_\alpha m_\beta \cos \eta}, \quad 0 < \eta < \pi.$$

Тогда двухчастичная S -матрица имеет такой полюс, что

$$i \operatorname{Res}_{\theta=i\eta} S_{\alpha\beta}^{\beta'\alpha'}(\theta) = \Gamma_\gamma^{\beta'\alpha'} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (1)$$

где η называется *углом слияния*, а $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – сплетающий оператор для связанных состояний [21], [22]. S -матрица для связанных состояний, являющаяся матрицей рассеяния связанного состояния 12 на частице 3, получается из *бутстрапного уравнения* [21]

$$S_{(12)3}(\theta_{(12)3})\Gamma_{12}^{(12)} = \Gamma_{12}^{(12)}S_{13}(\theta_{13})S_{23}(\theta_{23}),$$

где использовано обычное краткое обозначение для матриц, действующих в пространствах, соответствующих частицам 1, 2, 3 и 12.

Пример интегрируемой модели в размерности 1+1 дается $SU(N)$ -моделью Гросса–Неве [12], описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma\partial\psi + \frac{g^2}{2}((\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2),$$

ферми-поля образуют $SU(N)$ -мультиплет. Другими интегрируемыми квантовыми теориями поля являются модели синус-Гордон, Тоды, скейлинговая $Z(N)$ -модель Изинга, нелинейные σ - и $O(N)$ -модели Гросса–Неве и т.д.

$SU(N)$ S -матрица. Все решения для $U(N)$ -инвариантной S -матрицы, удовлетворяющие условиям унитарности и кроссинг-симметрии, а также уравнению Янга–Бакстера, были получены в работе [23]. Следуя [24], [25], мы примем ту точку зрения, что в $SU(N)$ -модели Гросса–Неве античастицы являются связанными состояниями $N - 1$ частиц. Отсюда следует, что нет рассеяния назад частица–античастица и что $SU(N)$ S -матрица должна даваться решением II из работы [23]. Рассеяние фундаментальных частиц, образующих мультиплет, соответствующий векторному представлению $SU(N)$, имеет вид (см. [14], [15], [26], а также [27] для $N = 2$)

$$S_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}(\theta) = \begin{array}{c} \delta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ p_4 \quad p_3 \\ \nwarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad \beta \end{array} \begin{array}{c} \gamma \\ \swarrow \quad \nearrow \\ p_1 \quad p_2 \\ \nwarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad \beta \end{array} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}b(\theta) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}c(\theta), \quad (2)$$

где в силу уравнения Янга–Бакстера выполнено соотношение $c(\theta) = -2\pi ib(\theta)/(N\theta)$ и амплитуда старшего веса равна

$$a(\theta) = b(\theta) + c(\theta) = -\frac{\Gamma(1 - \frac{\theta}{2\pi i})\Gamma(1 - \frac{1}{N} + \frac{\theta}{2\pi i})}{\Gamma(1 + \frac{\theta}{2\pi i})\Gamma(1 - \frac{1}{N} - \frac{\theta}{2\pi i})}. \quad (3)$$

В антисимметричном тензорном секторе имеется отвечающий связанному состоянию полюс при $\theta = i\eta = 2\pi i/N$, что согласуется с результатом работы [24] в том плане, что связанное состояние $N - 1$ частиц следует отождествить с античастицей. Как и в скейлинговой $Z(N)$ -модели Изинга и в $A(N - 1)$ -модели Тоды [28], [29], это следует использовать при построении формфакторов $SU(N)$ -модели [10].

3. ФОРМФАКТОРЫ

Для локального оператора $\mathcal{O}(x)$ обобщенные формфакторы [7] определяются как

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | p_1, \dots, p_n \rangle_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\text{in}} \quad (4)$$

при $\theta_1 > \dots > \theta_n$. Для других упорядочений быстрот они определяются аналитическим продолжением. Индекс α_i обозначает тип частицы с импульсом p_i . Мы также используем сокращенные обозначения $F_{\underline{\alpha}}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta})$ или $F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta})$.

Для $SU(N)$ -модели Гросса–Неве α обозначает типы частиц, принадлежащих всем фундаментальным представлениям $SU(N)$ с размерностями $\binom{N}{r}$, $r = 1, 2, \dots, N-1$. В большинстве формул мы наложим ограничение $\alpha = 1, 2, \dots, N$ на представление векторного мультиплета. Как и в случае S -матрицы, максимальная аналитичность для обобщенных формфакторов означает, что они являются мероморфными и все полюсы в физической полосе $0 \leq \text{Im } \theta_{ij} \leq \pi$ имеют физическую интерпретацию. Вместе с обычными ЛСЦ-предположениями [30] локальной квантовой теории поля можно вывести следующие формфакторные уравнения.

(а) Уравнения Уотсона, описывающие свойства симметрии при одновременных перестановках как переменных θ_i, θ_j , так и пространств $i, j = i+1$:

$$F_{\dots ij \dots}^{\mathcal{O}}(\dots, \theta_i, \theta_j, \dots) = F_{\dots ji \dots}^{\mathcal{O}}(\dots, \theta_j, \theta_i, \dots) S_{ij}(\theta_{ij})$$

для всех возможных расстановок букв θ .

(б) Соотношения кроссинг-симметрии, из которых следует свойство периодичности при циклических перестановках быстрот и пространств:

$$\begin{aligned} & \text{out}, \bar{1} \langle p_1 | \mathcal{O}(0) | p_2, \dots, p_n \rangle_{2\dots n}^{\text{in}, \text{conn}} = \\ & = \mathbf{C}^{\bar{1}1} \sigma_1^{\mathcal{O}} F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + i\pi, \theta_2, \dots, \theta_n) = F_{2\dots n1}^{\mathcal{O}}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - i\pi) \mathbf{C}^{1\bar{1}}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{\alpha}^{\mathcal{O}}$ учитывает статистику частиц α по отношению к $\mathcal{O}$ (например, $\sigma_{\alpha}^{\mathcal{O}} = -1$, если α и $\mathcal{O}$ – оба фермионы; эти числа могут быть более общими для анионных полей или полей порядка и беспорядка, см. [29]).

(в) Имеются полюсы, определенные одночастичными состояниями в каждом подканале, задаваемом подмножеством частиц состояния (4). В частности, функция $F_{\underline{\alpha}}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta})$ имеет полюс при $\theta_{12} = i\pi$, причем

$$\text{Res}_{\theta_{12}=i\pi} F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = 2i \mathbf{C}_{12} F_{3\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_3, \dots, \theta_n) (\mathbf{1} - \sigma_2^{\mathcal{O}} S_{2n} \dots S_{23}).$$

(г) Если в модели имеются также связанные состояния, то функция $F_{\underline{\alpha}}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta})$ имеет дополнительные полюсы. Например, если частицы 1 и 2 образуют связанное состояние 12, то имеется полюс при $\theta_{12} = i\eta$, $0 < \eta < \pi$, причем

$$\text{Res}_{\theta_{12}=\eta} F_{12\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = F_{(12)\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_{(12)}, \dots, \theta_n) \sqrt{2} \Gamma_{12}^{(12)},$$

где сплетающий оператор связанных состояний $\Gamma_{12}^{(12)}$ определен в (1) (см. [21], [22]).

(д) Поскольку мы имеем дело с релятивистскими квантовыми теориями поля, естественно, что мы имеем еще

$$F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + \mu, \dots, \theta_n + \mu) = e^{s\mu} F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

если локальный оператор преобразуется при лоренцевых преобразованиях как $F^{\mathcal{O}} \rightarrow e^{s\mu} F^{\mathcal{O}}$, где s – “спин” оператора $\mathcal{O}$.

Эти уравнения были предложены в [9] как обобщения уравнений, выведенных в оригинальных работах [7], [8], [31]. Они были доказаны в [32] на основе ЛСЦ-предположений и максимальной аналитичности.

Дадим теперь конструктивный и систематический способ решения уравнений (а)–(д) для ковекторнозначной функции $F_{1\dots n}^{\mathcal{O}}$, если задана матрица рассеяния.

3.1. Двухчастичные формфакторы. Для двухчастичных формфакторов уравнения (а) и (б) принимают вид

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F(-\theta)S(\theta), \\ F(i\pi - \theta) &= F(i\pi + \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

для всех собственных значений двухчастичной S -матрицы. Для общих теорий уравнения Уотсона [33] выполнены только ниже порога рождения частиц. Однако в интегрируемых теориях нет рождения частиц, а потому эти уравнения выполнены для всех комплексных значений θ . В работе [7] было показано, что эти уравнения, взятые вместе с условием максимальной аналитичности, имеют единственное решение.

В качестве примера запишем $SU(N)$ -формфакторную функцию (старшего веса) [10]

$$F(\theta) = c \exp \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t \operatorname{sh}^2 t} e^{t/N} \operatorname{sh} t \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(1 - \operatorname{ch} t \left(1 - \frac{\theta}{i\pi} \right) \right) \right],$$

которая является минимальным решением уравнения (5) при $S(\theta) = a(\theta)$, заданном в (3).

3.2. Общая формфакторная формула. Как обычно (см. [7]), отделим минимальную часть и запишем формфактор для n частиц в виде

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} F(\theta_{ij}). \quad (6)$$

Преобразуем далее сложные формфакторные уравнения (а)–(д) в простые для p -функций, являющихся скалярными и другими простыми функциями от $e^{\pm z_i}$, используя следующий *анзац Бете вне массовой оболочки* для (ковекторнозначной) K -функции:

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\mathcal{O}}(\underline{\theta}) = \int_{C_{\underline{\theta}}} dz_1 \dots \int_{C_{\underline{\theta}}} dz_m h(\underline{\theta}, \underline{z}) p^{\mathcal{O}}(\underline{\theta}, \underline{z}) \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\underline{\theta}, \underline{z}). \quad (7)$$

Состояние $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\underline{\theta}, \underline{z})$ анзаца Бете вне массовой оболочки получается как произведение S -матричных элементов; контур интегрирования $C_{\underline{\theta}}$ зависит от модели (см. ниже для $SU(N)$ -модели). Скалярные функции

$$h(\underline{\theta}, \underline{z}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \phi(\theta_i - z_j) \prod_{1 \leq i < j \leq m} \tau(z_i - z_j), \quad \tau(z) = \frac{1}{\phi(z)\phi(-z)} \quad (8)$$

зависят только от $S(\theta)$ (см. (10) ниже), т.е. от S -матрицы, тогда как p -функции $p^{\mathcal{O}}(\underline{\theta}, \underline{z})$ зависят от оператора.

SU(N)-формфакторы. Формфакторы для n фундаментальных частиц (в векторном представлении $SU(N)$) даются формулами (6)–(8), где требуется *рекурсивный анзац Бете*. Это означает, что Ψ имеет вид

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\underline{\theta}, \underline{z}) = L_{\beta_1 \dots \beta_m}(\underline{z}) \Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m}(\underline{\theta}, \underline{z}), \quad (9)$$

где индексы α_i принимают значения $\alpha_i = 1, 2, \dots, N$ и суммирование происходит по $\beta_i = 2, 3, \dots, N$. Состояние $\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m}(\underline{\theta}, \underline{z})$ анзаца Бете вне массовой оболочки получается с использованием техники алгебраического анзаца Бете следующим образом.

Рассмотрим состояние с n частицами и определим матрицу монодромии

$$T_{1\dots n,0}(\underline{\theta}, \theta_0) = S_{10}(\theta_{10}) \dots S_{n0}(\theta_{n0}) = \frac{1}{n} \frac{\dots}{0}$$

как матрицу, действующую в тензорном произведении *квантовых пространств* – пространств n частиц (по отношению к их квантовым числам) $V^{1..n} = V^1 \otimes \dots \otimes V^n$ – и вспомогательного пространства V^0 . Все векторные пространства V^i изоморфны пространству V , базисные векторы которого нумеруют все сорта частиц. Мы будем рассматривать $V \cong \mathbb{C}^N$ как пространство векторного представления $SU(N)$. Соотношение алгебры Янга–Бакстера для S -матрицы приводит к равенству

$$T_{1\dots n,a}(\underline{\theta}, \theta_a) T_{1\dots n,b}(\underline{\theta}, \theta_b) S_{ab}(\theta_a - \theta_b) = S_{ab}(\theta_a - \theta_b) T_{1\dots n,b}(\underline{\theta}, \theta_b) T_{1\dots n,a}(\underline{\theta}, \theta_a),$$

откуда, в свою очередь, следуют основные алгебраические свойства подматриц A , B , C , D по отношению к вспомогательным пространствам, определяемым как

$$T_{1\dots n,0}(\underline{\theta}, z) \equiv \begin{pmatrix} A_{1\dots n}(\underline{\theta}, z) & B_{1\dots n,\beta}(\underline{\theta}, z) \\ C_{1\dots n}^{\beta}(\underline{\theta}, z) & D_{1\dots n,\beta}^{\beta'}(\underline{\theta}, z) \end{pmatrix}, \quad \beta, \beta' = 2, 3, \dots, N.$$

Основные ковекторы анзаца Бете Φ из (9) получаются применением операторов C к состоянию псевдоваккуума

$$\Phi_{1\dots n}^\beta(\underline{\theta}, \underline{z}) = \Omega_{1\dots n} C_{1\dots n}^{\beta_m}(\underline{\theta}, z_m) \dots C_{1\dots n}^{\beta_1}(\underline{\theta}, z_1).$$

Это можно изобразить как

$$\Phi_{\underline{\alpha}}^{\beta}(\underline{\theta}, \underline{z}) = \begin{array}{c|ccc|cc} & \beta_1 & \beta_m & 1 & & 1 \\ & \cdots & \vdots & & z_m & \\ & & & & z_1 & \\ & & & & \theta_1 & \cdots & \theta_n \\ \hline & & & \alpha_1 & & & \alpha_n \end{array} \quad \text{при } \beta_i = 2, 3, \dots, N, \quad \alpha_i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Это означает, что $\Phi_{\underline{\alpha}}^{\beta}(\underline{\theta}, \underline{z})$ есть произведение S -матричных элементов, как указано в (10), и S -матрицы (2) в каждой точке пересечения линий, причем берется сумма

по всем индексам внутренних линий. Псевдовакуум является ковектором старшего веса (с весом $w = (n, 0, \dots, 0)$)

$$\Omega_{1\dots n} = e(1) \otimes \dots \otimes e(1),$$

где единичный вектор $e(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) соответствует частице типа α в векторном представлении $SU(N)$. Техника рекурсивного анзаца Бете означает, что для ковекторнозначной функции $L_{\beta_1 \dots \beta_m}(\underline{z})$ (9) строится анзац Бете второго уровня. Этот анзац имеет тот же вид, что и (7), за исключением того, что интервал значений индексов уменьшается на 1. Итерация этой процедуры в итоге приводит к скалярной функции. Контур интегрирования $C_{\underline{\theta}}$ зависит от $\underline{\theta}$ (см. [29], [10]).

Картина Свики состоит в том, что связанное состояние $N - 1$ фундаментальных частиц следует отождествить с античастицей; вместе с формфакторными рекурсивными соотношениями (в) и (г) это приводит к уравнению для функции $\phi(z)$ (см. [29], [10])

$$\prod_{k=0}^{N-2} \phi(z + k\eta) \prod_{k=0}^{N-1} F(z + k\eta) = 1, \quad \eta = \frac{2\pi}{N},$$

решение которого имеет вид

$$\phi(\theta) = \Gamma\left(\frac{\theta}{2\pi i}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{N} - \frac{\theta}{2\pi i}\right).$$

В работе [10] показано, что формфакторы, заданные равенствами (6) и (7), удовлетворяют формфакторным уравнениям (а)–(д), если выполнены некоторые простые уравнения для p -функции. Заметим, что формфакторы в этой модели были также вычислены в работах [9], [34] с использованием других методов. В работе [9] векторы задавались непрямым определением и характеризовались необходимыми свойствами, но не приводились явно. Это недостающее звено дается рекурсивным анзацем Бете вне массовой оболочки. В работе [35] рассматривалась иная процедура построения рекурсивных $SU(N)$ -векторов Бете вне массовой оболочки.

3.3. Примеры. Для иллюстрации наших общих результатов приведем некоторые простые примеры.

Тензор энергии–импульса. Для локального оператора $\mathcal{O}(x) = T^{\rho\sigma}(x)$, где $\rho, \sigma = \pm$ обозначают компоненты светового конуса, p -функция, как и в модели синус-Гордон [22], имеет вид

$$p^{T^{\rho\sigma}}(\underline{\theta}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^n e^{\rho\theta_i} \sum_{i=1}^m e^{\sigma z_i}.$$

Для $(n = N)$ -частичного формфактора имеются $n_l = N - l$ интегрирований на l -м уровне анзаца Бете вне массовой оболочки. Вычислим формфактор частицы α и связанного состояния $(\underline{\beta}) = (\beta_1, \dots, \beta_{N-1})$ из $N - 1$ частиц. На каждом уровне все интегрирования, кроме одного, можно выполнить итерационно, используя соотношение (г) для связанных состояний. Тогда все оставшиеся интегрирования на старшем уровне также можно выполнить. Результат для формфактора частицы α

и связанного состояния $(\underline{\beta})$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\alpha(\underline{\beta})}^{T^{\rho\sigma}}(\theta_1, \theta_2) &= K_{\alpha(\underline{\beta})}^{T^{\rho\sigma}}(\theta_1, \theta_2)G(\theta_{12}), \\ K_{\alpha(\underline{\beta})}^{T^{\rho\sigma}}(\theta_1, \theta_2) &= N_2^{T^{\rho\sigma}}(e^{\rho\theta_1} + e^{\rho\theta_2}) \int_{\mathcal{C}_{\underline{\theta}}} \frac{dz}{R} \phi(\theta_1 - z) e^{\sigma z} L(\theta_2 - z) \times \\ &\quad \times \epsilon_{\delta\underline{\gamma}} S_{\alpha\epsilon}^{\delta 1}(\theta_1 - z) S_{(\underline{\beta})1}^{\epsilon(\underline{\gamma})}(\theta_2 - z), \end{aligned} \quad (11)$$

где суммирование ведется по $\underline{\gamma}$ и $\delta > 1$ и $G(\theta)$ есть минимальная формфакторная функция двух частиц рангов $r = 1$ и $r = N - 1$. Функции $G(\theta)$ и $L(\theta)$ задаются как

$$G(i\pi - \theta)F(\theta)\phi(\theta) = 1, \quad L(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi i})\Gamma(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N} - \frac{\theta}{2\pi i})}{b(i\pi - \theta)}.$$

Оставшийся в (11) интеграл можно вычислить (аналогично [22]), что дает

$$\langle 0|T^{\rho\sigma}(0)|\theta_1, \theta_2\rangle_{\alpha(\underline{\beta})}^{\text{in}} = 4M^2 \epsilon_{\alpha\beta} e^{(\rho+\sigma)(\theta_1+\theta_2+i\pi)/2} \frac{\text{sh}((\theta_{12} - i\pi)/2)}{\theta_{12} - i\pi} G(\theta_{12}).$$

Как и в [22], для произвольных состояний можно установить уравнение для собственных значений:

$$\left(\int dx T^{\pm 0}(x) - \sum_{i=1}^n p_i^{\pm} \right) |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\underline{\alpha}}^{\text{in}} = 0.$$

Поля $\psi_{\alpha}(x)$. Поскольку анзац Бете приводит к состояниям старшего веса, мы получаем матричные элементы спинорного поля $\psi(x) = \psi_1(x)$. p -Функция для локального оператора $\psi^{(\pm)}(x)$ имеет вид (см. также [32])

$$p^{\psi^{(\pm)}}(\underline{\theta}, z) = \exp\left(\pm \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m z_i - \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^n \theta_i \right)\right).$$

Например, одночастичный формфактор равен

$$\langle 0|\psi^{(\pm)}(0)|\theta\rangle_{\alpha} = \delta_{\alpha 1} e^{\mp(1-1/N)\theta/2}.$$

Последние две формулы согласуются с предложением работ [24], [15] о том, что статистика фундаментальных частиц в киральной $SU(N)$ -модели Гросса–Неве должна иметь вид $\sigma = e^{2\pi i s}$, где $s = (1 - 1/N)/2$ – спин. Для $(n = N + 1)$ -частичного формфактора снова имеются $n_l = N - l$ интегрирований на l -м уровне анзаца Бете вне массовой оболочки. Аналогично тому, как это делалось выше, получаем формфактор двух частиц и одного связанного состояния

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta(\underline{\gamma})}^{\psi^{(\pm)}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= K_{\alpha\beta(\underline{\gamma})}^{\psi^{(\pm)}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)F(\theta_{12})G(\theta_{13})G(\theta_{23}), \\ K_{\alpha\beta(\underline{\gamma})}^{\psi^{(\pm)}} &= N^{\psi} \exp\left(\mp \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum \theta_i\right) \int_{\mathcal{C}_{\underline{\theta}}} \frac{dz}{R} \phi(\theta_1 - z) \phi(\theta_2 - z) L(\theta_3 - z) e^{\pm z/2} \times \\ &\quad \times \epsilon_{\delta\underline{\gamma}} S_{\alpha 1}^{\delta 1}(\theta_1 - z) S_{\alpha 2 \zeta}^{\epsilon 1}(\theta_2 - z) S_{(\underline{\beta})1}^{\zeta(\underline{\gamma})}(\theta_3 - z). \end{aligned} \quad (12)$$

Мы не смогли выполнить это интегрирование. В работе [36] мы рассмотрим $1/N$ -разложение и физическую интерпретацию результатов для киральной модели Гросса–Неве.

3.4. $1/N$ -разложение: $SU(N)$ -модель Гросса–Неве. В этом случае лагранжиан имеет вид [12]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma \partial \psi + \frac{g^2}{2} ((\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^5 \psi)^2) = \bar{\psi} (i \gamma \partial - \sigma - i \gamma^5 \pi) \psi - \frac{1}{2g^2} (\sigma^2 + \pi^2).$$

Имеются инфракрасные расходимости из-за несостоявшегося голдстоуновского бозона π [13]–[15]. Используя подход из работы [15], получаем, например (подробнее см. [36]),

$$\begin{aligned} & \gamma \langle \theta_3 | i(i \gamma \partial - m) \psi^\delta(0) | \theta_1, \theta_2 \rangle_{\alpha\beta}^{\text{in}} = \\ & = -\frac{i\pi}{N} 2m \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta \left(\frac{u(p_2)}{\text{ch}(\theta_{13}/2)} - \frac{\gamma^5 u(p_2)}{\text{sh}(\theta_{13}/2)} \right) \frac{\text{sh} \theta_{13}}{\theta_{13}} u(p_2) + \dots + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned}$$

где многоточием заменены член, в котором переставлены индексы 1 и 2, а также несвязные члены. Тот же результат следует из нашего точного формфактора (12).

4. ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА

В качестве простейшего примера рассмотрим двухточечную функцию локального скалярного оператора $\mathcal{O}(x)$:

$$w(x) = \langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle.$$

Подставляя полный набор in-состояний, можно записать

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\theta_1 \dots \int d\theta_n \exp\left(-ix \sum p_i\right) g_n(\underline{\theta}). \quad (13)$$

Мы ввели функции

$$g_n(\underline{\theta}) = (4\pi)^{-n} F^\mathcal{O}(\theta_1, \dots, \theta_n) F^\mathcal{O}(\theta_n + i\pi, \dots, \theta_1 + i\pi),$$

где использовалась кроссинг-симметрия. Рассмотрим, в частности, экспоненту скалярного бозонного поля

$$\mathcal{O}(x) = : e^{i\gamma\varphi(x)} :,$$

где $: \dots :$ обозначает нормальное упорядочение по отношению к физическому вакууму, что сводится к $\langle 0 | : e^{i\gamma\varphi(x)} : | 0 \rangle = 1$, а потому выполнено $g_0 = 1$.

Логарифм двухточечной функции. Для конкретных операторов, например для экспонент бозонных полей, может оказаться более удобным (см. ниже) рассматривать сумму (13) в другом виде. При $g_0 = 1$ можно записать (см. также [37])

$$w(x) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\theta_1 \dots \int d\theta_n \exp\left(-ix \sum p_i\right) h_n(\underline{\theta}) \right].$$

Хорошо известно, что функции g_n и h_n связаны кумулянтными формулами

$$g_I = \sum_{I_1 \cup \dots \cup I_k = I} h_{I_1} \dots h_{I_k},$$

Размерность экспоненты поля для модели sh-Гордон: вклады промежуточных одночастичных (пунктирная линия) и $(1+2)$ -частичных (сплошная линия) состояний.

где использовано сокращенное обозначение $g_I = g_n(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

В силу лоренцевой инвариантности достаточно рассмотреть значение $x = (-i\tau, 0)$. Пусть $\mathcal{O}(x)$ – скалярный оператор. Тогда функции $h_n(\theta)$ зависят только от разностей быстрот. Выполняя одно интегрирование, получим соотношение для малых τ [37], [38]. Поэтому двухточечная функция Вайтмана имеет степенное поведение на малых расстояниях:

$$w(x) \approx C(m\tau)^{-4\Delta} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0,$$

где размерность равна

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\theta_1 \dots \int d\theta_{n-1} h_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, 0),$$

если интегралы существуют. Это верно для экспонент бозонных полей $\mathcal{O} = :e^{\gamma\varphi(x)}:$ ввиду асимптотического поведения h_n при $\text{Re } \theta \rightarrow \infty$.

В качестве примера рассмотрим модель sh-Гордон. Размерность экспоненты поля $\mathcal{O}(x) = :e^{\beta\varphi(x)}:$ можно вычислить в аппроксимации одночастичных и $(1+2)$ -частичных промежуточных состояний

$$\Delta_{1+2} = \frac{1}{2} \left(h_1 + \frac{1}{2!} \int d\theta h_2(\theta, 0) + \dots \right).$$

Интеграл можно вычислить точно [38]. Результат представлен на рисунке.

Благодарности. Г. Бабуджян был частично поддержан грантом Volkswagen-stiftung в рамках проекта “Непертурбативные аспекты квантовой теории поля в различных пространственно-временных размерностях”. Он также благодарит сотрудников отдела физики конденсированного состояния в ИСТР, где была выполнена часть данной работы, за гостеприимство. А. Фёрстер благодарит за поддержку

PRONEX в рамках контракта CNPq 66.2002/1998-99 и CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). Данная работа также поддержана со стороны EU Network EUCLID, “Интегрируемые модели и применения: от струн к конденсированному состоянию” (грант № HPRN-СТ-2002-00325).

Список литературы

- [1] W. Heisenberg, *Z. Naturforschung*, **1** (1946), 608–622.
- [2] G. F. Chew, *The S-Matrix Theory of Strong Interaction*, Frontiers in Physics: A Lecture Note and Reprint Volume, W. A. Benjamin, New York, 1961.
- [3] B. Schroer, T. T. Truong, P. Weisz, *Phys. Lett. B*, **63**:4 (1976), 422–424.
- [4] M. Karowski, H. J. Thun, T. T. Truong, P. Weisz, *Phys. Lett. B*, **67**:3 (1977), 321–322.
- [5] M. Karowski, H. J. Thun, *Nucl. Phys. B*, **130**:2 (1977), 295–308.
- [6] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.*, **120**:2 (1979), 253–291.
- [7] M. Karowski, P. Weisz, *Nucl. Phys. B*, **139**:4 (1978), 455–476.
- [8] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, *Phys. Rev. D*, **19**:8 (1979), 2477–2479.
- [9] F. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, Adv. Series Math. Phys., **14**, World Scientific, Singapore, 1992.
- [10] H. M. Babujian, A. Foerster, M. Karowski, *The nested $SU(N)$ off-shell Bethe ansatz and exact form factors*, [arXiv: hep-th/0611012](https://arxiv.org/abs/hep-th/0611012).
- [11] H. M. Babujian, A. Foerster, M. Karowski, *SIGMA*, **2** (2006), 082.
- [12] D. J. Gross, A. Neveu, *Phys. Rev. D*, **10**:10 (1974), 3235–3253.
- [13] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **145**:1 (1978), 110–118.
- [14] E. Abdalla, B. Berg, P. Weisz, *Nucl. Phys. B*, **157**:3 (1979), 387–391.
- [15] R. Koberle, V. Kurak, J. A. Swieca, *Phys. Rev. D*, **20**:4 (1979), 897–902.
- [16] R. Z. Bariev, *Phys. Lett. A*, **55**:8 (1976), 456–458.
- [17] B. M. McCoy, C. A. Tracy, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **38**:15 (1977), 793–796.
- [18] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Proc. Japan Acad.*, **53** (1977), 6–146.
- [19] V. P. Yurov, A. B. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:25 (1991), 4557–4578.
- [20] G. Lechner, *Comm. Math. Phys.*, **277**:3 (2008), 821–860; [arXiv: math-ph/0601022](https://arxiv.org/abs/math-ph/0601022).
- [21] M. Karowski, *Nucl. Phys. B*, **153** (1979), 244–252.
- [22] H. Babujian, M. Karowski, *Nucl. Phys. B*, **620**:3 (2002), 407–455.
- [23] B. Berg, M. Karowski, V. Kurak, P. Weisz, *Nucl. Phys. B*, **134**:1 (1978), 125–132.
- [24] V. Kurak, J. A. Swieca, *Phys. Lett. B*, **82**:2 (1979), 289–291.
- [25] R. Köberle, J. A. Swieca, *Phys. Lett. B*, **86** (1979), 209–210.
- [26] B. Berg, P. Weisz, *Nucl. Phys. B*, **146** (1978), 205–214.
- [27] A. A. Belavin, *Phys. Lett. B*, **87**:1–2 (1979), 117–121.
- [28] H. Babujian, M. Karowski, *Phys. Lett. B*, **575**:1–2 (2003), 144–150.
- [29] H. Babujian, A. Foerster, M. Karowski, *Nucl. Phys. B*, **736**:3 (2006), 169–198.
- [30] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento. Ital. Fis. B*, **1** (1955), 205–225.
- [31] M. Karowski, “The bootstrap program for $(1 + 1)$ dimensional field theoretic models with soliton behavior”, *Field Theoretical Methods in Particle Physics* (Kaiserslautern, 1979), NATO Adv. Study Inst. Ser. B: Physics, **55**, Plenum, New York, 1980, 307–324.
- [32] H. M. Babujian, A. Fring, M. Karowski, A. Zapletal, *Nucl. Phys. B*, **538**:3 (1999), 535–586.
- [33] K. M. Watson, *Phys. Rev.*, **95**:1 (1954), 228–236.
- [34] Y. Takeyama, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **39**:1 (2003), 59–116.
- [35] S. Pakuliak, *Ann. Henri Poincaré*, **7**:7–8 (2006), 1541–1554.
- [36] H. Babujian, A. Foerster, M. Karowski, “Exact form factors in integrable quantum field theories: The $SU(N)$ -Gross–Neveu model”, in preparation.
- [37] F. A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **337**:1 (1990), 156–180.
- [38] H. Babujian, M. Karowski, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:2 (2004), 34–49.