Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, Четырехвершинная модель и случайные укладки, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:42:38

© 2008 г.

Н. М. Боголюбов*

ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И СЛУЧАЙНЫЕ УКЛАДКИ

Рассмотрена точно решаемая четырехвершинная модель на квадратной решетке с различными граничными условиями. Применение алгебраического анзаца Бете позволяет вычислить статистическую сумму модели. Для фиксированных граничных условий установлена связь скалярного произведения векторов состояния модели с производящей функцией плоских разбиений, строгих по столбцам и строкам. Обсуждается соответствующая модель покрытий на периодической решетке.

Ключевые слова: интегрируемые модели, анзац Бете, плоские разбиения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Связь интегрируемых моделей с комбинаторикой широко обсуждается в настоящее время, и важную роль в этих исследованиях играет шестивершинная модель. Эта модель интенсивно изучалась как для периодических, так и для фиксированных граничных условий [1]–[6]. Шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки имеет отношение к перечислению укладок “ацтекских алмазов” и к перечислению матриц чередующихся знаков [7]–[9].

Четырехвершинная модель является частным случаем шестивершинной модели, из которой исключены две вершины. Данная модель рассматривалась в работах [10], [11], где была выявлена ее связь с моделью случайных укладок на полубесконечном цилиндре. Модели укладок являются моделями классической дискретной статистической физики, суть их состоит в описании способов укладки определенных поверхностей плитками различной геометрической формы без зазоров и наложений. Укладки называются случайными лишь для того, чтобы отличить их от правильных квазипериодических покрытий.

В данной статье мы применяем квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) к решению модели [12], [13]. Данный подход позволяет исследовать модель на решетке конечного размера с различными граничными условиями и вычислить статистические суммы вершинной модели и соответствующей ей модели покрытий. В частности, мы показываем, что статистическая сумма модели с фиксированными

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

граничными условиями имеет смысл производящей функции плоских разбиений, строгих по столбцам и строкам. Плоские разбиения эквивалентны как трехмерным диаграммам Юнга, помещенным в ящик конечного размера, так и покрытиям ромбами полурегулярного шестиугольника [14], [15]. В случае периодических граничных условий четырехвершинная модель эквивалентна модели покрытия тора единичными ромбами.

Связь интегрируемых моделей бозонного типа с теорией симметрических функций [14] и теорией плоских разбиений [16] рассматривалась в работах [17]–[20].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы даем определение модели и излагаем подход КМОЗ к ее решению. В разделе 3 исследована модель на решетке с фиксированными граничными условиями и установлена связь этой модели с плоскими разбиениями. Статистическая сумма модели на периодической решетке вычислена в разделе 4.

2. ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Четырехвершинная модель на квадратной решетке, являющаяся частным случаем шестивершинной модели, определяется четырьмя различными конфигурациями стрелок, направленными как в сторону каждого узла решетки, так и от него. Из шести возможных конфигураций две, с двумя горизонтальными стрелками, направленными направо, исключены. Статистический вес ω приписывается каждой допустимой конфигурации. Мы рассмотрим модель, в которой вершинные веса третьей и четвертой вершин равны (считая конфигурации на рис. 1 слева направо). Изображая стрелки, направленные вверх или направо жирными линиями, мы получим альтернативное описание вершин с помощью линий, проходящих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться лишь в двух состояниях (с жирной линией или без нее), то существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий – наборами решеточных путей.

Рис. 1. Четыре допустимые вершины как конфигурации стрелок и линий.

Для однородной модели вершинные веса ω не зависят от положения узла решетки, и статистическая сумма равна

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \sum \omega_a^{l^a} \omega_b^{l^b} \omega_c^{l^c}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке, а ω_a , ω_b и ω_c суть веса соответствующих вершин. Допустимые конфигурации зависят от наложенных граничных условий, которые определяются направлением стрелок на границе решетки. Число вершин типов a , b , c в каждой конфигурации равно l^a , l^b , l^c соответственно. Для неоднородной модели вершинные веса зависят от положения узла решетки.

Для того чтобы применить КМОЗ для исследования данной модели, мы воспользуемся ее спиновым описанием. Каждому вертикальному ребру и каждому горизонтальному ребру решетки ставится в соответствие локальное пространство $\mathcal{C}^2$. Состояния со спином вверх и спином вниз образуют естественный базис в этом пространстве. Состояние со спином вверх на вертикальном ребре соответствует стрелке, направленной вверх, а состояние со спином вниз – стрелке, направленной вниз. Состояние со спином вверх на i -м горизонтальном ребре соответствует стрелке, направленной налево, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \equiv |\leftarrow\rangle_i$, а состояние со спином вниз – стрелке, направленной направо, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \equiv |\rightarrow\rangle_i$. Вспомогательным пространством мы будем называть пространство $\mathcal{V} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$, ассоциированное со всеми вертикальными ребрами решетки, а квантовым пространством – пространство $\mathcal{H} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$, ассоциированное со всеми горизонтальными ребрами решетки. В каждом узле решетки в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ действует оператор. Этот оператор, действующий нетривиально только в локальном вспомогательном пространстве $\mathcal{C}^2$ и локальном квантовом пространстве $\mathcal{C}^2$, называется L -оператором.

L -оператор четырехвершинной модели имеет вид

$$L(n|u) = -\frac{u}{2}(1 + \sigma^z)e_n + \frac{u^{-1}}{2}(1 - \sigma^z)e_n + \sigma^+ \sigma_n^- + \sigma^- \sigma_n^+, \quad (2)$$

где параметр $u \in \mathcal{C}$, $\sigma^{z,\pm}$ – матрицы Паули, проектор $e = (\sigma^z + 1)/2$. Подстрочный индекс n означает, что матрица действует нетривиально только в n -м квантовом пространстве: $s_n = I \otimes \cdots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \cdots \otimes I$.

Матричные элементы введенного L -оператора

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} L_{11}(n|u) & L_{12}(n|u) \\ L_{21}(n|u) & L_{22}(n|u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ue_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}e_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

можно представить в виде точек с примыкающими стрелками (рис. 2). Матричный элемент $L_{11}(n|u)$ соответствует вершине 1 на рис. 2, где точкой обозначен оператор $-ue_n$, действующий в локальном квантовом пространстве. Единственный ненулевой элемент этого оператора ${}_n\langle \leftarrow | -ue_n | \leftarrow \rangle_n$ определяет вершину b на рис. 1 с весом $-u$. Матричный элемент $L_{22}(n|u)$ соответствует вершине 2 на рис. 2 с точкой, обозначающей оператор $u^{-1}e_n$. Этот оператор имеет ненулевой элемент ${}_n\langle \leftarrow | u^{-1}e_n | \leftarrow \rangle_n$, который определяет вершину a на рис. 1 с весом u^{-1} . Матричные элементы $L_{12}(n|u) = \sigma_n^-$ и $L_{21}(n|u) = \sigma_n^+$ соответствуют вершинам 3 и 4 на рис. 2, ненулевые матричные элементы этих операторов ${}_n\langle \rightarrow | \sigma_n^- | \leftarrow \rangle_n$ и ${}_n\langle \leftarrow | \sigma_n^+ | \rightarrow \rangle_n$ определяют вершины c на рис. 1 с весом, равным единице.

Рис. 2. Вершинное представление матричных элементов L -оператора.

Операторнозначная матрица (2) удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u, v)(L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u))R(u, v), \quad (4)$$

в котором $R(u, v)$ – это (4×4) -матрица

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \quad (6)$$

Вертикальная матрица монодромии определяется как произведение L -операторов:

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u) \dots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матричные элементы матрицы монодромии (7) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M+1$ узлами (рис. 3). Например, оператору

$$B(u) = \sum_{k_M, \dots, k_1=1}^2 L_{1k_M}(M|u)L_{k_M k_{M-1}}(M-1|u) \dots L_{k_1 2}(0|u)$$

соответствуют граничные условия, при которых верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация B на рис. 3). Оператору $C(u)$ соответствуют граничные условия, при которых верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация C на рис. 3). Операторам $A(u)$ и $D(u)$ соответствуют граничные условия, при которых верхняя и нижняя стрелки направлены в одном направлении (конфигурации A и D на рис. 3).

Рис. 3. Графическое представление матричных элементов матрицы монодромии.

Коммутационные соотношения матричных элементов матрицы монодромии задаются той же R -матрицей (5):

$$R(u, v)(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))R(u, v), \quad (8)$$

наиболее важными из которых являются следующие:

$$\begin{aligned} C(u)B(v) &= g(u, v)\{A(u)D(v) - A(v)D(u)\}, \\ A(u)B(v) &= f(u, v)B(v)A(u) + g(v, u)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(v, u)B(v)D(u) + g(u, v)B(u)D(v), \\ [B(u), B(v)] &= [C(u), C(v)] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица перехода $\tau(u)$ определяется как след матрицы монодромии во вспомогательном пространстве:

$$\tau(u) = \text{tr } T(u) = A(u) + D(u). \quad (10)$$

Равенство (8) означает, что $[\tau(u), \tau(v)] = 0$ при любых значениях параметров u, v .

L -оператор (2) удовлетворяет соотношению

$$e^{\zeta \sigma_n^z} L(n|u) e^{-\zeta \sigma_n^z} = e^{-\zeta \sigma^z/2} L(n|u) e^{\zeta \sigma^z/2}, \quad (11)$$

где ζ – произвольный параметр. Из этого равенства и из определения матрицы монодромии (7) следует, что

$$e^{\zeta S^z} T(u) e^{-\zeta S^z} = e^{-\zeta \sigma^z} T(u) e^{\zeta \sigma^z}, \quad (12)$$

где $S^z = \sum_{i=0}^M \sigma_i^z/2$ является оператором z -компоненты полного спина. Равенства

$$\begin{aligned} S^z B(u) &= B(u)(S^z - 1), \\ S^z C(u) &= C(u)(S^z + 1) \end{aligned} \quad (13)$$

вытекают из соотношения (12) и означают, что оператор $B(u)$ понижает полный спин системы, а оператор $C(u)$ повышает его. Из равенства (12) следует, что

$$[\tau(u), S^z] = 0. \quad (14)$$

Производящим вектором квантового пространства $\mathcal{H}$ является состояние со всеми спинами, направленными вверх,

$$|\Leftarrow\rangle = \bigotimes_{i=0}^M |\leftarrow\rangle_i = \bigotimes_{i=0}^M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i. \quad (15)$$

Данный вектор уничтожается оператором $C(u)$,

$$C(u)|\Leftarrow\rangle = 0, \quad (16)$$

и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$,

$$A(u)|\Leftarrow\rangle = \alpha(u)|\Leftarrow\rangle, \quad D(u)|\Leftarrow\rangle = \delta(u)|\Leftarrow\rangle, \quad (17)$$

с собственными значениями

$$\alpha(u) = (-u)^{M+1}, \quad \delta(u) = (u^{-1})^{M+1} \quad (18)$$

соответственно. Полный спин производящего вектора равен $(M+1)/2$:

$$S^z|\Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}(M+1)|\Leftarrow\rangle. \quad (19)$$

Одним из основных объектов дальнейшего рассмотрения будет состояние, полученное последовательным действием операторов $B(u)$ на состояние $|\Leftarrow\rangle$:

$$|\Psi_n(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{i=1}^N B(u_i) |\Leftarrow\rangle. \quad (20)$$

Из равенства (13) следует, что полный спин этого вектора равен

$$S^z \prod_{i=1}^N B(u_i) |\Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}(M+1-2N) \prod_{i=1}^N B(u_i) |\Leftarrow\rangle. \quad (21)$$

Сопряженный к (20) вектор определяется как

$$\langle\Psi_n(u_1, u_2, \dots, u_N)| = \langle\Leftarrow| \prod_{i=1}^N C(u_i). \quad (22)$$

Легко проверить, что $\langle\Leftarrow|B(u) = 0$.

В координатном представлении вектор состояния имеет вид

$$|\Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{k=1}^N B(u_k) |\Leftarrow\rangle = \sum \chi_\mu(u_1, u_2, \dots, u_N) |m_1, \dots, m_N\rangle, \quad (23)$$

где через $|m_1, \dots, m_N\rangle$ мы обозначили состояние с N спинами, направленными вниз, в узлах $m_1, \dots, m_N$, и с $M+1-N$ спинами, направленными вверх, в остальных узлах. Волновая функция $\chi_\mu(u_1, u_2, \dots, u_N)$ удовлетворяет условию исключения. Она отлична от нуля только в том случае, когда числа $\mu = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ образуют строгое разбиение $M \geq m_1 > m_2 > \dots > m_N \geq 0$, причем $m_i \geq m_{i+1} + 2$. Прямым вычислением можно показать, что волновая функция выражается через определитель:

$$\chi_\mu(u_1, u_2, \dots, u_N) = (-1)^{\sum m_k} (u_1 \dots u_N)^{M-2(N-1)} \frac{\det(u_j^{-2(m_k+k-N)})}{\prod_{1 \leq k < j \leq N} (u_k^{-2} - u_j^{-2})}. \quad (24)$$

Волновая функция, записанная через симметрическую функцию Шура

$$S_\lambda(u_1, u_2, \dots, u_N) = \frac{\det(u_j^{N-k+\lambda_k})}{\prod_{1 \leq k < j \leq N} (u_k - u_j)},$$

имеет вид

$$\chi_\mu(u_1, u_2, \dots, u_N) = (-1)^{\sum m_k} (u_1 \dots u_N)^{M-2(N-1)} S_{\mu-\delta}(u_1^{-2}, u_2^{-2}, \dots, u_N^{-2}), \quad (25)$$

где δ есть разбиение с элементами $\delta_j = 2(N-j)$, $j = 1, \dots, N$, а элементы разбиения $\lambda = \mu - \delta$ равны $\lambda_j = m_j - 2(N-j)$ и удовлетворяют условию $M - 2(N-1) \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$.

3. ФИКСИРОВАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим модель на квадратной решетке размера $2N \times (M+1)$ со следующими граничными условиями: все стрелки на правой и левой границах направлены налево, верхние и нижние стрелки первых N столбцов (считая слева) направлены внутрь, а верхние и нижние стрелки последних N столбцов направлены наружу. Данные условия мы будем называть фиксированными граничными условиями.

Для того чтобы перечислить все возможные конфигурации стрелок, значительно удобнее использовать описание модели в терминах линий и представлять допустимые конфигурации как наборы решеточных путей. Путь начинается в одной из N нижних левых вершин, завершается в одной из N верхних правых вершин и всегда идет на восток или север. Пути не соприкасаются, причем допустимы несколько последовательных шагов в вертикальном направлении и лишь один шаг в горизонтальном направлении. Если первые N столбцов решетки имеют номера $-N, \dots, -1$, а последние – номера $1, \dots, N$, если нижняя строка имеет номер 0, а верхняя – номер M , тогда путь с номером m идет из вершины $(-N + m - 1; 0)$ к вершине $(m; M)$, $1 \leq m \leq N$. Типичный набор путей изображен на рис. 4. Длина пути равна $N + M$. Число вершин типа c в допустимом пути равно $2N$, так как в горизонтальном направлении разрешен лишь один последовательный шаг, число вершин типа b равно $M - N + 1$. Это означает, что число вершин типа c и b в наборе путей равно соответственно $l^c = 2N^2$ и $l^b = l^a = N(M - N + 1)$.

Рис. 4. Типичная конфигурация допустимых решеточных путей на решетке с фиксированными граничными условиями и соответствующее ей строгое плоское разбиение с градиентными линиями.

Статистическая сумма однородной модели с фиксированными граничными условиями равна

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = (\omega_a \omega_b)^{N(M-N+1)} \omega_c^{2N^2} S(N, M), \quad (26)$$

где через $S(N, M)$ обозначено число всех допустимых конфигураций решеточных путей.

В случае неоднородной модели вершинные веса ω_a , ω_b и ω_c зависят от положения узла решетки. Мы рассмотрим модель, в которой веса зависят только от номера столбца. При нашем способе нумерации столбцов статистическая сумма модели

равна

$$Z(\{\omega_a\}, \{\omega_b\}, \{\omega_c\}) = \sum \prod_{k=-1}^{-N} (\omega_a)_k^{l_k^a} (\omega_b)_k^{l_k^b} (\omega_c)_k^{l_k^c} \prod_{j=1}^N (\omega_a)_j^{l_j^a} (\omega_b)_j^{l_j^b} (\omega_c)_j^{l_j^c}. \quad (27)$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (20) и (22)

$$W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = \langle \leftarrow | C(v_1) \dots C(v_N) B(u_1) \dots B(u_N) | \leftarrow \rangle, \quad (28)$$

где $\{u\}$ и $\{v\}$ – это наборы независимых параметров. Мы можем представить матричные элементы скалярного произведения (28) как двумерную квадратную решетку размера $2N \times (M+1)$. Первые N вертикальных линий решетки ассоциируются с операторами $C(v_j)$, а последние N вертикальных линий – с операторами $B(u_j)$. Горизонтальные линии ассоциируются с локальными квантовыми пространствами, линия с номером i соответствует квантовому пространству с индексом i . Из графического представления операторов $B(u)$ и $C(u)$ следует, что матричный элемент (28) равен сумме всех допустимых конфигураций стрелок (или решеточных путей) на решетке с фиксированными граничными условиями (рис. 4):

$$\begin{aligned} W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) &= \sum \prod_{k=-1}^{-N} (-v_{-k})^{l_k^b} (v_{-k}^{-1})^{l_k^a} \prod_{j=1}^N (-u_j)^{l_j^b} (u_j^{-1})^{l_j^a} = \\ &= (-1)^{MN} \sum \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{l_k^b - l_k^a} \prod_{j=1}^N u_j^{l_j^b - l_j^a}. \end{aligned} \quad (29)$$

Положим

$$\begin{aligned} (\omega_a)_j &= v_{-j}^{-1}, & (\omega_b)_j &= v_{-j}, & -N \leq j \leq -1; \\ (\omega_a)_j &= u_j^{-1}, & (\omega_b)_j &= u_j, & 1 \leq j \leq N; \\ (\omega_c)_j &= 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда

$$Z(\{\omega_a\}, \{\omega_b\}, \{\omega_c\}) = (-1)^{MN} W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N). \quad (31)$$

Скалярное произведение (28) при произвольном значении параметров u_j, v_j вычисляется с помощью перестановочных соотношений (9) и равно [13], [17]

$$W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = (-1)^{MN} \left\{ \prod_{j>k} \frac{v_j v_k}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{l>m} \frac{u_l u_m}{u_l^2 - u_m^2} \right\} \det H, \quad (32)$$

где матричные элементы $(N \times N)$ -матрицы H равны

$$H_{jk} = \left\{ \left(\frac{u_k}{v_j} \right)^{M-N+2} - \left(\frac{u_k}{v_j} \right)^{-M+N-2} \right\} \cdot \frac{1}{\frac{u_k}{v_j} - \left(\frac{u_k}{v_j} \right)^{-1}}. \quad (33)$$

Формулы (32), (33) определяют решение неоднородной четырехвершинной модели и дают представление ее статистической суммы в виде определителя.

Статистическую сумму можно вычислить в явном виде, если выбрать вершинные веса в следующем виде:

$$v_j = q^{-j/2}, \quad u_j = q^{(j-1)/2}, \quad (34)$$

где q – больцмановский вес, $q = e^{-\nu}$ с $\nu > 0$. В данной параметризации статистическая сумма модели (27) принимает вид

$$Z(q) = \sum q^{\sum_{k=-1}^{-N} k(l_k^a - l_k^b)/2 + \sum_{j=1}^N (j-1)(l_j^a - l_j^b)/2}, \quad (35)$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам решеточных путей. Подстановка параметризации (34) преобразует представление (32) в

$$W_q(N, M) = (-1)^{NM+N(N-1)/2} \left\{ \prod_{j>k} (q^{(j-k)/2} - q^{-(j-k)/2})^{-2} \right\} \det Q, \quad (36)$$

где элементы матрицы Q равны

$$Q_{jk} = \frac{s^{(k+j-1)/2} - s^{-(k+j-1)/2}}{q^{(k+j-1)/2} - q^{-(k+j-1)/2}}, \quad s = q^{M-N+2}. \quad (37)$$

Определитель матрицы Q был вычислен в работе [7]:

$$\begin{aligned} \det Q &= (-1)^{N(N-1)/2} \left\{ \prod_{j>k} (q^{(j-k)/2} - q^{-(j-k)/2})^2 \right\} \times \\ &\times \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{s^{1/2} q^{(j-k)/2} - s^{-1/2} q^{-(j-k)/2}}{q^{(k+j-1)/2} - q^{-(k+j-1)/2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Подстановка этого выражения в (36) дает

$$\begin{aligned} W_q(N, M) &= (-1)^{NM} q^{-N^2(M+2-2N)/2} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{M-N+2+j-k}}{1 - q^{k+j-1}} = \\ &= (-1)^{NM} q^{-N^2(M+2-2N)/2} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{k+j-1}}, \end{aligned}$$

а статистическая сумма (35) равна

$$Z(q) = q^{-N^2(M+2-2N)/2} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{k+j-1}}. \quad (39)$$

По определению $Z(1) = S(N, M)$, и для однородной модели (26) получим следующий ответ:

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = (\omega_a \omega_b)^{N(M-N+1)} \omega_c^{2N^2} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{M - j - k + 3}{j + k - 1}. \quad (40)$$

Для того чтобы связать четырехвершинную модель с моделью укладок, заметим, что каждый набор допустимых решеточных путей может быть представлен в виде матрицы π_{ij} размера $N \times N$. Путь с номером m соответствует m -му столбцу этой матрицы; матричный элемент π_{jm} равен числу ячеек в последующем столбце j решетки (начиная с правой) под m -м путем. Например, матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

соответствует набору путей на рис. 4.

Набор π_{ij} неотрицательных целых чисел, упорядоченных в порядке нестрогого убывания по индексам i и j ($i, j = 1, 2, \dots$), называется плоским разбиением π [14]. Числа π_{ij} называются частями плоского разбиения. У плоского разбиения есть трехмерная диаграмма (диаграмма Юнга), представляющая собой множество столбцов, составленных из единичных кубов. Число $|\pi| = \sum \pi_{ij}$ называется ее объемом или весом плоского разбиения. Высота столбца диаграммы с координатами (i, j) равна

Рис. 5. Три типа единичных ромбов.

части плоского разбиения π_{ij} . Если $i \leq r$, $j \leq s$ и $\pi_{ij} \leq t$ для всех частей плоского разбиения, то такое плоское разбиение называется плоским разбиением, заключенным внутри ящика со сторонами r , s , t . Если при этом $\pi_{ij} > \pi_{i+1,j}$, т.е. части плоского разбиения убывают вдоль каждого столбца, то такое π называется строгим по столбцам плоским разбиением. Плоское разбиение π с частями, убывающими как по столбцам, так и по строкам ($\pi_{ij} > \pi_{i+1,j}$ и $\pi_{ij} > \pi_{i,j+1}$), будем называть строгим разбиением. Если $s = r$, то элемент π_{11} строгого разбиения π_{ij} удовлетворяет условию $\pi_{11} \geq 2r - 2$. Произвольное плоское разбиение π_{ij} , заключенное в ящик со сторонами r , r , t , может быть преобразовано в строгое плоское разбиение в ящике со сторонами r , r , $(t + 2r - 2)$, если добавить к нему разбиение, определяемое $(r \times r)$ -матрицей

$$\pi = \begin{pmatrix} 2r-2 & 2r-3 & \dots & r-1 \\ 2r-3 & 2r-4 & \dots & r-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r-1 & r-2 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

которая соответствует минимальному строгому разбиению.

Плоское разбиение в ящике со сторонами r , s , t эквивалентно укладке полурегулярного шестиугольника единичными ромбами с углами $\pi/3$ и $2\pi/3$ (рис. 5).

В рассматриваемом случае допустимые укладки представляют собой проекцию строгих трехмерных диаграмм Юнга с градиентными линиями. Трехмерная диаграмма Юнга, которая соответствует плоскому разбиению (41), изображена на рис. 4.

Статистическая сумма трехмерных диаграмм Юнга, заключенных в ящик, равна

$$Z_{\text{YD}}(q) = \sum q^{|\pi|}, \quad (42)$$

где q – это больцмановский вес единичного куба, а суммирование ведется по всем диаграммам. Объем трехмерной строгой диаграммы Юнга в ящике со сторонами N , N , M вычисляется по соответствующему ей набору решеточных путей [17]:

$$|\pi| = \frac{N^2 M}{2} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{k}{2} (l_k^a - l_k^b) + \sum_{j=1}^N \frac{j-1}{2} (l_j^a - l_j^b).$$

Подставляя это выражение в (35), мы получим следующий ответ для статистической суммы строгих трехмерных диаграмм Юнга в ящике со сторонами N , N , M :

$$Z_{\text{YD}}(q) = q^{N^2 M/2} Z(q) = q^{N^2(N-1)} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{k+j-1}}. \quad (43)$$

Эту статистическую сумму можно рассматривать как производящую функцию строгих плоских разбиений. Число соответствующих упадок шестиугольника единичными ромбами равно $Z_{\text{YD}}(1)$ и совпадает со статистической суммой однородной мо-

дели с единичными вершинными весами:

$$Z_{\text{YD}}(1) = Z(1, 1, 1) = \prod_{1 \leq j, k \leq N} \frac{M - j - k + 3}{j + k - 1}.$$

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим теперь модель на решетке с периодическими граничными условиями. Это означает, что на решетке с $M+1$ горизонтальными и L вертикальными линиями граничные стрелки на любой линии направлены в одну сторону (рис. 6).

Рис. 6. Типичная конфигурация решеточных путей на решетке с периодическими граничными условиями и соответствующая ей укладка единичных ромбов.

Мы ограничимся случаем четных $M+1$ и L . В четырехвершинной модели число стрелок, направленных направо или налево в последующих столбцах решетки, сохраняется. Это означает, что число вершин типа c на каждой вертикальной линии сохраняется и равно $l_c = 2n$, где n – число стрелок, направленных направо в примыкающем столбце.

Статистическая сумма (1) однородной модели на периодической решетке размера $(M+1) \times L$ с фиксированным числом стрелок, направленных направо, и вершинными весами $\omega_a = e^{-\nu}$, $\omega_b = e^{\nu}$, $\omega_c = 1$ равна

$$Z_n(\mu) = \sum e^{\nu(l_b - l_a)}, \quad (44)$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке с периодическими граничными условиями или по соответствующим наборам решеточных путей на рис. 6.

Рассмотрим след матрицы перехода в квантовом пространстве (10):

$$\text{tr } \tau^L(u) = \text{tr}(A(u) + D(u))^L = \sum \langle m_1, \dots, m_n | (A(u) + D(u))^L | m_1, \dots, m_n \rangle. \quad (45)$$

Здесь через $|m_1, \dots, m_n\rangle$ обозначено состояние с n спинами, направленными вниз в узлах $m_1, \dots, m_n$, и с $M + 1 - n$ спинами, направленными вверх в остальных узлах, а суммирование ведется по полному набору состояний $|m_1, \dots, m_n\rangle$ в квантовом пространстве $\mathcal{H}$. Сохранение числа n есть следствие коммутативности (14) оператора третьей компоненты полного спина и матрицы перехода. Так как $\tau^L(u)$ является производящей функцией различных комбинаций операторов A и D , то ее след (45) представляет собой сумму по всем допустимым конфигурациям вершин a, b, c с весами $\omega_a = \delta(u)$, $\omega_b = \alpha(u)$, $\omega_c = 1$ (18) на периодической решетке размера $(M + 1) \times L$:

$$\text{tr } \tau^L(u) = \sum (-u)^{l^b} (u^{-1})^{l^a}. \quad (46)$$

Сравнивая это выражение с (44), мы получаем следующее представление для статистической суммы:

$$Z_n(\nu) = e^{-i\pi(M+1-2n)L/2} \text{tr } \tau^L(-ie^\nu), \quad (47)$$

где мы положили $u = -ie^\nu$.

Для того чтобы вычислить это выражение, необходимо решить задачу на собственные значения для матрицы перехода $\tau(u)$:

$$\begin{aligned} \tau(u) |\Psi_n(v_1, \dots, v_n)\rangle &= \Theta_n(u; v_1, \dots, v_n) |\Psi_n(v_1, \dots, v_n)\rangle, \\ S^z |\Psi_n(v_1, \dots, v_n)\rangle &= \frac{1}{2} (M + 1 - 2n) |\Psi_n(v_1, \dots, v_n)\rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Вектор (20) является собственным вектором матрицы перехода, если параметры v_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$\begin{aligned} (v_k^2)^{M+1-n} &= (-1)^{n-1} V^{-2}, \quad k = 1, \dots, n, \\ V^{-2} &= \prod_{j=1}^n v_j^{-2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Положив $v_k^2 = e^{ip_k}$, можно представить решения уравнений Бете (49) в виде

$$p_k = \frac{2\pi I_k - P}{M + 1 - n}, \quad -\pi < p_k \leq \pi, \quad (50)$$

где I_n — это целые или полуцелые числа в зависимости от того, является ли n соответственно нечетным или четным числом, полный импульс $P = \sum_{j=1}^n p_j$. Классификацию решений уравнений (50) можно найти в работах [21], [22].

Собственное значение матрицы перехода равно

$$\Theta_n(u; \{v\}) = e^{i\pi(M+1-2n)/2} \{u^{M+1} V^{-2} + (-1)^n u^{-(M+1-2n)}\} \prod_{j=1}^n \frac{1}{u^2 - v_j^2}. \quad (51)$$

Статистическая сумма (44) четырехвершинной модели на периодической решетке задается равенством

$$Z_n(\nu) = e^{-i\pi(M+1-2n)L/2} \sum_{\{v\}} \Theta_n^L(-ie^\nu; \{v\}), \quad (52)$$

где суммирование ведется по всем наборам решений уравнений Бете. Простейшее решение соответствует случаю $n = 0$. При этом статистическая сумма равна $Z_0(\nu) = \{2 \text{ch}(M + 1)\nu\}^L$ и $Z_0(0) = 2^L$. Другой предельный случай соответствует $2n = M + 1$. В этом случае существуют лишь два набора решений. Первый набор задается

решениями (50) с $I_k = k - (n+1)/2$, $k = 1, \dots, n$, и $P = 0$. Второй набор получается при $I_k = k - (n+3)/2$, $k = 1, \dots, n$, и $P = -\pi$. Применение равенства

$$\prod_{k=1}^n (a - be^{i2\pi k/n}) = a^n - b^n$$

дает $Z_{(M+1)/2}(\nu) = 2$.

Вектором $|\Psi_n(p_1, \dots, p_n)\rangle = \prod_{k=1}^n B(e^{ip_k})|\Leftarrow\rangle$, сопряженным к собственному вектору (48), где p_k – решения (50) уравнений Бете (49), является вектор

$$\langle\Psi_n(p_1, \dots, p_n)| = \langle\Leftarrow| \prod_{k=1}^n B^\dagger(e^{ip_k}).$$

Операторы $B(e^{ip})$ и $C(e^{ip})$ находятся в инволюции: $B^\dagger(e^{ip}) = (-1)^M C(e^{ip})$.

Норма собственных векторов вычисляется с помощью представления (32). Когда наборы параметров совпадают, $\{u\} = \{v\}$, диагональные элементы матрицы H равны

$$H_{jj} = M - n + 2.$$

Если $\{u\} = \{v\}$ являются решениями уравнений Бете (49), то недиагональные элементы матрицы H равны единице: $H_{jk} = 1$. Определитель легко вычисляется,

$$\det H = (M+1)(M-n+1)^{n-1},$$

и норма любого собственного вектора равна

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(p_1, \dots, p_n) &= \langle\Psi_n(p_1, \dots, p_n) | \Psi_n(p_1, \dots, p_n)\rangle = \\ &= (M+1)(M-n+1)^{n-1} \prod_{j \neq k} \frac{e^{iP}}{e^{ip_j} - e^{ip_k}}, \end{aligned}$$

где p_j – решения уравнений (50). Собственные векторы (48) образуют полную ортогональную систему [22].

Рассмотрим цилиндр с длиной окружности, равной $M+1$, и высотой L . Вероятность того, что решеточные пути, берущие начало в узлах $\tilde{\mu} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$, $\tilde{m}_i \geq \tilde{m}_{i+1} + 2$, покинут цилиндр в узлах $\mu = (m_1, \dots, m_n)$, $m_i \geq m_{i+1} + 2$, определяется следующим равенством:

$$\begin{aligned} \langle m_1, \dots, m_n | \tau^L(-ie^\nu) | \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n \rangle &= \\ &= \mathcal{N}^{-2} \sum_{\{p\}} \langle m_1, \dots, m_n | \Psi_n(p_1, \dots, p_n) \rangle \Theta_n^L(-ie^\nu; \{e^{ip}\}) \times \\ &\quad \times \langle \Psi_n(p_1, \dots, p_n) | \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n \rangle = \\ &= \mathcal{N}^{-2} \sum_{\{p\}} S_{\mu-\delta}(e^{ip_1}, e^{ip_2}, \dots, e^{ip_n}) S_{\tilde{\mu}-\delta}(e^{-ip_1}, e^{-ip_2}, \dots, e^{-ip_n}) \Theta_n^L(-ie^\nu; \{e^{ip}\}), \end{aligned} \tag{53}$$

где суммирование ведется по всем решениям уравнений Бете; в данной формуле мы воспользовались представлением (25).

Каждой конфигурации решеточных путей на торе можно сопоставить укладку тора единичными ромбами по следующему правилу: ромбу 1 на рис. 5 соответствует вертикальное ребро, по которому проходит путь, ромбу 2 – аналогичное горизонтальное ребро, а ромбу 3 – свободные вертикальные ребра. Число укладок, которые определяются четырехвершинной моделью, дается равенством (52) при $\nu = 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что, хотя рассмотренная четырехвершинная модель и является частным случаем шестивершинной, детерминантные представления для статистической суммы неоднородной модели на решетке с фиксированными граничными условиями нельзя получить простым предельным переходом, так как подобный ответ для шестивершинной модели неизвестен. То же можно сказать и про полученное представление среднего (53) через симметрические функции.

Квантовым гамильтонианом, коммутирующим с матрицей перехода четырехвершинной модели, является гамильтониан, получающийся в пределе бесконечной анизотропии из гамильтониана ХХЗ-цепочки Гейзенберга [21], [22]. Описанный в статье подход позволяет получать детерминантные представления для различных корреляционных функций соответствующей квантовой модели.

Благодарности. Данная работа частично поддержана CRDF (грант № RUMI-2622-ST-04) и РФФИ (грант № 07-01-00358).

Список литературы

- [1] Р. Бакстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [2] V. E. Korepin, *Comm. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [3] V. Korepin, P. Zinn-Justin, *J. Phys. A*, **33**:40 (2000), 7053–7066.
- [4] N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko, M. B. Zvonarev, *J. Phys. A*, **35**:27 (2002), 5525–5541.
- [5] D. Allison, N. Reshetikhin, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **55**:6 (2005), 1847–1869.
- [6] O. Syljuåsen, M. Zvonarev, *Phys. Rev. E*, **70**:1 (2004), 016118.
- [7] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Not.*, **1996**:3 (1996), 139–150.
- [8] F. Colomo, A. G. Pronko, *J. Stat. Mech.*, 2005, № 1, 01005.
- [9] P. L. Ferrari, H. Spohn, *J. Phys. A*, **39**:33 (2006), 10297–10306; [arXiv: cond-mat/0605406](#).
- [10] W. Li, H. Park, M. Widom, *J. Phys. A*, **23**:11 (1990), L573–L580.
- [11] W. Li, H. Park, *J. Phys. A*, **24** (1991), 257–264.
- [12] L. D. Faddeev, **1** (1980), 107–155.
- [13] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [14] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [15] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: the Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [16] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.
- [17] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38**:43 (2005), 9415–9430.
- [18] Н. В. Цилевич, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 53–65.
- [19] K. Shigechi, M. Uchiyama, *J. Phys. A*, **38**:48 (2005), 10287–10306.
- [20] Н. М. Боголюбов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 193–203.
- [21] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.
- [22] Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 288–303.